表現論 ノート

高間俊至，奥山竜司

2025 年 3 月 6 日

本文中で

- 「章」と言ったら LaTeX コマンド `\chapter{}` によって区切られる 1 部分を,
- 「節」と言ったら LaTeX コマンド `\section{}` によって区切られる 1 部分を,
- 「小節」と言ったら LaTeX コマンド `\subsection{}` によって区切られる 1 部分を

表すことにする．節，小節の見た目は以下の通りである：

0.1　節の例

0.1.1　小節の例

本資料ではベクトル空間を英大文字で表記し，係数体を blackboardbold[*1]で表記する（e.g. 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V）.

[*1] LaTeX コマンドは`\mathbb`

目次

第 1 章

Lie 群と Lie 代数

この章は [Hum72, Chapter I], [佐武 87, 第 1-3 章] に相当する．

本章に限ってはベクトルを $x \in L$ のように英小文字で表記し，係数体の元は $\lambda \in \mathbb{K}$ のようにギリシャ文字で表記する．零ベクトルは $o \in L$ と書き[*1]，$0 \in \mathbb{K}$ を係数体の加法単位元，$1 \in \mathbb{K}$ を係数体の乗法単位元とする．ベクトル空間の加法を $+$ と書き，スカラー乗法は λx のように係数を左に書く．また，特に断りがなければ Einstein の規約を使う．

1.1　公理的 Lie 代数

この節では，特に断りがなければ $\mathbb{K}$ を任意の体とする．Lie 代数を純粋に代数学的な対象として扱うことを考える．

! Lie 代数を表す記号は Fraktur という字体で書く慣例がある．例えば「Fraktur」という文字列は $\mathfrak{Fraktur}$ のようになる．LaTeX コマンドは数式モード中で `\mathfrak{}` とする．

公理 1.1.1: Lie 代数の公理

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の上に二項演算[a]

$$[\ ,\ ]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ (x,\ y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，$\mathfrak{g}$ は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる：

(L-1) $[\ ,\ ]$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\ x_i,\ y,\ y_i \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\ 2)$ に対して

$$\begin{aligned}[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] &= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y],\\ [x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] &= \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]\end{aligned}$$

が成り立つ．

(L-2) $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, x] = o$$

[*1] 0 の濫用を回避するための苦肉の策です... 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも 0 と書きます．

が成り立つ．

(L-3) $\forall x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = o$$

が成り立つ[b]（**Jacobi 恒等式**）．

[a] ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に，追加で $[\ ,\ ]$ が定義されているという状況である．この付加的な二項演算はしばしば**括弧積** (bracket) とか**交換子** (commutator) とか **Lie ブラケット** (Lie bracket) とか呼ばれる．

[b] 結合律ではない！

公理 **(L-1)**, **(L-2)** から

$$o = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

が従う．i.e. $[x, y]$ は反交換 (anticommute) する：

(L'-2) $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, y] = -[y, x]$$

が成り立つ．

逆に **(L'-2)** を仮定すると

$$o = [x, x] + [x, x] = (1 + 1)[x, x]$$

が成り立つ[*2]ので，体 $\mathbb{K}$ において $1 + 1 \neq 0$ ならば $[x, x] = o$ が言える．i.e. $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ ならば[*3] **(L'-2)** と **(L-2)** は同値である．

【例 1.1.1】3 次元実ベクトル空間

$\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}$-ベクトル空間と見做す．$\mathbb{R}^3$ 上の Lie ブラケットを

$$[\ ,\ ]\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,\ y) \longmapsto x \times y$$

によって定義する．ただし右辺の $\times$ はベクトル積である．このとき $\mathbb{R}^3$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

証明 $\mathbb{R}^3$ の元の成分を $x = (\,x_\mu\,)_{1 \leq \mu \leq 3}$ のように書く．ひたすら成分計算をする．

(L-1) ベクトル積の定義から

$$\begin{aligned}([\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda}(\lambda_1 x_{1\nu} + \lambda_2 x_{2\nu}) y_\lambda \\ &= \lambda_1 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{1\mu} y_\lambda + \lambda_2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{2\nu} y_\lambda \\ &= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y]\end{aligned}$$

[*2] 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律（ベクトル空間の公理である）を使った．

[*3] 体 $\mathbb{K}$ の**標数** (characteristic) を $\operatorname{char} \mathbb{K}$ と書いた．

が成り立つ．全く同様に

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

が示される．

(L-2) Levi-Civita 記号の添字に関する反対称性から

$$([x, x])_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu x_\lambda = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\lambda x_\nu = -\epsilon_{\mu\lambda\nu} x_\lambda x_\nu = (-[x, x])_\mu$$

$\mathrm{char}\, \mathbb{R} = 0 \neq 2$ なので，ここから $[x, x] = o$ が従う．

(L-3) 行と列をそれぞれ適切に入れ替えた単位行列の行列式を考えることで，恒等式 $\epsilon_{\mu\nu\lambda}\epsilon_{\rho\sigma\lambda} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}$ が成り立つことがわかる．従って

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu \epsilon_{\lambda\rho\sigma} y_\rho z_\sigma \\ &= (\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) x_\nu y_\rho z_\sigma \\ &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]])_\mu &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu + y_\nu z_\mu x_\nu - y_\nu z_\nu x_\mu + z_\nu x_\mu y_\nu - z_\nu x_\nu y_\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

$\mathbb{R}^3$ の標準的な基底

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^3$ の任意の 2 つの元に対する Lie ブラケットがこの恒等式によって完全に決まることを含意して，$3^3 = 27$ 個の実定数 ϵ_{ijk} のことを $\mathbb{R}^3$ の**構造定数** (structure constant) と呼ぶ．

【例 1.1.2】一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V から V への線型写像全体が成す集合を $\mathrm{End}\, V$ と書く[a]．$\mathrm{End}\, V$ の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} +\colon \mathrm{End}\, V \times \mathrm{End}\, V &\longrightarrow \mathrm{End}\, V,\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(v \mapsto x(v) + y(v)\bigr) \\ \cdot\,\colon \mathbb{K} \times \mathrm{End}\, V &\longrightarrow \mathrm{End}\, V,\ (\lambda,\, x) \longmapsto \bigl(v \mapsto \lambda x(v)\bigr) \end{aligned}$$

として定義すると，組 $(\mathrm{End}\, V,\, +,\, \cdot\,)$ は体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．以降では常に $\mathrm{End}\, V$ をこの方法でベクトル空間と見做す．

$\mathrm{End}\, V$ の上の Lie ブラケットを

$$[\,,]\colon \mathrm{End}\, V \times \mathrm{End}\, V \longrightarrow \mathrm{End}\, V,\ (x,\, y) \longmapsto xy - yx$$

と定義する．ただし右辺の xy などは写像の合成 $x \circ y$ の略記である．このとき組 $(\mathrm{End}\, V,\, +,\, \cdot\,,\, [\,,])$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

<u>**証明**</u> **(L-1)** $\forall v \in V$ を 1 つとる．定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$\begin{aligned}
[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y](v) &= \big((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)y - y(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\big)(v) \\
&= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\big(y(v)\big) - y\big((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(v)\big) \\
&= (\lambda_1 x_1)\big(y(v)\big) + (\lambda_2 x_2)\big(y(v)\big) - y\big((\lambda_1 x_1)(v) + (\lambda_2 x_2)(v)\big) \\
&= \lambda_1 x_1\big(y(v)\big) + \lambda_2 x_2\big(y(v)\big) - \lambda_1 y\big(x_1(v)\big) - \lambda_2 y\big(x_2(v)\big) \\
&= \lambda_1\Big(x_1\big(y(v)\big) - y\big(x_1(v)\big)\Big) + \lambda_2\Big(x_2\big(y(v)\big) - y\big(x_2(v)\big)\Big) \\
&= \lambda_1[x_1, y](v) + \lambda_2[x_2, y](v) \\
&= \big(\lambda_1[x_1, y] + \lambda_2[x_2, y]\big)(v)
\end{aligned}$$

となる．ただし 4 つ目の等号で $y \in \mathrm{End}\, V$ が線型写像であることを使った．全く同様にして

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2](v) = \mu_1[x, y_1] + \mu_2[x, y_2]$$

を示すこともできる．

(L-2) 明らかに $[x, x] = xx - xx = o$ なのでよい．

(L-3) $[\,,]$ の双線型（**(L-1)**）から

$$\begin{aligned}
&[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\
&= [x, yz] - [x, zy] + [y, zx] - [y, xz] + [z, xy] - [z, yx] \\
&= xyz - yzx - xzy + zyx + yzx - zxy - yxz + xzy + zxy - xyz - zyx + yxz \\
&= o.
\end{aligned}$$

■

この Lie 代数 $(\mathrm{End}\, V,\, +,\, \cdot\,,\, [\,,])$ は**一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ，記号として $\boldsymbol{\mathfrak{gl}(V)}$ と書かれる．

$\dim V =: n < \infty$ のとき，$\mathrm{End}\, V$ は $n \times n$ $\mathbb{K}$-行列全体が成す $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathrm{M}(n,\, \mathbb{K})$ と同型である[b]．$\mathrm{M}(n,\, \mathbb{K})$ を Lie ブラケット $[x, y] := xy - yx$ によって Lie 代数と見做す[c]ときは，この同型を意識して $\mathfrak{gl}(n,\, \mathbb{K})$ と書く．さて，$\mathfrak{gl}(n,\, \mathbb{K})$ の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$e_{ij} := \big[\,\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}\big]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

である．Einstein の規約を使って $e_{ij}e_{kl} = \left[\delta_{i\mu}\delta_{j\lambda}\delta_{k\lambda}\delta_{l\nu}\right]_{1\le\mu,\,\nu\le n} = \delta_{jk}\left[\delta_{i\mu}\delta_{l\nu}\right]_{1\le\mu,\,\nu\le n} = \delta_{jk}E_{il}$ と計算できるので，$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ の構造定数は

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

となる[d]．

---

[a] **自己準同型** (endomorphism) の略である．

[b] V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を 1 つ固定する．このとき同型写像 $\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ v^\mu e_\mu \longmapsto (v^\mu)_{1\le\mu\le n}$ を使って定義される線型写像 $\phi\colon \mathrm{End}\,V \longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K}),\ f \longmapsto \varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$ が所望の同型写像である．

[c] 右辺の xy は行列の積である．

[d] 少し紛らわしいかもしれないが，右辺において e_{il} は行列（行列の成分ではない！）で δ_{jk} はただの $\mathbb{K}$ の元である．以下では行列を指定する添字を $a, b, c, \ldots, i, j, k, \ldots$ で，行列の成分の添字を $\mu, \nu, \lambda, \ldots$ で書くことにする．つまり，例えば x_{ij} はある一つの行列を表す一方，$x_{ij\,\mu\nu}$ は行列 x_{ij} の第 $(\mu,\,\nu)$ 成分を表す．あまりにも紛らわしい場合には，行列の成分を表す際に $[x_{ij}]_{\mu\nu}$ のように角括弧で括ることにする．

1.1.1　線型 Lie 代数

定義 1.1.1: 部分 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ が**部分 Lie 代数**であるとは，$\mathfrak{h}$ が Lie ブラケットについても閉じていることを言う．i.e. $\forall x,\,y\in\mathfrak{h},\ \forall\lambda\in\mathbb{K}$ に対して

$$x+y,\ \lambda x,\ [x,y]\in\mathfrak{h}$$

が成り立つこと．

この小節では以降，V を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．

定義 1.1.2: 線型 Lie 代数

一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数のことを**線型 Lie 代数** (linear Lie algebra) と呼ぶ．

線型 Lie 代数として有名なものは**古典代数** (classical algebra) である．これは $A_l,\,B_l,\,C_l,\,D_l$ と呼ばれる 4 つの無限系列からなる．以下，$\mathrm{char}\,\mathbb{K}\neq 2$ とする．

【例 1.1.3】線型 Lie 代数：A_l 型

$\dim V = l+1$ とする．**特殊線形代数** $\mathfrak{sl}(V)$（または $\mathfrak{sl}(l+1,\,\mathbb{K})$）は次のように定義される：

$$\mathfrak{sl}(V) \coloneqq \left\{\, x\in\mathfrak{gl}(V) \,\middle|\, \mathrm{Tr}(x)=0 \,\right\}$$

$\mathfrak{sl}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう．

証明 $\forall x,\, y \in \mathfrak{sl}(V)$ をとる．トレースの線形性および $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$ から

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(x+y) &= \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y) = 0 + 0 = 0, \\ \mathrm{Tr}(\lambda x) &= \lambda \,\mathrm{Tr}(x) = \lambda 0 = 0, \\ \mathrm{Tr}([x,y]) &= \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(yx) = \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(xy) = 0 \end{aligned}$$

が言えるので，$x+y,\, \lambda x,\, [x,y] \in \mathfrak{sl}(V)$ が言えた． ■

【例 1.1.2】で使った $\mathfrak{gl}(l+1,\, \mathbb{K})$ の標準的な基底で $\forall x \in \mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K})$ を $x = x^{ij} e_{ij}$ と展開すると，トレースレスであることから

$$h_{ij} \coloneqq \begin{cases} e_{ij} & i \neq j,\ 1 \leq i,\, j \leq l+1 \\ e_{ii} - e_{i+1,\, i+1} & 1 \leq i = j \leq l \end{cases}$$

の $(l+1)^2-1$ 個の行列が $\mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K})$ の基底を成すことがわかる．従って $\dim \mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K}) = (l+1)^2-1$ である．

【例 1.1.4】線型 Lie 代数：B_l 型

$\dim V = 2l+1$ とする．行列

$$s \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_l \\ 0 & \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l+1,\, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化[a]かつ対称な双線型形式を f と書く[b]．このとき，**直交代数** (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$（または $\mathfrak{o}(2l+1,\, \mathbb{K})$）が以下のように定義される：

$$\mathfrak{o}(V) \coloneqq \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; f\bigl(x(v),\, w\bigr) = -f\bigl(v,\, x(w)\bigr),\ \forall v,\, w \in V \,\right\}$$

$\mathfrak{o}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう．

証明 $\forall x,\, y \in \mathfrak{o}(V)$ をとる．f の双線型性から $\forall v,\, w \in V$ に対して

$$\begin{aligned} f\bigl((x+y)(v),\, w\bigr) &= f\bigl(x(v),\, w\bigr) + f\bigl(y(v),\, w\bigr) \\ &= -f\bigl(v,\, x(w)\bigr) - f\bigl(v,\, y(w)\bigr) \\ &= -f\bigl(v,\, x(w) + y(w)\bigr) \\ &= -f\bigl(v,\, (x+y)(w)\bigr) \\ f\bigl((\lambda x)(v),\, w\bigr) &= \lambda f\bigl(x(v),\, w\bigr) \\ &= -\lambda f\bigl(v,\, x(w)\bigr) \\ &= -f\bigl(v,\, \lambda x(w)\bigr) \\ &= -f\bigl(v,\, (\lambda x)(w)\bigr) \\ f\bigl([x,y](v),\, w\bigr) &= f\bigl(x(y(v)),\, w\bigr) - f\bigl(y(x(v)),\, w\bigr) \\ &= -f\bigl(y(v),\, x(w)\bigr) + f\bigl(x(v),\, y(w)\bigr) \\ &= f\bigl(v,\, y(x(w))\bigr) - f\bigl(v,\, x(y(w))\bigr) \\ &= -f\bigl(v,\, [x,y](w)\bigr) \end{aligned}$$

が言えるので，$x+y,\ \lambda x,\ [x, y] \in \mathfrak{o}(V)$ が言えた． ■

---

[a]「$v \in V$ が $\forall w \in V$ に対して $f(v,\, w)=0$ を充たす $\implies$ $v=o$」かつ「$w \in V$ が $\forall v \in V$ に対して $f(v,\, w)=0$ を充たす $\implies$ $w=o$」

[b] $f\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{K},\ (v,\, w) \longmapsto v^{\mathsf{T}} s w$ のこと．

【例 1.1.5】線型 Lie 代数：C_l 型

$\dim V = 2l$ とする．行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_l \\ -\mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l,\, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ歪対称な双線型形式を f と書く．このとき，**シンプレクティック代数** (symplectic algebra) $\mathfrak{sp}(V)$（または $\mathfrak{sp}(2l,\, \mathbb{K})$）が以下のように定義される：

$$\mathfrak{sp}(V) := \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; f\bigl(x(v),\, w\bigr) = -f\bigl(v,\, x(w)\bigr),\ \forall v,\, w \in V \,\right\}$$

【例 1.1.4】と全く同様にして $\mathfrak{sp}(V)$ が線型 Lie 代数であることを証明できる．

【例 1.1.6】線型 Lie 代数：D_l 型

$\dim V = 2l$ とし，行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_l \\ \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l,\, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ対称な双線型形式を f と書く．このとき，【例 1.1.4】と全く同様に**直交代数** (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$（または $\mathfrak{o}(2l,\, \mathbb{K})$）が定義される．

さらに，古典代数以外の線型 Lie 代数をいくつか導入する．

【例 1.1.7】線型 Lie 代数：$\mathfrak{t}$

$n \times n$ 上三角行列全体の集合を $\mathfrak{t}(n,\, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\, \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{t}(n,\, \mathbb{K}) := \left\{\, \bigl[\, a_{\mu\nu} \,\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} \in \mathfrak{gl}(n,\, \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu > \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \,\right\}$$

$\mathfrak{t}(n,\, \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることを確認しよう．

<u>**証明**</u> $\forall x = \bigl[\, x_{\mu\nu} \,\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le n},\ y = \bigl[\, y_{\mu\nu} \,\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} \in \mathfrak{t}(n,\, \mathbb{K})$ をとる．このとき $1 \le \nu < \mu \le n$ なる全ての $(\mu,\, \nu)$ に対して

$$\begin{aligned} [x+y]_{\mu\nu} &= x_{\mu\nu} + y_{\mu\nu} = 0 + 0 = 0 \\ [\lambda x]_{\mu\nu} &= \lambda x_{\mu\nu} = \lambda 0 = 0 \\ [xy]_{\mu\nu} &= \sum_{\lambda=1}^{n} x_{\mu\lambda} y_{\lambda\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} 0 y_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda=\nu+1}^{n} x_{\mu\lambda} 0 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つので $x+y,\ \lambda x,\ [x,y] \in \mathfrak{t}(n,\ \mathbb{K})$ が言えた. ■

---

[a] $\mathfrak{t}$ の LaTeX コマンドは `\mathfrak{t}`

【例 1.1.8】線型 Lie 代数：$\mathfrak{n}$

$n \times n$ 上三角行列のうち対角成分が全て 0 であるもの全体がなす集合を $\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K}) := \left\{ \left[a_{\mu\nu} \right]_{1\le\mu,\,\nu\le n} \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu \geq \nu \quad \Longrightarrow \quad a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることは【例 1.1.7】と全く同様に証明できる.

---

[a] $\mathfrak{n}$ の LaTeX コマンドは `\mathfrak{n}`

【例 1.1.9】線型 Lie 代数：$\mathfrak{d}$

$n \times n$ 対角行列全体がなす集合を $\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K}) := \left\{ \left[a_{\mu\nu} \right]_{1\le\mu,\,\nu\le n} \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu \neq \nu \quad \Longrightarrow \quad a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K})$ は明らかに線型 Lie 代数である.

---

[a] $\mathfrak{d}$ の LaTeX コマンドは `\mathfrak{d}`

公理 1.1.2: 代数

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{U}$[a]の上に二項演算

$$*\colon \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U},\ (x,\ y) \longmapsto x * y$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，$\mathfrak{U}$ は **$\mathbb{K}$-代数** ($\mathbb{K}$-algebra) と呼ばれる[b]：

(A-1) $*$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\ x_i,\ y,\ y_i \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\ 2)$ に対して

$$\begin{aligned}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) * y &= \lambda_1 x_1 * y + \lambda_2 x_2 * y, \\ x * (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= \mu_1 x * y_1 + \mu_2 x * y_2\end{aligned}$$

が成り立つ.

---

[a] `\mathfrak{U}`
[b] 結合律は要請しない！ $*$ に関する結合律を公理に含める場合は**結合代数** (associative algebra) と言う．文献によっては代数と言って結合代数のことを指す場合があるので注意.

Lie 代数は $\mathbb{K}$-代数である.

定義 1.1.3: 代数の微分

$\mathbb{K}$-代数 $\mathfrak{U}$ の**微分** (derivation) とは，線型写像

$$d\colon \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

であって Leibniz 則

$$d(x * y) = x * d(y) + d(x) * y$$

を充たすもののこと．

全ての $\mathfrak{U}$ の微分がなす集合を $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ と書く．

命題 1.1.1: 代数の微分がなす Lie 代数

$\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ の上の加法，スカラー乗法，Lie ブラケットをそれぞれ

$$\begin{aligned} +\colon\ \operatorname{Der}\mathfrak{U} \times \operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (d,\ e) \longmapsto \bigl(x \mapsto d(x) + e(x)\bigr) \\ \cdot\ \colon \mathbb{K} \times \operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (\lambda,\ d) \longmapsto \bigl(x \mapsto \lambda d(x)\bigr) \\ [\ ,]\colon\ \operatorname{Der}\mathfrak{U} \times \operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (d,\ e) \longmapsto \bigl(x \mapsto d(e(x)) - e(d(x))\bigr) \end{aligned}$$

と定義すると，組 $(\operatorname{Der}\mathfrak{U},\ +,\ \cdot\ ,\ [\ ,])$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$ の部分 Lie 代数である．Lie 代数としての $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ のことを**微分代数** (derivation algebra) と呼ぶ[a]．

[a] https://mathworld.wolfram.com/DerivationAlgebra.html

証明 $\forall x,\ y \in \mathfrak{U}$ をとる．代数の微分は線型写像なので，$*$ の双線型性および微分の Leibniz 則から

$$\begin{aligned} (d+e)(x*y) &= x*d(y) + d(x)*y + x*e(y) + e(x)*y = x*(d+e)(y) + (d+e)(x)*y \\ (\lambda d)(x*y) &= \lambda\bigl(d(x)*y + x*d(y)\bigr) = \bigl(\lambda d(x)\bigr)*y + x*\bigl(\lambda d(y)\bigr) = (\lambda d)(x)*y + x*(\lambda d)(y) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $d+e,\ \lambda d \in \operatorname{Der}\mathfrak{U}$ が言えた．Lie ブラケットに関しては，

$$d\bigl(e(x*y)\bigr) = d\bigl(x*e(y) + e(x)*y\bigr) = x*d\bigl(e(y)\bigr) + d(x)*e(y) + e(x)*d(y) + d\bigl(e(x)\bigr)*y$$

に注意すると

$$\begin{aligned} [d,e](x*y) &= x*d\bigl(e(y)\bigr) + \cancel{d(x)*e(y) + e(x)*d(y)} + d\bigl(e(x)\bigr)*y \\ &\quad - x*e\bigl(d(y)\bigr) \cancel{- e(x)*d(y) - d(x)*e(y)} - e\bigl(d(x)\bigr)*y \\ &= x*[d,e](y) + [d,e](x)*y \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $[d,e] \in \operatorname{Der}\mathfrak{U}$ が言えた． ■

【例 1.1.10】内部微分

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{K}$-代数なので，その微分代数 $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ を考えることができる．

ここで $x \in \mathfrak{g}$ を任意に取ろう．このとき，写像

$$\operatorname{ad} x \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ z \longmapsto [x, z]$$

は線型写像で，Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} \operatorname{ad} x([z, w]) &= [x, [z, w]] \\ &= [[x, z], w] + [z, [x, w]] \\ &= [\operatorname{ad} x(z), w] + [z, \operatorname{ad} x(w)] \end{aligned}$$

を充たすことがわかる．これはまさに Leibniz 則なので，$\operatorname{ad} x \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ である．$\operatorname{ad} x$ の形で書ける $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ の元のことを**内部微分** (inner derivation) と呼ぶ[a]．

[a] $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ の元が内部微分でないとき，**外部微分** (outer derivation) であると言う．

1.1.2　イデアル・商代数

定義 1.1.4: Lie 代数のイデアル

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{i}$ [a]が $\mathfrak{g}$ の**イデアル** (ideal) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(LI-1)　$\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間である．

(LI-2)　$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall y \in \mathfrak{i}$ に対して $[x, y] \in \mathfrak{i}$

[a] `\mathfrak{i}`

【例 1.1.11】自明なイデアル

$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, o] = [x, x + (-x)] = [x, x] - [x, x] = o$ が成り立つので，$\{o\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．また，Lie ブラケットについて閉じているので $\mathfrak{g}$ 自身もイデアルである．この 2 つを**自明なイデアル** (trivial ideal) と呼ぶ．

【例 1.1.12】中心

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**中心** (center) は

$$Z(\mathfrak{g}) := \left\{ z \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall x \in \mathfrak{g},\ [x, z] = o \right\}$$

と定義される．$o \in Z(\mathfrak{g})$ であることから $Z(\mathfrak{g})$ はイデアルである．$\mathfrak{g}$ が Lie ブラケットに関して可換である必要十分条件は $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ が成り立つことである[a]．

[a] Lie 代数の公理 **(L'-1)** より，$[x, y] = [y, x]$ ならば $[x, y] = -[x, y] \iff [x, y] = o$ である．

補題 1.1.1: イデアル同士の演算

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える．このとき以下の 3 つが成り立つ：

(1) 集合 $\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) 集合 $\mathfrak{i}+\mathfrak{j} \coloneqq \left\{ x+y \mid x\in\mathfrak{i},\ y\in\mathfrak{j} \right\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(3) 集合 $[\mathfrak{i},\mathfrak{j}] \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \mid x_i\in\mathfrak{i},\ y_i\in\mathfrak{j};\ n<\infty \right\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

証明 (1) ほぼ自明．

(2) $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ の勝手な元 $z+w$ と $\forall x\in\mathfrak{g}$ をとる．Lie ブラケットの双線型性から $[x, z+w] = [x,z]+[x,w]$ が言えるが，$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x,z]\in\mathfrak{i}$, $[x,w]\in\mathfrak{j}$ なので右辺は $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ に属する．

(3) $\forall x\in\mathfrak{g}$ を 1 つとる．Lie ブラケットの双線型性から，このとき $\forall z\in\mathfrak{i}$, $\forall w\in\mathfrak{j}$ に対して $[x,[z,w]]\in[\mathfrak{i},\mathfrak{j}]$ が成り立つことを示せば良い．実際，Lie 代数の公理 **(L-2)**, **(L-3)** より

$$[x,[z,w]] = [[w,x],z]+[[x,z],w] = [z,[x,w]]+[[x,z],w]$$

が言えるが，$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x,w]\in\mathfrak{j}$, $[x,z]\in\mathfrak{i}$ なので右辺は $[\mathfrak{i},\mathfrak{j}]$ に属する．

■

【例 1.1.13】導来 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**導来代数** (derived algebra) とは，$\mathfrak{g}$ のイデアル $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ のこと．

定義 1.1.5: 単純 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**単純** (simple) であるとは，$\mathfrak{g}$ が自明なイデアル以外のイデアルを持たず，かつ $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\neq\{o\}$ を充たすことを言う．

【例 1.1.14】単純 Lie 代数：$\mathfrak{sl}(2)$

$\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 2$ とする．【例 1.1.3】に倣って $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の基底を

$$x \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とする．この基底同士の Lie ブラケットは

$$[x,y]=h, \qquad [h,x]=2x, \qquad [h,y]=-2y \tag{1.1.1}$$

と計算できる．よって $[\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}),\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})]=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})\neq\{o\}$ である．

ここで $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の任意のイデアル $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ をとる．$\mathfrak{i}\neq 0$ ならば $ax+by+ch\in\mathfrak{i}\setminus\{o\}$ が存在し，

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(x)\circ\operatorname{ad}(x)(ax+by+ch) &= [x,[x,ax+by+ch]] = -2bx\in\mathfrak{i}, \\
\operatorname{ad}(y)\circ\operatorname{ad}(y)(ax+by+ch) &= [y,[y,ax+by+ch]] = -2ay\in\mathfrak{i}
\end{aligned}$$

が成り立つ．故にもし $(a,b)\neq(0,0)$ ならば $x\in\mathfrak{i}$ または $y\in\mathfrak{i}$ だが[a]，イデアルの定義と (1.1.1) か

ら $\mathfrak{i}=\mathfrak{sl}(2,\,\mathbb{K})$ が言える．もし $(a,\,b)=(0,0)$ ならば $ch\in\mathfrak{sl}(2,\,\mathbb{K})\setminus\{o\}$ だが，このときもイデアルの定義と (1.1.1) から $x,\,y\in\mathfrak{sl}(2,\,\mathbb{K})$ が従う．i.e. $\mathfrak{sl}(2,\,\mathbb{K})$ は単純 Lie 代数である．

[a] $\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 2$ なので $2\neq 0$.

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}$ が与えられたとき，商群のときと同じ要領で商代数を構成できる．このことを復習しよう：

$\mathfrak{g}$ 上の同値関係を

$$\sim\,:=\left\{\,(x,\,y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\,\middle|\,x-y\in\mathfrak{i}\,\right\}$$

と定義する[*4]．$\sim$ による $x\in\mathfrak{g}$ の同値類のことを $x+\mathfrak{i}$ と書き，商集合 $\mathfrak{g}/\!\sim$ のことを $\boldsymbol{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}}$ と書く．全射 $p\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ を**標準的射影** (canonical projection) と呼ぶ．

定義 1.1.6: 商代数

集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の上には次のようにして well-defined な加法，スカラー乗法，Lie ブラケットが定義できる：

$$\begin{aligned}
+\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{i}&\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (x+\mathfrak{i},\,y+\mathfrak{i})\longmapsto(x+y)+\mathfrak{i}\\
\cdot\,\colon \mathbb{K}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{i}&\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (\lambda,\,x+\mathfrak{i})\longmapsto(\lambda x)+\mathfrak{i}\\
[\,,]\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{i}&\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (x+\mathfrak{i},\,y+\mathfrak{i})\longmapsto[x,y]+\mathfrak{i}
\end{aligned}$$

Lie 代数 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i},\,+,\,\cdot\,,\,[\,,])$ のことを**商代数** (quotient algebra) と呼ぶ．

<u>**証明**</u> well-definedness を示す．$x+\mathfrak{i}=x'+\mathfrak{i},\,y+\mathfrak{i}=y'+\mathfrak{i}$ ならば $x'-x,\,y'-y\in\mathfrak{i}$ であるから

$$\begin{aligned}
x'+y'&=(x+y)+(x'-x)+(y'-y)\in(x+y)+\mathfrak{i},\\
\lambda x'&=\lambda x+\lambda(x'-x)\in(\lambda x)+\mathfrak{i}
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，$\mathfrak{i}$ がイデアルであることにより

$$\begin{aligned}
[x',y']&=[x+(x'-x),y+(y'-y)]\\
&=[x,y]+[x,y'-y]-[y,x'-x]+[x'-x,y'-y]\\
&\in[x,y]+\mathfrak{i}
\end{aligned}$$

が言える． ■

!

定義 1.1.6 による商代数の構成によって，標準的射影は自動的に Lie 代数の準同型写像になる：

$$\begin{aligned}
p(x+y)&=(x+y)+\mathfrak{i}=:(x+\mathfrak{i})+(y+\mathfrak{i})=p(x)+p(y),\\
p(\lambda x)&=(\lambda x)+\mathfrak{i}=:\lambda(x+\mathfrak{i})=\lambda p(x),\\
p([x,y])&=[x,y]+\mathfrak{i}=:[(x+\mathfrak{i}),(y+\mathfrak{i})]=[p(x),p(y)].
\end{aligned}$$

[*4] **(LI-1)** より $\mathfrak{i}$ は部分ベクトル空間なので反射律と対称律が言える．$x\sim y$ かつ $y\sim z$ ならば $x-z=(x-y)+(y-z)\in\mathfrak{i}$ なので $x\sim z$ であり，推移律が成り立つことがわかる．

定義 1.1.7: 正規化代数・中心化代数

- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその部分 Lie 代数（もしくは部分ベクトル空間）$\mathfrak{h}$ を与える．このとき $\mathfrak{h}$ の**正規化代数** (normalizer) を

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall h \in \mathfrak{h},\ [x, h] \in \mathfrak{h} \right\}$$

で定義する[a]．特に $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ のとき，$\mathfrak{h}$ は **self-normalizing** であると言う．
- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその部分集合 X を与える．このとき X の**中心化代数** (centralizer) を

$$C_{\mathfrak{g}}(X) := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall z \in X,\ [x, z] = o \right\}$$

と定義する[b]．

[a] $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である：$\forall x,\ y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ に対して，Jacobi 恒等式から $\forall z \in \mathfrak{h}$，$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \in \mathfrak{h}$ が言える．さらに，もし $\mathfrak{h}$ が部分 Lie 代数ならば，定義から $\mathfrak{h}$ を $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の部分ベクトル空間と見做したときに $\mathfrak{h}$ は自動的にイデアルになる．特に，$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h} \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ をイデアルとして持つ最大の部分 Lie 代数である．

[b] $C_{\mathfrak{g}}(X)$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であることは，$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ のときと全く同様にして示される．

【例 1.1.12】を思い出すと，$Z(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ である．

1.1.3 準同型・表現

定義 1.1.8: Lie 代数の準同型

2 つの Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を与える．写像 $f \colon \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ が **Lie 代数の準同型** (homomorphism) であるとは，f が和，スカラー乗法，Lie ブラケットの全てを保存することを言う．i.e. $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}$，$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x), \\ f([x, y]) &= [f(x), f(y)] \end{aligned}$$

が成り立つこと．

全単射な Lie 代数の準同型のことを Lie 代数の**同型** (isomorphism) と呼ぶ．

Lie 代数の準同型 $f \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ の**核** (kernel), **像** (image) をそれぞれ

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &:= \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; f(x) = o \right\}, \\ \operatorname{Im} f &:= \left\{ f(x) \in \mathfrak{h} \;\middle|\; x \in \mathfrak{g} \right\} \end{aligned}$$

と定義すると $\operatorname{Ker} f$ はイデアルであり[*5]，$\operatorname{Im} f$ は部分 Lie 代数である[*6]．

[*5] $\forall x,\ y \in \operatorname{Ker} f$ に対して $f(x + y) = f(x) + f(y) = o + o = o$，$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda o = o$ なので部分ベクトル空間，かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して $f([z, x]) = [f(z), f(x)] = [f(z), o] = o$．

[*6] $\forall f(x),\ f(y) \in \operatorname{Im} f$ に対して $f(x) + f(y) = f(x + y)$，$\lambda f(x) = f(\lambda x)$; $[f(x), f(y)] = f([x, y])$

命題 1.1.2: 準同型定理

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ およびそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える．このとき，任意のLie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ に対して[a]以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$．また，$\mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ が成り立つならば，以下の図式を可換にする Lie 代数の準同型 $\overline{f}\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{h}$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \forall\mathfrak{h} \\
& \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

図 1.1: 商代数の普遍性．p は標準的射影 $p\colon x \longmapsto x + \mathfrak{i}$ を表す．

(2) $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ が成り立つとする．このとき $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであり，自然な同型 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ が成り立つ．

(3) 自然な同型 $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j})$ が成り立つ．

[a] わざわざこのような記述をしたのは，(1) が商代数の**普遍性** (universal property) を意味していることを明示するためである．

<u>証明</u> (1) まず，$\mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ ならば写像 $\overline{f}\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \operatorname{Im} f,\ x + \mathfrak{i} \longmapsto f(x)$ が well-defined な Lie 代数の準同型であることを示す．実際 $x + \mathfrak{i} = x' + \mathfrak{i}$ ならば $x' - x \in \mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ であり，$\overline{f}(x' + \mathfrak{i}) = f(x') = f\bigl(x + (x' - x)\bigr) = f(x) + f(x' - x) = f(x) = \overline{f}(x + \mathfrak{i})$ が言えた．$\overline{f}$ が Lie 代数の準同型であることは f が Lie 代数の準同型であることから明らか．定義から $\overline{f} \circ p = f$ である．

次に $\overline{f}$ の一意性を示す．別の $\phi\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{h}$ が存在して $\phi \circ p = f$ が成り立つとする．このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x + \iota) = f(x)$ が成り立つので $\phi = \overline{f}$ である．

特に $\mathfrak{i} = \operatorname{Ker} f$ ならば，$\operatorname{Ker} \overline{f} = \{\operatorname{Ker} f\} = \{o\}$ なので $\overline{f}$ は単射であり $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$ が言えた．

(2) $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ のとき，イデアルの定義より $\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{j}$ のイデアルでもある．よって商代数 $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は well-defined．明らかに $\mathfrak{j}/\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ なので $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の部分 Lie 代数だと分かった．ここで $\forall x + \mathfrak{i} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ \forall y + \mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ をとると，$\mathfrak{j}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることから $[x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}] = [x, y] + \mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が従う[*7]．以上の議論から $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであることが示された．

さて，Lie 代数の全射準同型 $f\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{j},\ x + \mathfrak{i} \longmapsto x + \mathfrak{j}$ は仮定より well-defined で[*8]，かつ $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ である．従って (1) より $\mathfrak{g}/\mathfrak{j} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$ が言える．

(3) Lie 代数の全射準同型 $f\colon \mathfrak{i} \longrightarrow (\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j},\ x \longmapsto x + \mathfrak{j}$ に対して $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}$ である．従って (1) より $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j})$ が言える．

■

[*7] $[x, y] \in \mathfrak{j}$ なので．

[*8] $x + \mathfrak{i} = x' + \mathfrak{i} \implies x' - x \in \mathfrak{i} \subset \mathfrak{j} \implies f(x' + \mathfrak{i}) = (x + (x' - x)) + \mathfrak{j} = x + \mathfrak{j} = f(x + \mathfrak{i})$

定義 1.1.9: Lie 代数の表現

V を $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．Lie 代数の準同型

$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

と V の組 $(\phi,\, V)$ のことを **Lie 代数の表現** (representation) と呼ぶ[a]．

[a] 「代数の表現」と言われたとき，代数**の表現**なのか**結合代数の表現**なのか **Lie 代数の表現**なのか文脈で判断しなくてはならないかもしれない．

【例 1.1.15】随伴表現

【例 1.1.10】で定義した $\mathrm{ad}(x)$ は，写像

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\; x \longmapsto \bigl(z \mapsto [x, z]\bigr)$$

だと思うことができる．ad は明らかに線型写像で，かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y](z) &= \mathrm{ad}\, x([y, z]) - \mathrm{ad}\, y([x, z]) \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\
&= [[x, y], z] \\
&= \mathrm{ad}\, [x, y](z)
\end{aligned}$$

が成り立つので Lie 代数の準同型である．故に組 $(\mathrm{ad},\, \mathfrak{g})$ は Lie 代数の表現である．

$$x \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in \mathfrak{g},\; [x, y] = o$$

より，**【例 1.1.12】**を思い出すと $\mathrm{Ker}\, \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g})$ と分かる．特に単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して $Z(\mathfrak{g}) = \{o\}$ なので ad は単射準同型である．i.e. 任意の単純 Lie 代数は線形 Lie 代数と同型である[a]．

[a] 単射準同型は包含準同型だと見做せる．

1.1.4 自己同型

定義 1.1.10: 自己同型

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．写像 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ が **Lie 代数の同型** (automorphism) であるとは，f が Lie 代数の準同型であることを言う．
Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の自己同型の集合を $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ と書き，写像の合成とする群をなす．

定義 1.1.11: 内部自己同型

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．自己同型 $f \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が**内部** (inner) であるとは，ある $x \in \mathfrak{g}$ とある $\mathfrak{g}$ を誘導するような Lie 群の随伴表現 Ad が存在し，

$$f = \mathrm{Ad}(\exp(x))$$

と書けることを言う?
Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の内部自己同型の集合を $\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}$ と書き，自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ の部分群をなす．

1.1.5 可解 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．$D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とおくと，【例 **1.1.13**】より $D\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

定義 1.1.12: 可解 Lie 代数

導来列 (derived series) とは，イデアルの減少列

$$\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \cdots$$

のこと．ある $n > 0$ に対して導来列が初めてゼロになって止まるとき，i.e. $D^n\mathfrak{g} = \{o\}$ が成り立つとき，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は**可解** (solvable) であると言われる．

命題 1.1.3:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ および Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ は可解である．また，$\mathrm{Im}\,f$ も可解である．
(2) $\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ について商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も可解である．
(3) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}$ と商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ がどちらも可解ならば，$\mathfrak{g}$ 自身も可解である．
(4) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ が可解ならば，イデアル $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ も可解である．

<u>証明</u> (1) 仮定より $\mathfrak{g}$ が可解なので，ある $n > 0$ に対して $D^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ならば $D\mathfrak{a} \subset D\mathfrak{g}$ であるから，帰納的に $D^i\mathfrak{a} \subset D^i\mathfrak{g}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ が分かる．よって $D^n\mathfrak{a} = \{o\}$ である．また，f が Lie 代数の準同型であることから $f(D\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\mathrm{Im}\,f, \mathrm{Im}\,f] = D(\mathrm{Im}\,f)$ であり，帰納的に $f(D^i\mathfrak{g}) = D^i(\mathrm{Im}\,f)$ が分かる．故に $D^n(\mathrm{Im}\,f) = f(\{o\}) = \{o\}$ である．

(2) 標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a},\ x \longmapsto x + \mathfrak{a}$ に対して (1) を適用すれば良い．

(3) 仮定より $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ が可解なので，ある $n > 0$ に対して $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \{o\}$ と成る．標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ について，(1) の証明から $\{o\} = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = D^n(\mathrm{Im}\,p) = p(D^n\mathfrak{g})$ がわかる．従って $D^n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{i}$ である．仮定より $\mathfrak{i}$ も可解だからある $m > 0$ に対して $D^m\mathfrak{i} = \{o\}$ となる．故に帰納的に $D^{n+m}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{i}^m = \{o\}$ が示される．

(4) 準同型定理-(3) より

$$(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$$

が成り立つ．仮定より $\mathfrak{i}$ は可解なので，(2) より右辺も可解．よって (3) より $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ も可解である．

■

$\mathfrak{g}$ を有限次元Lie 代数とし，$\mathfrak{r}$ [*9]を $\mathfrak{g}$ の極大[*10]可解イデアルとしよう[*11]

補題 1.1.2:

$\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ の全ての可解イデアルを含む．i.e. 最大 (maximal) の可解イデアルである．

証明 任意の $\mathfrak{g}$ の可解イデアル $\mathfrak{i}$ をとる．準同型定理-(3) より

$$(\mathfrak{i}+\mathfrak{r})/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{r}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{r})$$

が成り立つ．$\mathfrak{r}$ は可解なので命題 1.1.3-(1) より $\mathfrak{r}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{r})$ は可解であり，従って $(\mathfrak{i}+\mathfrak{r})/\mathfrak{i}$ も可解である．$\mathfrak{i}$ も可解なので命題 1.1.3-(3) より $\mathfrak{i}+\mathfrak{r}$ も可解である．然るに，$\mathfrak{r}$ の極大性により $\mathfrak{i}+\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ であるから $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{r}$ が言えた．■

定義 1.1.13: 根基

$\mathfrak{g}$ の最大可解イデアル[a] (maximal solvable ideal) $\mathfrak{r}$ のことを $\mathfrak{g}$ の**根基** (radical) と呼び，$\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ と書く．

[a] 補題 1.1.2 によりこれは一意的に存在する．

定義 1.1.14: 半単純 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，$\operatorname{rad}\mathfrak{g}=\{o\}$ であることを言う．

1.1.6 冪零 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して

$$C^0\mathfrak{g} := \mathfrak{g},$$
$$C^n\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, C^{n-1}\mathfrak{g}]$$

のように帰納的にイデアルの減少列

$$\mathfrak{g} = C^0\mathfrak{g} \supset C^1\mathfrak{g} \supset C^2\mathfrak{g} \supset \cdots \tag{1.1.2}$$

を定義する．

[*9] \mathfrak{r}
[*10] $\mathfrak{r}\subsetneq\mathfrak{i}\subset\mathfrak{g}$ を充たす $\mathfrak{g}$ の可解イデアル $\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{g}$ 以外に存在しない．
[*11] $\mathfrak{r}$ は少なくとも 1 つ存在する．$\mathfrak{g}$ が有限次元なので，$\mathfrak{g}$ の可解イデアルのうち次元が最大のものを取れば良い．

定義 1.1.15: 冪零 Lie 代数

イデアルの減少列 (1.1.2) がある $n > 0$ に対して初めてゼロになって止まるとき，i.e. $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ が成り立つとき，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は**冪零** (nilpotent) であると言われる．

線型写像 $x\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ の冪零性との混同を避けるため，定義 1.1.15 の意味で冪零と言う場合は冪零 Lie 代数と言うことにする．

命題 1.1.4:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ および Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ は冪零 Lie 代数である．また，$\mathrm{Im}\, f$ も冪零 Lie 代数である．

(2) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数ならば，$\mathfrak{g}$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ について商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も冪零 Lie 代数である．

(3) $\mathfrak{g}$ の中心による商代数 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ が冪零 Lie 代数ならば $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数である．

(4) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数かつ $\mathfrak{g} \neq \{o\}$ ならば，$Z(\mathfrak{g}) \neq \{o\}$ である．

(5) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数ならば，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, x$ は冪零である．

証明 (1) 仮定より $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ならば $C\mathfrak{a} \subset C\mathfrak{g}$ であるから，帰納的に $C^i\mathfrak{a} \subset C^i\mathfrak{g}$ $(i = 0, 1, \dots)$ が分かる．よって $C^n\mathfrak{a} = \{o\}$ である．また，f が Lie 代数の準同型であることから $f(C\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Im}\, f] = C(\mathrm{Im}\, f)$ であり，帰納的に $f(C^i\mathfrak{g}) = C^i(\mathrm{Im}\, f)$ が分かる．故に $C^n(\mathrm{Im}\, f) = f(\{o\}) = \{o\}$ である．

(2) 標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a},\ x \longmapsto x + \mathfrak{a}$ に対して (1) を適用すれば良い．

(3) 仮定より $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = \{o\}$ と成る．標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ について，(1) の証明から $\{o\} = C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = C^n(\mathrm{Im}\, p) = p(C^n\mathfrak{g})$ がわかる．従って $C^n\mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$ である．故に中心の定義から $C^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = \{o\}$ が示された．

(4) 仮定より $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^{n-1}\mathfrak{g} \neq \{o\}$ かつ $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．このとき $\{o\} = C^n\mathfrak{g} = \left[\mathfrak{g}, C^{n-1}\mathfrak{g}\right]$ なので中心の定義から $\{o\} \neq C^{n-1}\mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$ が言える．

(5) 仮定より $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して随伴表現 $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ を考える．$\mathrm{ad}(x)(C^i\mathfrak{g}) = \left[x, C^i\mathfrak{g}\right] \subset \left[\mathfrak{g}, C^i\mathfrak{g}\right] = C^{i+1}\mathfrak{g}$ なので，イデアルの減少列 (1.1.2) に $\mathrm{ad}(x)$ を作用させると

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}(x)} C^1\mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}(x)} \cdots \xrightarrow{\mathrm{ad}(x)} C^n\mathfrak{g} = \{o\}$$

となる．i.e. $\forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\bigl(\mathrm{ad}(x)\bigr)^n = 0$ である．

■

1.1.7 Engel の定理

補題 1.1.3: ad の冪零性

$x \in \mathfrak{gl}(V)$ が冪零ならば $\mathrm{ad}\, x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ も冪零である．

証明 x が冪零であるという仮定から，$x^n = 0$ を充たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する．

さて，x による左移動と右移動をそれぞれ

$$\lambda_x \colon \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ y \longmapsto \bigl(v \mapsto x(y(v))\bigr),$$
$$\rho_x \colon \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ y \longmapsto \bigl(v \mapsto y(x(v))\bigr)$$

と定義しよう．$\forall y \in \mathfrak{gl}(V)$ を 1 つとると

$$(\lambda_x)^n(y) = x^n y = 0, \qquad (\rho_x)^n(y) = yx^n = 0 \tag{1.1.3}$$

が成り立つ．さらに $\rho_x(\lambda_x(y)) = xyx = \lambda_x(\rho_x(y))$ が成り立つ．i.e. $\rho_x\lambda_x = \lambda_x\rho_x$ である．従って二項定理が使えて[*12]，(1.1.3) から

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\, x)^{2n-1} &= (\lambda_x - \rho_x)^{2n-1}\\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1}(\lambda_x)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} 0 (\lambda_x)^k + \sum_{k=n}^{2n} -1 \binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

が言えた． ■

補題 1.1.4:

$V \neq \{o\}$ を有限次元ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をとる．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ が冪零ならば，ある $v \in V \setminus \{o\}$ が存在して $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $x(v) = o$ が成り立つ．

証明 $\dim \mathfrak{g}$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim \mathfrak{g} = 0$ のときは $\mathfrak{g} = \{0\}$ なので自明．

$\dim \mathfrak{g} > 0$ とし，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ を任意に 1 つとる．

$\mathfrak{h} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ であること

補題 1.1.3 より，$\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の[*13]像の全ての元は冪零である[*14]．ここで $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の Lie ブラケットを忘れて $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と見做したとき，商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を構成できる[*15]．このとき，$\forall x \in \mathfrak{h}$ に対して写像

$$\overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}(x) \colon \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h},\ y + \mathfrak{h} \longmapsto \mathrm{ad}(x)(y) + \mathfrak{h}$$

[*12] 写像の合成の結合律を暗に使っている．
[*13] $\mathrm{ad} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ への制限．
[*14] 仮定より $\forall x \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が冪零なので．
[*15] 商代数の構成において Lie ブラケットを忘れることで商ベクトル空間が構成できる．この際 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間でありさえすれば良い．

が well-defined な線型写像であることを示す．実際 $y+\mathfrak{h}=y'+\mathfrak{h} \iff y'-y\in\mathfrak{h}$ ならば

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}(x)(y'+\mathfrak{h}) &= \mathrm{ad}(x)(y')+\mathfrak{h}\\ &= \big(\mathrm{ad}(x)(y)+\mathrm{ad}(x)(y'-y)\big)+\mathfrak{h}\\ &= \big(\mathrm{ad}(x)(y)+[x,y'-y]\big)+\mathfrak{h}\\ &= \mathrm{ad}(x)(y)+\mathfrak{h}\\ &= \overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}(x)(y+\mathfrak{h})\end{aligned}$$

が成り立つので $\overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}(x)$ は well-defined であり，かつ $\mathrm{ad}(x)$ が線型写像なので線型写像である．以上の考察から，写像 $\overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}\colon \mathfrak{h}\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}),\ x\longmapsto \overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}(x)$ は well-defined な Lie 代数の準同型で，$\mathrm{Im}\,\overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}$（もちろんこれは $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ の部分 Lie 代数である）の元は全て冪零である．

さて，$\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$ より $\dim\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}$ であるから，帰納法の仮定よりある $v+\mathfrak{h}\in(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})\setminus\{\mathfrak{h}\}$ が存在して，$\forall\overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}(x)\in\mathrm{Im}\,\overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}$ に対して $\overline{\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}}(x)(v+\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ が成り立つ．i.e. ある $v\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$ が存在して $\forall x\in\mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}}(x)(v)=[x,v]\in\mathfrak{h}$ が成り立つ．i.e. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の正規化代数 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の真部分集合である[*16]．

$\mathfrak{h}$ を，$\mathfrak{h}\subsetneq\mathfrak{g}$ を充たす極大[*17]部分 Lie 代数とする．$\mathfrak{h}$ の極大性と先ほど証明した事実から $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}$ でなくてはならない．従って正規化代数の定義の脚注から $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が well-defined である．もし $\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{h}>1$ だとすると $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の 1 次元部分 Lie 代数 $\mathbb{K}(x+\mathfrak{h})$ (w/ $x\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$) の，標準的射影による逆像が $\mathfrak{h}$ を真部分集合にもつ $\mathfrak{g}$ の真部分代数ということになり，$\mathfrak{h}$ の極大性に矛盾する．故に背理法から $\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=1$ であり，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathbb{K}z$ (w/ $z\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$) だと分かった．

ここで $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $W:=\{\,v\in V \mid \forall y\in\mathfrak{h},\ y(v)=o\,\}$ を考える．$\dim\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{g}-1<\dim\mathfrak{g}$ なので，帰納法の仮定より $W\neq\{o\}$ だと分かる[*18]．$\mathfrak{h}$ はイデアルなので，$\forall x\in\mathfrak{g},\forall y\in\mathfrak{h},\forall w\in W$ に対して $y(x(w))=x(y(w))-[x,y](w)=o$ が成り立つ．i.e. $\forall w\in W$ に対して $\forall x\in\mathfrak{g},\ x(w)\in W$ が言える（W は x 不変）．故に $\forall z\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$ の W における固有ベクトル $v\in W\setminus\{o\}$ が存在する[*19]．z は冪零なのでその固有値は 0 であり，$z(v)=o$ が成り立つ．

■

定理 1.1.1: Engel の定理

$\mathfrak{g}$ を有限次元Lie 代数とする．$\forall x\in\mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\,x$ が冪零ならば，$\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数である．

命題 1.1.4-(5) と併せて以下を得る：
有限次元Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数 $\iff$ $\forall x\in\mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\,x$ が冪零

証明 $\dim\mathfrak{g}$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim\mathfrak{g}=0,1$ のときは自明．

$\dim\mathfrak{g}>1$ とする．仮定より，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 代数 $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}$ に対して補題 1.1.4 を使うことができる．すなわちある $v\in\mathfrak{g}\setminus\{o\}$ が存在して，$\forall x\in\mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x)(v)=[x,v]=o$ を充たす．i.e. $\mathfrak{g}$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は非零である．このとき $\dim\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})<\dim\mathfrak{g}$ で，かつ $\forall x+Z(\mathfrak{g})\in\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ に対して $\mathrm{ad}(x+Z(\mathfrak{g}))$ は冪零で

[*16] $\exists v\in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\setminus\mathfrak{h}$ なので
[*17] $\mathfrak{h}\subsetneq\mathfrak{h}'$ でかつ $\mathfrak{h}'\subsetneq\mathfrak{g}$ を充たす $\mathfrak{h}'$ が存在しない．
[*18] 仮定より $\mathfrak{h}$ の全ての元は冪零．
[*19] $\forall z\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ はスカラー倍の違いしかないので，固有ベクトルは共通のものを取れる．

ある．故に帰納法の仮定から $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ は冪零 Lie 代数である．従って命題 1.1.4-(3) より $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数である． ■

定義 1.1.16: 旗

- V を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする．V の**旗** (flag) とは，部分ベクトル空間の増大列

$$\{o\} =: V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\dim V} \coloneqq V$$

  であって，$0 \leq \forall i \leq \dim V$ に対して $\dim V_i = i$ が成り立つようなもののこと．
- $x \in \operatorname{End} V$ が旗を**安定化する** (stabilize) とは，$0 \leq \forall i \leq \dim V$ に対して $xV_i \subset V_i$ が成り立つことを言う．

系 1.1.2:

$V \neq \{o\}$ を有限次元ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をとる．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ が冪零ならば，$\forall x \in \mathfrak{g}$ によって同時に安定化される V の旗が存在する．

証明 $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 0$ ならば $V = \{o\}$ なので示すべきことは何もない．$\dim V > 0$ とする．補題 1.1.4 より $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $xv = o$ を充たす $v \in V \setminus \{o\}$ が存在する．ここで $V_1 \coloneqq \mathbb{K}v$ とおき，$W \coloneqq V/V_1$ とする．$\forall x \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ に対して，$v \in V$ の採り方から明らかに $V_1 \subset \operatorname{Ker} x$ なので商ベクトル空間の普遍性*20を使うことができ，図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "x"] \arrow[d, "p"'] & V \arrow[r, "p"] & V/V_1 \\ V/V_1 \arrow[urr, dashed, "\exists! \overline{x}"] & & \end{tikzcd}$$

を可換にするような $\overline{x} \in \mathfrak{gl}(V/V_1)$ が一意的に存在する*21．このようにして得られる Lie 代数の単射準同型 $\overline{\ \cdot\ } : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/V_1)$, $x \longmapsto \overline{x}$ によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(V/V_1)$ の部分 Lie 代数と見做すと，明らかに $\mathfrak{g}$ の任意の元は冪零であり，かつ $\dim(V/V_1) = \dim V - 1 < \dim V$ なので帰納法の仮定が使えて，V/V_1 の旗

$$\{o\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1} = V/V_1$$

が存在して*22 $\forall \overline{x} \in \mathfrak{g}$ がそれを同時に安定化する．このとき V の部分ベクトル空間の増大列

$$\{o\} \subset p^{-1}(W_0) \subset p^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(W_{\dim V - 1}) = V$$

は $\forall x \in \mathfrak{g}$ により安定化される*23 ので帰納法が完成する． ■

*20 命題 1.1.2-(1) の証明がそのまま適用できる．
*21 $p \colon V \longrightarrow V/V_1$ は標準的射影．
*22 V/V_1 の零ベクトルは V_1 であることに注意．
*23 $\forall x \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき，旗 $W_0 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1}$ が $\overline{x}$ によって安定化されるので，$\forall w + V_1 \in W_i \quad (0 \leq \forall i \leq \dim V - 1)$ に対して $\overline{x}(w + V_1) \in W_i$ が成り立つ．$\forall v \in p^{-1}(W_i)$ に対して $p(v) = v + V_1 \in W_i$ なので，命題 1.1.2-(1) の証明から $x(v) + V_1 = \overline{x}(v + V_1)$ であることに注意すると $p\bigl(x(v)\bigr) = x(v) + V_1 = \overline{x}(v + V_1) \in W_i$, i.e. $x(v) \in p^{-1}(W_i)$ がわかった．

補題 1.1.5:

$\mathfrak{g}$ を冪零 Lie 代数，$\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ をそのイデアルとする．このとき，もし $\mathfrak{i} \neq \{o\}$ ならば $\mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g}) \neq \{o\}$ である．

証明 イデアルの定義から，随伴表現 $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は $\forall x \in \mathfrak{i}$ に対して $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})(x) = [\mathfrak{g}, x] \subset \mathfrak{i}$ を充たす．i.e. 部分 Lie 代数 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{i})$ と見做すことができる．さらに仮定より $\mathfrak{i} \neq \{o\}$ なので補題 1.1.4 が使えて，ある $x \in \mathfrak{i} \setminus \{o\}$ が存在して $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})(x) = [\mathfrak{g}, x] = \{o\}$ を充たす．中心の定義を思い出すと，これは $x \in \mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g})$ を意味する． ■

1.2 Lie 群と Lie 代数の関係

この節は [小林 05, 第 5 章] による．

第 2 章

半単純 Lie 代数

この章以降，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の零ベクトルを $0 \in V$ と書き，零ベクトル空間 $\{0\}$ のことも 0 と表記する[*1]．この章において，特に断らない限り体 $\mathbb{K}$ は代数閉体[*2]で，かつ $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ であるとする．また，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は常に有限次元であるとする．

2.1 Lie の定理・Cartan の判定条件

2.1.1 Lie の定理

定理 2.1.1:

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする．
このとき $V \neq 0$ ならば，$\forall x \in \mathfrak{gl}(V)$ は共通の固有ベクトルを持つ．

系 2.1.2: Lie の定理

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ は V のある共通の旗を安定化する．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ の表現行列を同時に上三角行列にするような V の基底が存在する．

系 2.1.3:

$\mathfrak{g}$ を可解 Lie 代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ のイデアルの上昇列

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

であって，$0 \leq \forall i \leq n$ に対して $\dim \mathfrak{g}_i = i$ を充たすようなものが存在する．

[*1] 記号の濫用だが，広く普及している慣習である．
[*2] つまり，定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha) = 0$ を充たす．

系 2.1.4:

$\mathfrak{g}$ を可解 Lie 代数とする．このとき

$$x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \implies \mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \text{ が冪零}$$

が成り立つ．特に，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は冪零 Lie 代数である．

2.1.2 Jordan-Chevalley 分解

この小節において体 $\mathbb{K}$ は代数閉体で，かつ標数は任意とする．

定義 2.1.1: 線型変換の半単純性

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x \in \mathrm{End}\, V$ とする．x が**半単純** (semisimple) であるとは，x の最小多項式が $\mathbb{K}$ 上で重根を持たないことを言う[a]．

[a] x が対角化可能であることと同値である．

命題 2.1.1: Jordan-Chevalley 分解

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x \in \mathrm{End}\, V$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) 半単純な $x_s \in \mathrm{End}\, V$ と冪零な $x_n \in \mathrm{End}\, V$ が一意的に存在して，

$$x = x_s + x_n$$

と書ける．

(2) 定数項を持たない $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ であって，$x_s = p(x)$，$x_n = q(x)$ を充たすものが存在する．特に $[x, x_s] = [x, x_n] = [x_s, x_n] = 0$ が成り立つ．

(3) 部分ベクトル空間 $A \subset B \subset V$ があって $x|_B : B \longrightarrow A$ であるとき，$x_s|_B$, $x_n|_B$ の値域もまた A に収まる．

補題 2.1.1:

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x \in \mathrm{End}\, V$ とその Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ を与える．

このとき $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}(\mathfrak{gl}(V))$ の Jordan-Chevalley 分解 $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x)_s + \mathrm{ad}(x)_n$ は $\mathrm{ad}(x)_s = \mathrm{ad}(x_s)$，$\mathrm{ad}(x)_n = \mathrm{ad}(x_n)$ を充たす．

補題 2.1.2:

$\mathfrak{U}$ を有限次元 $\mathbb{K}$-代数とする．このとき微分代数 $\mathrm{Der}\, \mathfrak{U} \subset \mathrm{End}\, \mathfrak{U}$ の任意の元 $x \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{U}$ の Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ に対して $x_s, x_n \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{U}$ が成り立つ．

2.1.3 Cartan の判定条件

定理 2.1.5: Cartan の判定条件

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を与える．
このとき以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$ が可解
(2) $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$ が成り立つ

系 2.1.6:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．
このとき $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)\big) = 0$ が成り立つならば，$\mathfrak{g}$ は可解である．

2.2 Killing 形式

2.2.1 半単純性の判定条件

定義 2.2.1: Killing 形式

体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の上の対称な双線型形式

$$\kappa \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\ y) \longmapsto \mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)\big)$$

のことを $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式** (Killing form) と呼ぶ．

定義 2.2.2: 双線型形式の radical

体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の上の対称な双線型形式

$$\beta \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$$

および任意の部分集合 $W \subset \mathfrak{g}$ を与える．

- $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間

$$W^{\perp} := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall w \in W,\ \beta(x,\, w) = 0 \right\}$$

  のことを W の β に関する**直交補空間** (orthogonal complement) と呼ぶ．
- $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間

$$S_\beta := \mathfrak{g}^{\perp} = \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall y \in \mathfrak{g},\ \beta(x,\, y) = 0 \right\}$$

  のことを β の **radical** と呼ぶ．
- β が**非退化** (nondegenerate) であるとは，$S_\beta = 0$ であることを言う[a]．

[a] W が $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間のとき，β の W への制限 $\beta|_{W \times W}$ が**非退化** (nondegenerate) であるとは，$W \cap W^{\perp} = 0$ であることを言う．

定理 2.2.1: Lie 代数の半単純性と Killing 形式の非退化性

$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\iff$ $\mathfrak{g}$ の Killing 形式が非退化

2.2.2 単純イデアル

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と，そのイデアルの族 $\left\{\mathfrak{i}_i\right\}_{i \in I}$ を与える．$\mathfrak{g}$ が $\left\{\mathfrak{i}_i\right\}_{i \in I}$ の**直和** (direct sum)[*3]であるとは，部分ベクトル空間の内部直和として

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{i}_i$$

が成り立つことを言う．

[*3] 厳密には，命題 A.3.4 の意味で**内部直和** (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う．

定理 2.2.2: 半単純 Lie 代数の直和分解

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_t$ が存在して以下を充たす：

(1)

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{i}_i$$

(2) $\mathfrak{g}$ の任意の単純イデアルは $\mathfrak{i}_i$ のどれか 1 つと一致する．i.e. (1) の直和分解は一意である．

(3) $\mathfrak{i}_i$ 上の Killing 形式 $\kappa_{\mathfrak{i}_i}$ は $\kappa_{\mathfrak{i}_i \times \mathfrak{i}_i}$ に等しい．

系 2.2.3:

$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数ならば以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

(2) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアルは半単純である．

(3) 任意の Lie 代数の準同型 $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ について，$\mathrm{Im}(\mathfrak{h})$ は半単純である．

(4) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアルは $\mathfrak{g}$ の単純イデアルの直和である．

2.2.3 内部微分

定理 2.2.4:

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

2.2.4 抽象 Jordan 分解

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルなので 0 となる．i.e. $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に関して $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ が言えるので ad は単射である．一方で定理 2.2.4 より $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ なので，補題 2.1.2 を合わせると $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Jordan-Chevalley 分解 $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x)_s + \mathrm{ad}(x)_n \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \mathrm{ad}(x)_s,\ \mathrm{ad}(x)_n \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ が存在する．

定義 2.2.3: 抽象 Jordan 分解

$\forall x \in \mathfrak{g}$ の**抽象 Jordan 分解**とは，$\mathrm{ad}(s_x) = \mathrm{ad}(x)_s$，$\mathrm{ad}(n_x) = \mathrm{ad}(x)_n$ を充たす $s_x,\ n_x \in \mathfrak{g}$ のこと．

ad が単射なので，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ における通常の Jordan-Chevalley 分解の一意性から $s_x,\ n_x$ は一意に決まる．さらに $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(s_x) + \mathrm{ad}(n_x) = \mathrm{ad}(s_x + n_x)$ ということなので $x = s_x + n_x \in \mathfrak{g}$ が成り立つ．さらに命題 2.1.1-(2) より $0 = [\mathrm{ad}(s_x), \mathrm{ad}(n_x)] = \mathrm{ad}([s_x, n_x])$ なので $[s_x, n_x] = 0$ もわかる．

2.3 表現の完全可約性

2.3.1 $\mathfrak{g}$-加群と表現

この小節では $\mathbb{K}$ を任意の体とする．まず，環上の加群の定義を復習する：

公理 2.3.1: 環上の加群の公理

- R を環とする．**左 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像[a]

$$\cdot : R \times M \to M,\ (a,\ x) \mapsto a \cdot x$$

の組 $(M, +, \cdot\ )$ であって，$\forall x,\ x_1,\ x_2 \in M,\ \forall a,\ b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(LM1) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$

(LM2) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

(LM3) $a \cdot (x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2$

(LM4) $1 \cdot x = x$

ただし，$1 \in R$ は環 R の乗法単位元である．

- R を環とする．**右 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像

$$\cdot : M \times R \to M,\ (x,\ a) \mapsto x \cdot a$$

の組 $(M, +, \cdot\ )$ であって，$\forall x,\ x_1,\ x_2 \in M,\ \forall a,\ b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(RM1) $(x \cdot b) \cdot a = x \cdot (ba)$

(RM2) $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$

(RM3) $(x_1 + x_2) \cdot a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a$

(RM4) $x \cdot 1 = x$

- $R,\ S$ を環とする．**$(R,\ S)$ 両側加群** ($(R,\ S)$-bimodule) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像

$$\begin{aligned} \cdot_{\mathrm{L}} &: R \times M \to M,\ (a,\ x) \mapsto a \cdot_{\mathrm{L}} x \\ \cdot_{\mathrm{R}} &: M \times R \to M,\ (x,\ a) \mapsto x \cdot_{\mathrm{R}} a \end{aligned}$$

の組 $(M, +, \cdot_{\mathrm{L}}\ ,\ \cdot_{\mathrm{R}}\ )$ であって，$\forall x \in M,\ \forall a \in R,\ \forall b \in S$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(BM1) 左スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{L}}$ に関して M は左 R 加群になる

(BM2) 右スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{R}}$ に関して M は右 S 加群になる

(BM3) $(a \cdot_{\mathrm{L}} x) \cdot_{\mathrm{R}} b = a \cdot_{\mathrm{L}} (x \cdot_{\mathrm{R}} b)$

[a] この写像 $\cdot$ は**スカラー乗法** (scalar multiplication) と呼ばれる．

R が**可換環**の場合，**(LM1)** と **(RM1)** が同値になるので，左 R 加群と右 R 加群の概念は同値になる．こ

れを単に ***R* 加群** (R-module) と呼ぶ．

R が体の場合，R 加群のことを ***R*-ベクトル空間**と呼ぶ．

> ! 以下では，なんの断りもなければ R 加群と言って左 R 加群を意味する．

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．このとき，環上の加群の公理を少し修正することで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の加群の概念を得る：

公理 2.3.2: Lie 代数上の加群

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．**$\mathfrak{g}$-加群**とは，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ と写像

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V,\ (x, v) \longmapsto x \blacktriangleright v$$

の 4 つ組 $(V, +, \cdot, \blacktriangleright)$ であって，$\forall x, x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, $\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(M1) $(\lambda\cdot x_1 + \mu\cdot x_2) \blacktriangleright v = \lambda\cdot(x_1 \blacktriangleright v) + \mu\cdot(x_2 \blacktriangleright v)$

(M2) $x \blacktriangleright (\lambda\cdot v_1 + \mu\cdot v_2) = \lambda\cdot(x \blacktriangleright v_1) + \mu\cdot(x \blacktriangleright v_2)$

(M3) $[x, y] \blacktriangleright v = x \blacktriangleright (y \blacktriangleright v) - y \blacktriangleright (x \blacktriangleright v)$

同値な定義として，Lie 代数の表現

$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto \bigl(v \mapsto \phi(x)(v)\bigr)$$

について

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V,\ (x, v) \longmapsto \phi(x)(v)$$

とおくことで得られる 4 つ組 $(V, +, \cdot, \blacktriangleright)$ のことである[a]．

[a] 【例 1.1.2】より $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie ブラケットは交換子だったので $[x, y] \blacktriangleright \text{-} = \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = \phi(x)\circ\phi(y) - \phi(y)\circ\phi(x) = x \blacktriangleright (y \blacktriangleright \text{-}) - y \blacktriangleright (x \blacktriangleright \text{-})$ となる．

> ! $\mathfrak{g}$-加群に備わっている 3 つの演算（加法，スカラー乗法，左作用）をいちいち全て明記するのは面倒なので $(V, +, \cdot, \blacktriangleright)$ のことを「**$\mathfrak{g}$-加群 V**」と略記する．この略記において，今まで通りスカラー乗法 $\cdot$ は省略して λv の様に書き，左作用はなんの断りもなく $x \blacktriangleright v$ の様に書くことにする．

全く同様に代数上の加群，結合代数上の加群を定義することもできるが，本章では以降 $\mathfrak{g}$-加群と言ったら Lie 代数上の加群を指すことにする．Lie 代数の表現を考えることは $\mathfrak{g}$-加群を考えることと同値なのである．

定義 2.3.1: $\mathfrak{g}$-加群の準同型

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$(V, +, \cdot, \blacktriangleright_1)$, $(W, +, \cdot, \blacktriangleright_2)$ を $\mathfrak{g}$-加群とする．

- 線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が **$\mathfrak{g}$-加群の準同型** (homomorphism of $\mathfrak{g}$-module) [a] であるとは，$\forall x \in \mathfrak{g}$, $\forall v \in V$ に対して

$$f(x \blacktriangleright_1 v) = x \blacktriangleright_2 f(v)$$

  が成り立つこと[b]．
- $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ が**同型** (isomorphism) であるとは，f がベクトル空間の同型写像であることを言う．
- 同型な $\mathfrak{g}$-加群のことを，**同値な $\mathfrak{g}$ の表現** (equivalent representation of $\mathfrak{g}$) とも言う．

[a] **同変写像** (equivalent map) と言うこともある．**絡作用素** (intertwining operator), **インタートウィナー** (intertwiner) と言う場合もあるが，そこまで普及していない気がする．

[b] スカラー乗法についての線型性の定義を $\blacktriangleright$ について拡張しただけ．

同値な定義だが，線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が $\mathfrak{g}$-加群の準同型であるとは，Lie 代数の表現

$$\phi_1 \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto (v \mapsto x \blacktriangleright_1 v)$$
$$\phi_2 \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W),\ x \longmapsto (v \mapsto x \blacktriangleright_2 v)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f \circ \phi_1(x) = \phi_2(x) \circ f$$

が成り立つことを言う．

定義 2.3.2: 部分 $\mathfrak{g}$-加群

$\mathfrak{g}$-加群 V を与える．部分集合 $W \subset V$ が**部分 $\mathfrak{g}$-加群**であるとは，W が和，スカラー乗法，$\mathfrak{g}$ の左作用の全てについて閉じていること．i.e. $\forall w, w_1, w_2 \in W$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\in W \\ \lambda w &\in W \\ x \blacktriangleright w &\in W \end{aligned}$$

が成り立つことを言う．

同値な定義として，以下の 2 つの条件が充たされることを言う：

(sub-M1) W が V の部分ベクトル空間

(sub-M2) Lie 代数の表現

$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto (v \longmapsto x \blacktriangleright v)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \phi(x)(W) \subset W$$

が成り立つ．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して W は $\phi(x)$-不変である．

【例 2.3.1】$\mathfrak{g}$-加群の準同型の核と像

$\mathfrak{g}$-加群 $V,\ W$ とその間の $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\begin{aligned}
v \in \operatorname{Ker} f \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f(x \blacktriangleright v) = x \blacktriangleright f(v) = x \blacktriangleright 0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright v \in \operatorname{Ker} f,\\
w \in \operatorname{Im} f \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists v \in V,\ w = f(v) \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright w = x \blacktriangleright f(v) = f(x \blacktriangleright v)\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright w \in \operatorname{Im} f
\end{aligned}$$

が言えるので $\operatorname{Ker} f,\ \operatorname{Im} f$ はそれぞれ $V,\ W$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群である．

2.3.2 $\mathfrak{g}$-加群の直和と既約性

この小節でも $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

定義 2.3.3: $\mathfrak{g}$-加群の直和

$\mathfrak{g}$-加群の族 $\bigl\{(V_i,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright_i)\bigr\}_{i\in I}$ を与える．このとき

- 直和ベクトル空間 $\bigoplus_{i\in I} V_i$
- $\bigoplus_{i\in I} V_i$ への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times \bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i,\ \bigl(x,\ (v_i)_{i\in I}\bigr) \longmapsto (x \blacktriangleright_i v_i)_{i\in I}$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(\bigoplus_{i\in I} V_i,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群の直和** (direct sum) と呼び[a]，$\boldsymbol{\bigoplus_{i\in I} V_i}$ と略記する．

[a] 系 A.3.1 の注と同様に，この定義は厳密には**外部直和** (external direct sum) と呼ぶべきだと思う．

定義 2.3.4: Lie 代数の表現の既約性

- $\mathfrak{g}$-加群 V が**既約** (irreducible)[a]であるとは，V の部分 $\mathfrak{g}$-加群が $0,\ V$ のちょうど2つ[b]だけであることを言う．
- $\mathfrak{g}$-加群 V が**完全可約** (completely reducible) であるとは，V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和[c]であることを言う．
- 0 でない $\mathfrak{g}$-加群 V が**直既約** (indecomposable) であるとは，V が 0 でない 2 つの部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和として書けないことを言う．

[a] i.e. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $(\phi,\ V)$ が**既約表現** (irreducible representation; irrep) だ，と言っても良い．
[b] つまり，零ベクトル空間 0 は既約な $\mathfrak{g}$-加群とは呼ばない．
[c] こちらの場合，厳密には**内部直和** (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う．

次の補題は証明が少し厄介である：

補題 2.3.1: 完全可約の全射

$\mathfrak{g}$-加群の準同型 $p\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき p が全射かつ V が完全可約ならば，$\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \hookrightarrow V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$$

は分裂する．

<u>証明</u> V が完全可約という仮定から，既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ が存在して，内部直和の意味で

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$$

と書ける．ここで $\mathcal{S}$ を以下の条件を充たす組 $(J,\ V_J)$ 全体の集合とする：

- $J \subset I,\ V_J = \bigoplus_{j\in J} V_j \subset V$
- $\operatorname{Ker} p \cap V_J = 0$

$\mathcal{S}$ の上の 2 項関係を

$$(J,\ V_J) \le (K,\ V_K) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad J \subset K$$

と定義すると組 $(\mathcal{S},\ \le)$ は順序集合になる．また $\mathcal{S}' = \bigl\{(J_a,\ V_{J_a})\bigr\}_{a\in A}$ を $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合とすると $\Bigl(\bigcup_{a\in A} J_a,\ V_{\bigcup_{a\in A} J_a}\Bigr) \in \mathcal{S}$ であり[*4]，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える．i.e. $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である．したがって Zorn の補題を使うことができ，$\mathcal{S}$ は極大元 $(J_0,\ V_{J_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ．

次に $V = \operatorname{Ker} p \oplus V_{J_0}$ を示す．$\mathcal{S}$ の定義から $\operatorname{Ker} p \cap V_{J_0} = 0$ なので，命題 A.3.4 より $V = \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ を示せば良い．$V \neq \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ を仮定すると，ある $k \in I \setminus J_0$ が存在して $V_k \not\subset \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ を充たす．V_k は既約なので $V_k \cap (\operatorname{Ker} p + V_{J_0}) = 0$ が成り立つが，このことは $(J_0,\ V_{J_0})$ の極大性に矛盾．よって背理法から $V = \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ が言えた．

[*4] $V_{\bigcup_{a\in A} J_a} = \bigoplus_{j\in \bigcup_{a\in A} J_a} V_j = \bigcup_{a\in A} V_{J_a}$ なので，$\cap$ の分配律から $\operatorname{Ker} p \cap V_{\bigcup_{a\in A} J_a} = \operatorname{Ker} p \cap \bigcup_{a\in A} V_{J_a} = \bigcup_{a\in A}(\operatorname{Ker} p \cap V_{J_a}) = 0$ が言える．

以上より $W \cong V/\operatorname{Ker} p \cong V_{J_0}$ が言える．このとき包含準同型 $i\colon V_{J_0} \hookrightarrow V$ が $p \circ i = \mathrm{id}_{V_{J_0}}$ を充たすので証明が完了した． ■

命題 2.3.1: 完全可約性の特徴付け

以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$-加群 V が完全可約

(2) V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ に対して，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ [a]が存在して $V \cong W \oplus W^c$ を充たす．

---

[a] W の**補表現** (complement representation) と言う．

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)** V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ によって

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$$

と書けるとする．V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する．このとき標準的射影 $p\colon V \longrightarrow V/W$ は全射な $\mathfrak{g}$-加群の準同型なので，補題 2.3.1 から $\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \cong W \hookrightarrow V \xrightarrow{p} V/W \longrightarrow 0$$

が分裂する．よって系 A.4.2 から

$$V \cong W \oplus (V/W)$$

が言えた．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

V の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群全体の集合を $\mathcal{V}$ と書く．$\mathcal{S}$ を以下の条件を充たす組 (I, V_I) 全体の集合とする：

- $I \subset \mathcal{V}$
- 内部直和の意味で $V_I = \bigoplus_{V_i\in I} V_i \subset V$

$\mathcal{S}$ 上の 2 項関係を

$$(I, V_I) \le (J, V_J) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad I \subset J$$

と定義すると組 $(\mathcal{S}, \le)$ は順序集合になる．V の 0 でない部分 $\mathfrak{g}$-加群のうち極小のものを V_1 とすると，定義から $V_1 \in \mathcal{V}$ なので $(\{V_1\}, V_{V_1}) \in \mathcal{S}$ となり $\mathcal{S}$ は空でない．また $\mathcal{S}' = \bigl\{(J_a, V_{J_a})\bigr\}_{a\in A}$ を $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合とすると $\left(\bigcup_{a\in A} J_a, V_{\bigcup_{a\in A} J_a}\right) \in \mathcal{S}$ であり，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える．i.e. $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である．したがって Zorn の補題を使うことができ，$\mathcal{S}$ は極大元 $(I_0, V_{I_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ．このとき $V = V_{I_0}$ であることを背理法により示そう．

$V \neq V_{I_0}$ を仮定する．このとき (2) より V の 0 でない部分 $\mathfrak{g}$-加群 $V_{I_0}^c$ が存在して $V \cong V_{I_0} \oplus V_{I_0}^c$ を充たす．このとき $V_{I_0}^c$ に含まれる 0 でない極小の部分 $\mathfrak{g}$-加群 W をとることができるが，定義からこの W は既約である．よって

$$W \oplus V_{I_0} \subset V$$

もまた既約部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和となり，V_{I_0} の極大性に矛盾する．

■

補題 2.3.2: Schur の補題

任意の体[a] $\mathbb{K}$ 上の $\mathfrak{g}$-加群 V, W，および 0 でない $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) V が既約ならば f は単射
(2) W が既約ならば f は全射

[a] 代数閉体でなくても良い

証明 (1)【例 2.3.1】より $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分 $\mathfrak{g}$-加群だが，V が既約なので $\mathrm{Ker}\, f = 0, V$ のどちらかである．仮定より f は 0 でないので $\mathrm{Ker}\, f = 0$，i.e. f は単射である．

(2)【例 2.3.1】より $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分 $\mathfrak{g}$-加群だが，W が既約なので $\mathrm{Im}\, f = 0, W$ のどちらかである．仮定より f は 0 でないので $\mathrm{Im}\, f = W$，i.e. f は全射である．

■

系 2.3.1: 代数閉体上の Schur の補題

代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 $\mathfrak{g}$-加群 V を与える．このとき V が既約ならば，任意の $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型 $\phi \in \mathrm{End}\, V$ はある $\lambda \in \mathbb{K}$ を使って $\phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$（i.e. スカラー倍）と書ける．

証明 仮定より V が既約なので，補題 2.3.2-(1), (2) より任意の $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型 $\phi\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の同型か 0 のどちらかである．ここで $\lambda \in \mathbb{K}$ を ϕ の固有値とする．$\mathbb{K}$ が代数閉体なので λ は確かに存在する．このとき写像 $\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V \colon V \longrightarrow V$ もまた $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型となるが，固有値の定義から $\det(\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$ なので同型写像ではあり得ない．よって $\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V = 0 \iff \phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$ である． ■

系 2.3.2: 可換な Lie 代数の有限次元既約表現

代数閉体上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が可換ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現は 1 次元である．

証明 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする．このとき $\mathfrak{g}$ が可換であることから $\forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall v \in V$ に対して

$$
\begin{aligned}
\phi(x)(y \blacktriangleright v) &= \phi(x) \circ \phi(y)(v) \\
&= [\phi(x), \phi(y)](v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi([x, y])(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi(0)(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= y \blacktriangleright \bigl(\phi(x)(v)\bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x)\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．よって Schur の補題から $\phi(x)$ がスカラー倍だとわかる．故に V の任意の 1 次元部分ベクトル空間は自動的に部分 $\mathfrak{g}$-加群になる．然るに V は仮定より既約だから V の部分 $\mathfrak{g}$-加群は $0, V$ しかあり得ない．さらに $V \neq 0$ なので $\dim V = 1$ でなくてはならない． ■

2.3.3 $\mathfrak{g}$-加群の Hom とテンソル積

この小節でも $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

定義 2.3.5: $\mathfrak{g}$-加群のテンソル積

$(V_1,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright_1),\,(V_2,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright_2)$ を有限次元$\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$
- $V_1 \otimes V_2$ への $\mathfrak{g}$ の左作用[a]

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times (V_1 \otimes V_2) \longrightarrow V_1 \otimes V_2,\ (x,\,v_1 \otimes v_2) \longmapsto (x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 v_2)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(V_1 \otimes V_2,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群のテンソル積** (tensor product) と呼び，$\boldsymbol{V_1 \otimes V_2}$ と略記する．

[a] 正確には，これの右辺を線型に拡張したもの

実際 $V_1 \otimes V_2$ が $\mathfrak{g}$-加群になっていることを確認しておこう：

$$\begin{aligned}
[x,y] \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) &= ([x,y] \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes ([x,y] \blacktriangleright_2 v_2) \\
&= (x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 - (y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 \\
&\quad + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2) - v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2) \\
&= \big((x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2)\big) \\
&\quad - \big((y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2)\big), \\
x \blacktriangleright y \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) - y \blacktriangleright x \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) &= x \blacktriangleright \big((y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 v_2)\big) \\
&\quad - y \blacktriangleright \big((x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 v_2)\big) \\
&= \big((x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2)\big) \\
&\quad - \big((y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2)\big)
\end{aligned}$$

なので

$$[x,y] \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) = x \blacktriangleright y \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) - y \blacktriangleright x \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2)$$

がわかった．

定義 2.3.6: $\mathfrak{g}$-加群の双対

$(V,\, +,\, \cdot\, ,\, \blacktriangleright)$ を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- 双対ベクトル空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, \mathbb{K})$
- V^* への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times V^* \longrightarrow V^*,\ (x,\, f) \longmapsto \bigl(v \mapsto -f(x \blacktriangleright v)\bigr)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(V^*,\, +,\, \cdot\, ,\, \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群の双対** (dual)[a] と呼び，$\boldsymbol{V^*}$ と略記する．

[a] **反傾** (contragradient) と呼ぶ場合もあるようだが，現在はあまり使われていないような気がする．

実際 V^* が $\mathfrak{g}$-加群になっていることを確認しておこう：

$$\begin{aligned}
([x,y] \blacktriangleright f)(v) &= -f([x,y] \blacktriangleright f)(v) \\
&= -f(x \blacktriangleright y \blacktriangleright v - y \blacktriangleright x \blacktriangleright v) \\
&= -f(x \blacktriangleright y \blacktriangleright v) + f(y \blacktriangleright x \blacktriangleright v) \\
&= (x \blacktriangleright f)(y \blacktriangleright v) - (y \blacktriangleright f)(x \blacktriangleright v) \\
&= -\bigl(y \blacktriangleright (x \blacktriangleright f)\bigr)(v) + \bigl(x \blacktriangleright (y \blacktriangleright f)\bigr)(v) \\
&= (x \blacktriangleright y \blacktriangleright f)(v) - (y \blacktriangleright x \blacktriangleright f)(v)
\end{aligned}$$

なので

$$[x,y] \blacktriangleright f = x \blacktriangleright y \blacktriangleright f - y \blacktriangleright x \blacktriangleright f$$

がわかった．

ここで，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の自然な同型（命題 A.2.7）

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$$

の具体形が

$$\alpha\colon f \otimes w \longmapsto \bigl(v \mapsto f(v) \cdot w\bigr) \tag{2.3.1}$$

となっていたことを思い出そう．このことから，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ の上の $\mathfrak{g}$ の左作用を

$$x \blacktriangleright (f \otimes w) = -f(x \blacktriangleright \text{-}) \otimes w + f \otimes (x \blacktriangleright w)$$

に着想を得て

$$(x \blacktriangleright F)(v) = -F(x \blacktriangleright v) + x \blacktriangleright F(v) \quad (\forall F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W))$$

と定義しようと思うのが自然である．というのも，こう定義することで $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像 (2.3.1) が

$$\begin{aligned}
\alpha\bigl(x \blacktriangleright (f \otimes w)\bigr)(v) &= -\alpha\bigl(f(x \blacktriangleright \text{-}) \otimes w\bigr)(v) + \alpha\bigl(f \otimes (x \blacktriangleright w)\bigr)(v) \\
&= -f(x \blacktriangleright v) \cdot w + f(v) \cdot (x \blacktriangleright w) \\
&= -f(x \blacktriangleright v) \cdot w + x \blacktriangleright \bigl(f(v) \cdot w\bigr) \\
&= \bigl(x \blacktriangleright \alpha(f \otimes w)\bigr)(v)
\end{aligned}$$

となって $\mathfrak{g}$-加群の同型写像になる！

定義 2.3.7: $\mathfrak{g}$-加群の Hom

$(V, +, \cdot, \blacktriangleright_1)$, $(W, +, \cdot, \blacktriangleright_2)$ を有限次元$\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$[a]
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W),\ F \longmapsto \bigl(v \mapsto -F(x \blacktriangleright_1 v) + x \blacktriangleright_2 F(v)\bigr)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), +, \cdot, \blacktriangleright\bigr)$ を $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ と略記する．

[a] V から W への $\mathfrak{g}$-加群の準同型全体の集合ではない．

2.3.4 Casimir 演算子

この小節では $\mathbb{K}$ は標数 0 の体とする．

定義 2.3.8: 忠実な表現

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が**忠実** (faithful)[a] であるとは，ρ が単射であることを言う．

[a] 群作用の文脈では**効果的な作用** (effective action) と呼ぶ．

補題 2.3.3:

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- $\mathfrak{g}$ 上の対称な双線型形式

$$\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y)\bigr)$$

を与える．β の radical を

$$S_\beta := \left\{\, x \in \mathfrak{g} \,\middle|\, \forall y \in \mathfrak{g},\ \beta(x, y) = 0 \,\right\}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) S_β は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) $S_\beta = 0$, i.e. β は非退化である．

証明 (1) Tr の循環性から

$$\begin{aligned}\beta(x,\,[y,z]) &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x)\circ\phi([y,z])\bigr)\\ &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x)\circ\phi(y)\circ\phi(z)\bigr) - \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x)\circ\phi(z)\circ\phi(y)\bigr)\\ &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x)\circ\phi(y)\circ\phi(z)\bigr) - \mathrm{Tr}\bigl(\phi(y)\circ\phi(x)\circ\phi(z)\bigr)\\ &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi([x,y])\circ\phi(z)\bigr)\\ &= \beta([x,y],\,z)\end{aligned}$$

が成り立つので，$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall y \in S_\beta$ に対して

$$\forall z \in \mathfrak{g},\ \beta([x,y],\,z) = -\beta(y,\,[x,z]) = 0$$

が成り立つ．i.e. $[x,y] \in S_\beta$ が言えた．

(2) S_β の定義から $[\phi(x),\phi(y)]$ の形をした $[\phi(S_\beta),\phi(S_\beta)]$ の任意の元および $\forall\phi(z) \in \phi(S_\beta)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\bigl([\phi(x),\phi(y)]\circ\phi(z)\bigr) &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi([x,y])\circ\phi(z)\bigr)\\ &= \beta([x,y],\,z)\\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つので，定理 2.1.5 より $\phi(S_\beta)$ は可解である．ϕ は忠実なので $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$ であり，準同型定理から $\phi(S_\beta) \cong S_\beta/\,\mathrm{Ker}\,\phi = S_\beta$ が言える．従って (1) も併せると S_β は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルである．仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純だったから，半単純 Lie 代数の定義から $S_\beta = 0$ が言える．

■

補題 2.3.4:

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\,\mathfrak{g};\,\mathbb{K})$ であって $\forall x,\,y,\,z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x,\,[y,z]) = \beta([x,y],\,z)$$

  を充たすもの

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ であって[a]，$\forall(\mu,\,\nu) \in \{1,\,\ldots,\,\dim\mathfrak{g}\}^2$ に対して

$$\beta(e_\mu,\,e^\nu) = \delta_\mu^\nu$$

を充たすものが一意的に存在する．

(2) $\forall x \in \mathfrak{g}$ を一つ固定する．このとき $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の基底 $\{e_\mu\}$ による表現行列 $\bigl[{a_\mu}^\nu\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le\dim\mathfrak{g}}$ と，(1) の基底 $\{e^\mu\}$ による表現行列 $\bigl[{b^\mu}_\nu\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le\dim\mathfrak{g}}$ について

$${a_\mu}^\nu = -{b^\nu}_\mu$$

が成り立つ．

[a] $\mathfrak{g}^*$ の元ではないが，Einstein の規約との便宜上添字を上付きにする．

証明　(1) $\beta_{\mu\nu} := \beta(e_\mu,\, e_\nu)$ とおく．このとき $x = x^\mu e_\mu \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
\forall y = y^\nu e_\nu \in \mathfrak{g},\ \beta(x,\, y) = 0 \quad &\iff \quad \forall \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{\dim \mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{g}},\ \beta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0 \\
&\iff \quad 1 \leq \forall \nu \leq \dim \mathfrak{g},\ \beta_{\nu\mu} x^\mu = 0 \\
&\iff \quad \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{\dim \mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\bigl[\beta_{\mu\nu}\bigr] \subset \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{g}}
\end{aligned}$$

が言える．ただし 2 つ目の同値変形で β が対称であることを使った．したがって β が非退化であることは $\mathrm{Ker}\bigl[\beta_{\mu\nu}\bigr] = 0$ と同値であり，このことはさらに補題 A.4.1-(3) より $\det\bigl[\beta_{\mu\nu}\bigr] \neq 0$ と同値である[*5]．よって $\bigl[\beta_{\mu\nu}\bigr]$ の逆行列 $\bigl[\alpha^{\mu\nu}\bigr]$ が一意的に存在するので，$e^\mu := e_\nu \alpha^{\mu\nu}$ と定めると，

$$\beta(e_\mu,\, e^\nu) = \alpha^{\nu\rho} \beta_{\mu\rho} = \delta_\mu^\nu$$

が成り立つ．

(2) $\mathrm{ad}(x)(e_\mu) =: a_\mu{}^\nu e_\nu,\ \mathrm{ad}(e^\mu) =: b^\mu{}_\nu e^\nu$ とおくと，

$$\begin{aligned}
a_\mu{}^\nu &= a_\mu{}^\rho \delta_\rho^\nu \\
&= a_\mu{}^\rho \beta(e_\rho,\, e^\nu) \\
&= \beta\bigl(\mathrm{ad}(x)(e_\mu),\, e^\nu\bigr) \\
&= \beta\bigl(-[e_\mu, x],\, e^\nu\bigr) \\
&= \beta\bigl(e_\mu,\, -\mathrm{ad}(x) e^\nu\bigr) \\
&= -b^\nu{}_\rho \beta\bigl(e_\mu,\, e^\rho\bigr) \\
&= -b^\nu{}_\mu
\end{aligned}$$

■

定義 2.3.9: 忠実な表現の Casimir 演算子

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g};\, \mathbb{K})$ であって $\forall x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$ に対して

  $$\beta(x,\, [y, z]) = \beta([x, y],\, z)$$

  を充たすもの

を与える．与えられた $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ をとる．このとき

- $\mathbb{K}$-線型変換

  $$\boldsymbol{c_\phi(\beta)}\colon V \longrightarrow V,\ v \longmapsto \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)(v)$$

[*5] Cramer の公式は任意の体 $\mathbb{K}$ 上で成り立つ．

を $\beta,\ \phi$ の前 Casimir 演算子と呼ぶ.

- ϕ が忠実な表現で，かつ

$$\beta(x,\ y) \coloneqq \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y)\bigr)$$

であるとき[a]，$\beta,\ \phi$ の前 Casimir 演算子のことを **$\boldsymbol{\phi}$ の Casimir 演算子** (Casimir operator of ϕ) と呼んで $\boldsymbol{c_\phi}$ と略記する.

[a] 補題 2.3.3 よりこの β は非退化である

命題 2.3.2: Casimir 演算子の性質

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g};\ \mathbb{K})$ であって $\forall x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x,\ [y, z]) = \beta([x, y],\ z)$$

を充たすもの

を与える．与えられた $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ をとる.

(1) 前 Casimir 演算子 $c_\phi(\beta) \in \mathrm{End}(V)$ は，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), c_\phi(\beta)] = 0$$

を充たす．従って $c_\phi(\beta)$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である.

(2) ϕ が忠実な表現ならば，Casimir 演算子 $c_\phi \in \mathrm{End}\, V$ について

$$\mathrm{Tr}\, c_\phi = \dim \mathfrak{g}$$

が成り立つ.

(3) $\mathbb{K}$ が代数閉体でかつ ϕ が忠実な表現でかつ ϕ が既約表現ならば，Casimir 演算子 $c_\phi \in \mathrm{End}\, V$ は $\mathfrak{g}$ の基底の取り方によらずに

$$c_\phi = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V}\, \mathrm{id}_V$$

と書ける.

証明 (1) $\forall x,\ y,\ z \in \mathrm{End}(V)$ に対して

$$[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + y \circ [x, z]$$

が成り立つことと補題 2.3.4-(2) より，

$$
\begin{aligned}
[\phi(x), c_\phi(\beta)] &= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ [\phi(x), \phi(e^\mu)] \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \mathrm{ad}\big(\phi(x)\big)\big(\phi(e_\mu)\big) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \mathrm{ad}\big(\phi(x)\big)\big(\phi(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e_\mu)\big) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} a_\mu{}^\nu \phi(e_\nu) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} b^\mu{}_\nu \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が言えた．

(2) 補題 2.3.4-(1) より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, c_\phi &= \sum_{\mu}^{\dim\mathfrak{g}} \mathrm{Tr}\big(\phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu}^{\dim\mathfrak{g}} \beta(e_\mu,\, e^\mu) \\
&= \dim\mathfrak{g}
\end{aligned}
$$

(3) $\mathbb{K}$ が代数閉体でかつ ϕ が既約なので，(1), (2) と代数閉体上の Schur の補題から $c_\phi\colon V \longrightarrow V$ は $(\dim\mathfrak{g}/\dim V)\,\mathrm{id}_V$ に等しい．

■

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が忠実でない場合は次のように考える：まず，$\mathfrak{g}$ が半単純なので，$\mathrm{Ker}\,\phi$（$\mathfrak{g}$ のイデアルである）は系 2.2.3 から $\mathfrak{g}$ の単純イデアルの直和である．定理 2.2.2 を使って $\mathfrak{g}^\perp$ を $\mathfrak{g} =: \mathrm{Ker}\,\phi \oplus \mathfrak{g}^\perp$ で定義すると，$\mathfrak{g}^\perp \cong \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\phi$ なので，制限

$$
\phi|_{\mathfrak{g}^\perp} : \mathfrak{g}^\perp \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)
$$

は忠実な表現になる．そして $\mathfrak{g}^\perp$ の基底に対して定義 2.3.9 を適用するのである．

2.3.5 Weyl の定理

この小節では $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．[佐武 87, 第 7 章, p.80-86] に倣って Weyl の定理を証明する．

補題 2.3.5:

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を半単純 Lie 代数の有限次元表現とする．このとき

$$\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$$

が成り立つ．特に，$\dim V = 1$ ならば ϕ は零写像である[a]

---

[a] これを**自明な表現** (trivial representation) と言う．

証明【例 1.1.3】より，$\mathfrak{sl}(V)$ の基底は行列単位 e_{ij} を使って

$$\left\{ e_{ij} - e_{ji} \;\middle|\; 1 \leq i \neq j \leq \dim V \right\} \cup \left\{ e_{ii} - e_{i+1,i+1} \;\middle|\; 1 \leq i \leq \dim V - 1 \right\} = [\{e_i\}, \{e_j\}]$$

と書けた．よって $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ である．一方で $\mathfrak{g}$ が半単純なので系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であるから，

$$\phi(\mathfrak{g}) = \phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\phi(\mathfrak{g}), \phi(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$$

が言えた．特に $\dim V = 0$ ならば $\dim \mathfrak{sl}(V) = 1^2 - 1 = 0$ なので，$\operatorname{Im} \phi = 0$ である． ■

補題 2.3.6: Whitehead の補題

半単純 Lie 代数の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を与える．
このとき

$$\forall x,\, y \in \mathfrak{g},\ f([x, y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) \tag{2.3.2}$$

を充たす任意の$\mathbb{K}$-線型写像 $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ に対して，ある $v \in V$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ．

証明 **case1: ϕ が既約かつ忠実な場合**

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つとる．$\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ を 1 つ固定し，

$$\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\, y) \longmapsto \operatorname{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y)\bigr)$$

を用いて補題 2.3.4-(1) の方法で対応する $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ を作る．このとき

$$v := \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \in V$$

とおくと，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して補題 2.3.4 と同じ記号の下で

$$
\begin{aligned}
\phi(x)(v) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(x) \circ \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi\bigl(\mathrm{ad}(x)(e_\mu)\bigr) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu{}^\nu \phi(e_\nu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\
c_\phi \circ f(x) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \circ f(x) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f([e^\nu, x]) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\
&= -\sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f\bigl(\mathrm{ad}(x)(e^\nu)\bigr) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\
&= -\sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b^\nu{}_\mu \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu)
\end{aligned}
$$

と計算できるので，補題 2.3.4-(2) から

$$\phi(x)(v) = c_\phi \circ f(x)$$

が言えた．仮定より $\mathfrak{g}$-加群 V は既約なので，Schur の補題-(1), (2) から $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $c_\phi \colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の同型であり，$c_\phi^{-1}(v) \in V$ が所望のベクトルとなる．

case2: ϕ が忠実とは限らない既約表現の場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$ を 1 つとる．このとき $\forall [x, y] \in [\mathrm{Ker}\,\phi, \mathrm{Ker}\,\phi]$ に対して

$$f([x, y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [x, y] \in \mathrm{Ker}\, f$$

が言えるが，仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純なので，系 2.2.3-(3) よりそのイデアルである $\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathfrak{g}$ もまた半単純．故に系 2.2.3-(1) から $[\mathrm{Ker}\,\phi, \mathrm{Ker}\,\phi] = \mathrm{Ker}\,\phi$ であり，

$$\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathrm{Ker}\, f$$

がわかった．従ってこのとき商ベクトル空間の普遍性を使うことができ，以下の図式を可換にする $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V/\mathrm{Ker}\,\phi, \mathfrak{g})$ が一意的に存在する：

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V \\
\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\phi \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"']
\end{tikzcd}
$$

さらに商代数の普遍性から，表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は以下の図式を可換にする表現 $\overline{\phi}\colon \mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ に一意的に持ち上がる：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & \mathfrak{gl}(V) \\
\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\phi}"']
\end{tikzcd}$$

このとき $\overline{\phi}$ は $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi$ の忠実な既約表現であり，$\overline{f} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi,\, V)$ は (2.3.2) を充たす．よって **case1** からある $v \in V$ があって

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \overline{f}(x + \operatorname{Ker}\phi) = \overline{\phi}(x + \operatorname{Ker}\phi)(v) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ．

case3: ϕ が一般の場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つ固定する．このときある $v \in V$ が存在して $\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つことを $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 1$ のとき，補題 2.3.5 より ϕ が零写像なので $\forall v \in V$ に対して $\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つ．

$\dim V > 1$ とする．$\mathfrak{g}$-加群 V が既約でないならば，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $0 \subsetneq W \subsetneq V$ が存在する．標準的射影[*6] $p\colon V \longrightarrow V/W$ および $\forall x \in \mathfrak{g}$ について $W \subset \operatorname{Ker}\bigl(p \circ \phi(x)\bigr)$ であるから，商代数の普遍性より $\forall \phi(x) \in \phi(\mathfrak{g})$ に対して以下の図式を可換にする $\overline{\phi}(x) \in \mathfrak{gl}(V/W)$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "p\circ\phi(x)"] \arrow[d, "p"'] & V/W \\
V/W \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\phi}(x)"']
\end{tikzcd}$$

このとき写像

$$\phi_1\colon \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{gl}(V/W),\ x \longmapsto \bigl(v + W \mapsto \overline{\phi}(x)(v + W)\bigr)$$

は well-defined な Lie 代数の準同型なので $\mathfrak{g}$ の表現である．$f_1 \coloneqq p \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V/W)$ は ϕ_1 に関して (2.3.2) を充たすので，帰納法の仮定より[*7]ある $v_1 + W \in V/W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f_1(x) = f(x) + W = \phi_1(x)(v_1 + W)$$

が成り立つ．ここで $f_2 \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, W)$ を

$$f_2(x) \coloneqq f(x) - \phi(x)(v_1)$$

と定義すると，f_2 は部分表現 $\phi|_W\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ に関して (2.3.2) を充たす．よって帰納法の仮定から[*8]ある $v_2 \in W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f_2(x) = \phi|_W(x)(v_2)$$

[*6] このとき V の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造しか見ない．
[*7] $\dim V/W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える．
[*8] $\dim W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える．

が成り立つ．以上より，$v := v_1 + v_2 \in V$ とおけば

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = f_2(x) + \phi(x)(v_1) = \phi|_W(x)(v_2) + \phi(x)(v_1) = \phi(x)(v)$$

が言えた．

■

定理 2.3.3: 完全可約性に関する Weyl の定理

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が半単純 Lie 代数の有限次元表現ならば，ϕ は完全可約である．

証明 V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する．このとき命題 2.3.1 より，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ が存在して $V \cong W \oplus W^c$ が成り立つことを示せば良い．

$\operatorname{End} V$ の部分ベクトル空間 L_W を

$$L_W := \left\{ t \in \operatorname{End} V \;\middle|\; t(V) \subset W,\ t(W) = 0 \right\}$$

と定める．L_W への $\mathfrak{g}$ の左作用を

$$x \blacktriangleright t := [\phi(x), t]$$

と定義すると，W が部分 $\mathfrak{g}$-加群であることおよび定義 2.3.7 より L_W は $\mathfrak{g}$-加群になる．i.e.

$$\tilde{\phi}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(L_W),\ x \longmapsto \bigl(t \longmapsto x \blacktriangleright t\bigr)$$

は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現である．

ここで $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W への射影演算子[*9] $p\colon V \longrightarrow V$ を 1 つとり，$f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, L_W)$ を

$$f(x) := [p, \phi(x)]$$

と定義しよう．このとき $\forall x,\, y \in \mathfrak{g}$ に対して Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned}
f([x,y]) &= [p, [\phi(x), \phi(y)]] \\
&= [\phi(x), [p, \phi(y)]] - [\phi(y), [p, \phi(x)]] \\
&= [\phi(x), f(y)] - [\phi(y), f(x)] \\
&= \tilde{\phi}(x) \circ f(y) - \tilde{\phi}(y) \circ f(x)
\end{aligned}$$

が成り立つので，補題 2.3.6 からある $t \in L_W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \tilde{\phi}(x)(t) = [\phi(x), t]$$

が成り立つ．よってこのとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), p + t] = \tilde{\phi}\bigl(\phi(x)\bigr)\bigl(p + t\bigr) = -[p, \phi(x)] + [\phi(x), t] = -f(x) + [\phi(x), t] = 0$$

が言えた．i.e. $p + t \in \operatorname{End} V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．さらに $t \in L_W$ であることから，$(p+t)(V) = W$ かつ $(p+t) \circ (p+t)|_W = \mathrm{id}_W$ が言える．i.e. $\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \hookrightarrow \operatorname{Ker}(p+t) \hookrightarrow V \xrightarrow{p+t} W \longrightarrow 0$$

[*9] $p^2 = p$ かつ $p|_W = \mathrm{id}_W$

は分裂し，$\mathfrak{g}$-加群の直和として

$$V \cong W \oplus \mathrm{Ker}(p+t)$$

が言えた． ■

2.3.6 Jordan 分解の保存

この小節でも引き続き $\mathbb{K}$ を標数 0 の代数閉体とする．

部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ に関して

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(x) \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g},\ v \longmapsto [x, v]$$

と定義する[*10]．

定理 2.3.4: Jordan-Chevalley 分解と抽象 Jordan 分解

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を半単純線型 Lie 代数とする．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ の Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ について $x_s,\ x_n \in \mathfrak{g}$ が成り立つ．特に，x の抽象 Jordan 分解 $s_x,\ n_x \in \mathfrak{g}$ に関して $x_s = s_x,\ x_n = n_x$ が成り立つ．

証明 後半の主張は Jordan-Chevalley 分解および抽象 Jordan 分解の一意性より従うので，前半を示せば良い．

$\forall x \in \mathfrak{g}$ を 1 つ固定し，x の Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ をとる．$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)(\mathfrak{g}) = [x, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ なので命題 2.1.1-(3) より $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_s)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_n)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ が言える．i.e. 正規化代数の言葉を使うと $x_s,\ x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) =: N$ が言える[*11]．

包含準同型 $\iota \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto x$ によって V を $\mathfrak{g}$-加群と見做し，V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 W をとる．このとき $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $L_W \subset \mathfrak{gl}(V)$ を

$$L_W := \left\{\, y \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; y(W) \subset W \ \text{ かつ }\ \mathrm{Tr}(y|_W) = 0 \,\right\}$$

と定義する[*12]．仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純 Lie 代数なので系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であり，$\mathfrak{g} \subset L_W$ が言える．さらにこのとき命題 2.1.1-(3) より $x_s,\ x_n \in L_W$ も言える[*13]．

ここで

$$\mathfrak{g}' := N \cap \left(\bigcap_{\substack{W \subset V, \\ \text{部分}\mathfrak{g}\text{-加群}}} L_W \right)$$

とおくと，$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ をイデアルとしてもつ N の部分 Lie 代数であり，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $x_s,\ x_n \in \mathfrak{g}'$ だとわかる．

[*10] $x \in \mathfrak{h}$ ならば，部分 Lie 代数の定義から $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(x) \subset \mathfrak{h}$ となる．この意味で $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ と書いても良い．
[*11] 補題 2.3.5 より $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ なので $\mathfrak{g} \subsetneq N$ であることに注意
[*12] 例えば $L_V = \mathfrak{sl}(V)$ である
[*13] $\mathrm{Tr}(x_n) = 0$ なので，$\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}(x_s) = 0$．

最後に $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'$ が成り立つことを示す．随伴表現 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}\colon \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$ の $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}'$ への制限 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}|_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$ によって $\mathfrak{g}'$ を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群と見做すと $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}'$ 自身は $\mathfrak{g}'$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群なので[*14]，命題 2.3.1 および Weyl の定理よりある $\mathfrak{g}'$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $\mathfrak{h}$ が存在して $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ と書ける．示すべきは $\mathfrak{h}=0$ である．ここで V の任意の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群 W をとる[*15]．$\forall y\in\mathfrak{h}$ を 1 つとると，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}']\subset\mathfrak{g}$[*16]であることから $[\iota(\mathfrak{g}),y]=[\mathfrak{g},y]=0$, i.e. $y\colon V\longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．よって代数閉体上の Schur の補題から $y|_W\colon W\longrightarrow W$ はスカラー倍である．一方で $y\in L_W$ でもあるので $\mathrm{Tr}(y|_W)=0$ であり，$y|_W=0$ だと分かった．Weyl の定理より V は既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和であり，W は任意だったので $y=0$ が言えた．i.e. $\mathfrak{h}=0$ が示された．

■

系 2.3.5:

> $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数，$\phi\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ をその有限次元表現とする．
> このとき $\forall x\in\mathfrak{g}$ の抽象 Jordan 分解 $x=s_x+n_x$ に対して，$\phi(x)=\phi(s_x)+\phi(n_x)\in\mathfrak{gl}(V)$ は Jordan-Chevalley 分解である．i.e. $\phi(x)_s=\phi(s_x)$, $\phi(x)_n=\phi(n_x)$ が成り立つ．

<u>**証明**</u> s_x は半単純なので $\mathrm{ad}(s_x)\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ も半単純．i.e. $\mathrm{ad}(s_x)$ は対角化可能なので $\mathrm{ad}(s_x)$ の固有ベクトル全体がなす集合は $\mathfrak{g}$ の基底となる．従って $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\big(\phi(s_x)\big)\colon\phi(\mathfrak{g})\longrightarrow\phi(\mathfrak{g})$ の $\phi(\mathfrak{g})$ の固有ベクトル全体がなす集合は $\phi(\mathfrak{g})$ の基底となる．i.e. $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\big(\phi(s_x)\big)$ は半単純である．同様に $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\big(\phi(n_x)\big)$ が冪零であることもわかるので，$\phi(x)=\phi(s_x)+\phi(n_x)$ は半単純 Lie 代数 $\phi(\mathfrak{g})$ における $\phi(x)$ の抽象 Jordan 分解である．よって定理 2.3.4 からこれは Jordan-Chevalley 分解と一致する． ■

> **!** 定理 2.3.4 および系 2.3.5 の意味で Jordan-Chevalley 分解と抽象 Jordan 分解は同一視できるので，以後抽象 Jordan 分解のことも $x=s_x+n_x$ の代わりに $x=\boldsymbol{x_s}+\boldsymbol{x_n}$ と表記する．

2.4 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の表現

この節において常に $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ とし，$\mathfrak{g}$ の全ての表現は有限次元であるとする．【例 **1.1.3**】に倣って $\mathfrak{g}$ の基底は

$$x:=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\qquad y:=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\qquad h:=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

を採用する．このとき

$$[h,x]=2x,\qquad [h,y]=-2y,\qquad [x,y]=h$$

が成り立つ．

2.4.1 ウエイトと極大ベクトル

[*14] $\forall x\in\mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}|_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{g})=[x,\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$.
[*15] ここでは包含準同型 $\iota\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ によって V を $\mathfrak{g}$ 加群と見做している．
[*16] $\mathfrak{g}'\subset N$ だから

任意の $\mathfrak{g}$ の表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を与える．h は半単純なので系 2.3.5 より $\phi(h)$ を対角化する V の基底がある．よって

$$V_\lambda := \left\{ v \in V \;\middle|\; h \blacktriangleright v = \lambda v \right\}$$

とおくと V は異なる λ に関する V_λ の内部直和になる（固有空間分解）[*17]：

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda$$

特に $V_\lambda \neq 0$ のとき λ を h の**ウエイト** (weight) と呼び，V_λ を**ウエイト λ のウエイト空間** (weight space of weight λ) と呼ぶ.

補題 2.4.1:

$$v \in V_\lambda \quad\Longrightarrow\quad x \blacktriangleright v \in V_{\lambda+2},\ y \blacktriangleright v \in V_{\lambda-2}$$

証明

$$h \blacktriangleright (x \blacktriangleright v) = [h, x] \blacktriangleright v + x \blacktriangleright h \blacktriangleright v = (\lambda + 2) x \blacktriangleright v$$

■

$\dim V < \infty$ なので，$V_\lambda \neq 0$ かつ $V_{\lambda+2} = 0$ を充たす $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在する．一般に，ウエイト λ のウエイト空間 V_λ の非零な元 $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ であって，$x \blacktriangleright v = 0 \in V_{\lambda+2}$ を充たすものは**ウエイト λ の極大ベクトル** (maximal vector of weight λ) と呼ばれる．

2.4.2 既約表現の分類

$\mathfrak{g}$-加群 V は既約であるとする．極大ベクトル $v_0 \in V_\lambda$ をとり，

$$v_i := \begin{cases} 0, & i = -1 \\ \dfrac{1}{i!} y^i \blacktriangleright v_0, & i \geq 0 \end{cases}$$

とおく．

補題 2.4.2:

(1) $h \blacktriangleright v_i = (\lambda - 2i) v_i$
(2) $y \blacktriangleright v_i = (i+1) v_{i+1}$
(3) $x \blacktriangleright v_i = (\lambda - i + 1) v_{i-1}$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i \geq 0$

証明 (1) 補題 2.4.1 より明らか．

[*17] λ が h の固有値でなければ $V_\lambda = 0$ となる．

(2) v_i の定義より

$$y \blacktriangleright v_i = \frac{1}{i!} y^{i+1} \blacktriangleright v_0 = (i+1) v_{i+1}$$

(3) i に関する数学的帰納法により示す．$i = 0$ のときは自明．$i > 0$ とする．帰納法の仮定より $x \blacktriangleright v_{i-1} = (\lambda - i + 2) v_{i-2}$ であるから，

$$\begin{aligned} x \blacktriangleright v_i &= \frac{1}{i} x \blacktriangleright y \blacktriangleright v_{i-1} \\ &= \frac{1}{i} [x, y] \blacktriangleright v_{i-1} + \frac{1}{i} y \blacktriangleright (x \blacktriangleright v_{i-1}) \\ &= \frac{\lambda - 2i + 2}{i} v_{i-1} + \frac{(\lambda - i + 2)(i-1)}{i} v_{i-1} \\ &= (\lambda - i + 1) v_{i-1} \end{aligned}$$

が言えて帰納法が完成する．

■

補題 2.4.2-(1) より 0 でない $v_i \in V$ たちは全て線型独立であるが，$\dim V < \infty$ である．そこで

$$m \coloneqq \min\left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; v_m \neq 0 \text{ かつ } v_{m+1} = 0 \right\}$$

とおく．$\forall i > 0$ に対して帰納的に $v_{m+i} = 0$ がわかるので，補題 2.4.2-(1), (2), (3) より $\mathrm{Span}\{v_0, \dots, v_m\} \subset V$ は非零な部分 $\mathfrak{g}$-加群である．$\mathfrak{g}$ は既約だったので $V = \mathrm{Span}\{v_0, \dots, v_m\}$ が言えた．

補題 2.4.2-(3) を $i = m+1$ の場合に適用すると $0 = (\lambda - m) v_m$ となり，$\lambda = m = \dim V - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がわかる．この m を $\mathfrak{g}$-加群 V の**最高ウエイト** (highest weight) と呼ぶ．さらに，補題 2.4.2-(1) より h のウエイトは全て異なる．i.e. $0 \leq \forall \mu \leq m$ に対して，対応するウエイト空間の次元 $\dim V_{m-2\mu} = 1$ である．特に最高ウエイトは $\dim V$ によって一意に決まるので，$v_0 \in V_m$ は零でないスカラー倍を除いて一意に定まる．

以上の考察をまとめて次の定理を得る：

定理 2.4.1:

V を $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の既約表現とする．

(1) $m \coloneqq \dim V - 1$ とおくと <u>$\mathbb{K}$-ベクトル空間として</u>

$$V = \bigoplus_{\mu=0}^{m} V_{m-2\mu} \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad 0 \leq \forall \mu \leq m,\ \dim V_{m-2\mu} = 1$$

が成り立つ．

(2) V の極大ベクトルは零でないスカラー倍を除いて一意に決まり，そのウエイトは m である．

(3) $\mathfrak{g}$ の V への作用は補題 2.4.2 によって完全に決まる．

系 2.4.2:

V を任意の有限次元 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とする．このとき $\phi(h) \colon V \longrightarrow V$ の固有値は全て整数で，かつ自身にマイナス符号をつけたものとちょうど同じ回数だけ出現する．さらに，V の任意の既約表現への内部直和分解において，直和因子の個数はちょうど $\dim V_0 + \dim V_1$ 個である．

証明 $V=0$ なら明らか．$V\neq 0$ とする．Weyl の定理により V を既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和に分解すると，既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群は全て定理 2.4.1-(1) の形をしているので前半が従う．

後半を示す．V の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群への直和分解を

$$V=\bigoplus_i W_i$$

と書くと，定理 2.4.1 より $\forall i$ に対して何かしらの $m_i\geq 0$ が存在して $W_i\cong\bigoplus_{\mu=0}^{m_i}V_{m_i-2\mu}$ と書ける．逆に $\forall m\geq 0$ に対して，$\bigoplus_{\mu=0}^{m}V_{m-2\mu}$ と $\mathfrak{g}$-加群として同型な全ての W_i の直和を $V^{(m)}$ と書くと，

$$V=\bigoplus_{m=0}^{\infty}V^{(m)}$$

となる．よって $V^{(m)}$ の直和因子の個数を k_m とかくと

$$\dim V_\lambda=\sum_{\substack{m\geq|\lambda|,\\ m\equiv\lambda \mod 2}}k_m$$

となる．特に

$$\dim V_0+\dim V_1=\sum_{m=0}^{\infty}k_m$$

なので示された． ■

2.5 ルート空間分解

この節では体 $\mathbb{K}$ を標数 0 の代数閉体とし，$\mathfrak{g}\neq 0$ を体 $\mathbb{K}$-上の半単純 Lie 代数とする．

2.5.1 極大トーラスとルート

もし $\forall x\in\mathfrak{g}$ が冪零ならば $\mathrm{ad}(x)\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ もまた冪零であり[*18]，従って Engel の定理から $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数となる．然るにこれは $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数であることに矛盾する[*19]．

従って冪零でない $x\in\mathfrak{g}$ が存在するが，このとき x の抽象 Jordan 分解[*20] $x=x_s+x_n$ w/ $x_s, x_n\in\mathfrak{g}$ において $x_s\neq 0$ である．このことは，半単純成分のみで構成される $\mathfrak{g}$ の自明でない部分 Lie 代数の存在を示唆する．

定義 2.5.1: トーラス

$\mathfrak{g}$ の 0 でない部分 Lie 代数 $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{g}$ が**トーラス** (toral subalgebra) であるとは，$\forall x\in\mathfrak{t}$ の抽象 Jordan 分解 $x=x_s+x_n$ において $x_n=0$ であることを言う．

[*18] $\mathrm{ad}\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 代数の準同型なので．

[*19] 一般に冪零 Lie 代数 $\Longrightarrow$ 可解 Lie 代数だが，系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\Longrightarrow$ $\mathfrak{g}$ は可解 Lie 代数でない $\Longrightarrow$ $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数でない．

もしくは，命題 1.1.4-(4) から $\mathfrak{g}\neq 0$ かつ $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数 $\Longrightarrow$ $\mathfrak{g}$ は半単純 Lie 代数でない

[*20] 系 2.3.5 の注意に従って抽象 Jordan 分解をこのように表記する．

補題 2.5.1: トーラスは可換

$\mathfrak{g}$ の任意のトーラス $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ は Lie ブラケットについて可換である．

証明 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ のトーラスとする．$\forall x \in \mathfrak{t}$ を 1 つ固定する．示すべきは $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(x) = 0$ が成り立つことであるが，$\mathfrak{t}$ がトーラスであるという仮定より $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は半単純 $\iff$ 対角化可能だから，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(x)$ の固有値が全て 0 であることを背理法により示す．

$\exists y \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$, $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $[x, y] = \lambda y$ を仮定する．このとき $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)(x) = -\lambda y$ は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)$ の固有値 0 に属する固有ベクトルである．一方で $y \in \mathfrak{t}$ なので $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{t})$ は対角化可能であり，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)$ の固有ベクトル $v_1, \dots, v_{\dim \mathfrak{t}} \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$ は $\mathfrak{t}$ の基底をなす[*21]．従って $x = \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{t}} x^\mu v_\mu$ と書けるが，このとき

$$0 = \mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)\big(\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)(x)\big) = \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{t}} (\lambda_\mu)^2 x^\mu v_\mu$$

が成り立つ．v_μ の線型独立性から $(\lambda_\mu)^2 x^\mu = 0$ だが，x は任意だったので $\lambda_1 = \dots = \lambda_{\dim \mathfrak{t}} = 0$[*22]，i.e. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y) = 0$ が分かった．然るにこれは仮定に矛盾し，背理法が完成した． ■

$\mathfrak{g}$ のトーラスのうち極大なもの[*23]を 1 つ固定し，それを $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ と書こう．$\mathfrak{h}$ は**極大トーラス** (maximal toral subalgebra) と呼ばれる．

! $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数なので，$\mathfrak{g}$ の極大トーラスは後述する **Cartan 部分代数** (Cartan subalgebra; CSA) と一致する．極大トーラスを $\mathfrak{t}$ ではなく $\mathfrak{h}$ と書くのは慣習であり，CSA を $\mathfrak{h}$ と書くことに対応していると思われる．

ここで，与えられた $h \in \mathfrak{h}$ に対して線型変換 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の固有値のうちのどれか 1 つを返す写像

$$\alpha \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K},\ h \longmapsto \alpha(h) \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \exists x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\},\ \alpha(h)x := \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x)$$

を考えよう．このとき $\mathfrak{g}_\alpha$ の部分ベクトル空間[*24] $\mathfrak{g}_\alpha$ を

$$\mathfrak{g}_\alpha := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall h \in \mathfrak{h},\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x) = \alpha(h)x \right\}$$

と定義すると，$\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ ならば $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ だとわかる．[*25] 一方，補題 2.5.1 より $\forall h, k \in \mathfrak{h}$ に対して $[\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h), \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(k)] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}([h, k]) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(0) = 0$ が成り立つ，i.e. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(k) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は互いに可換な線型変換なので，$\forall \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h) \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は同時対角化可能である．従って $\mathfrak{g}$ の固有空間分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha \tag{2.5.1}$$

[*21] 固有ベクトル v_μ は固有値 λ_μ に属するとする．なお，以下では Einstein の規約を使わない．

[*22] 体は整域なので．

[*23] トーラス $\mathfrak{t} \subsetneq \mathfrak{g}$ が存在して $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$ が成り立つならば $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$.

[*24] $\alpha \neq 0$ のとき $\mathfrak{g}_\alpha$ は部分 Lie 代数ではない．実際，$\forall x, y \in \mathfrak{g}_\alpha$ および $\forall h \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)([x, y]) = [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x), y] + [x, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(y)] = 2\alpha(h)[x, y]$ となり，$\alpha(h) \neq 0$ ならば $[x, y] \notin \mathfrak{g}_\alpha$ である．

[*25] $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ なので $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ が存在する．このとき $\forall h, h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して $\alpha(h)x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x)$, $\alpha(h_i)x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_i)(x)$ が成り立つが，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数なので $h_1 + h_2, \lambda h \in \mathfrak{h}$ であること，および $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の線型性から

$$\alpha(h_1 + h_2)x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_1 + h_2)(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_1)(x) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_2)(x) = \big(\alpha(h_1) + \alpha(h_2)\big)x,$$
$$\alpha(\lambda h)x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\lambda h)(x) = \lambda\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x) = \big(\lambda \alpha(h)\big)x$$

が言える．$x \neq 0$ なので $\alpha(h_1 + h_2) = \alpha(h_1) + \alpha(h_2)$, $\alpha(\lambda h) = \lambda \alpha(h)$, i.e. $\alpha \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$ が線型写像であることが分かった．

が成り立つ．特に $\dim \mathfrak{g} < \infty$ であることから集合

$$\Phi := \left\{ \alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \;\middle|\; \mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \right\}$$

は有限集合になるので，(2.5.1) は有限個の直和として

$$\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{2.5.2}$$

と書くこともできる[*26]．Φ の元のことを $\mathfrak{g}$ の**ルート** (root) と呼び，(2.5.2) のことを $\mathfrak{g}$ の**ルート空間分解** (root space decomposition)[*27] と呼ぶ．

命題 2.5.1:

$\kappa \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とする．$\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ に対して以下が成り立つ：

(1) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$
(2) $\alpha \neq 0 \implies \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は冪零である．
(3) $\alpha + \beta \neq 0 \implies \kappa$ について $\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_\beta$ は直交する．i.e. $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta} = 0$
(4) κ に関する $\mathfrak{g}_\alpha$ の直交補空間は

$$\mathfrak{g}_\alpha{}^\perp = \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}} \mathfrak{g}_\gamma$$

と書ける．

<u>**証明**</u> (1) $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\forall y \in \mathfrak{g}_\beta$ をとる．このとき $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の像が微分であることから，$\forall h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)([x, y]) &= [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x), y] + [x, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(y)] \\ &= \bigl(\alpha(h) + \beta(h)\bigr)[x, y] \\ &= (\alpha + \beta)(h)[x, y]\end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である．

(2) $\alpha \neq 0$ とし，$\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$ を 1 つとる．(2.5.1) が $\mathfrak{g}$ の直和分解なので，$\forall \beta \in \mathfrak{h}^*$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)\bigr)^n(\mathfrak{g}_\beta) = 0$ を充たすことを示せばよい．

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)\bigr)^n(\mathfrak{g}_\beta) \neq 0$ が成り立つと仮定する．ところが (1) よりこれは $0 \subsetneq \bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)\bigr)^n(\mathfrak{g}_\beta) \subset \mathfrak{g}_{n\alpha+\beta}$ を意味し，$\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ が有限集合であることに矛盾する．従って背理法により示された．

(3) 仮定より $\alpha + \beta \neq 0 \in \mathfrak{h}^*$ なので，ある $h \in \mathfrak{h}$ が存在して $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$ を充たす．このとき

[*26] 中心化代数の定義を思い出すと $\mathfrak{g}_0 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ である．
[*27] **Cartan 分解** (Cartan decomposition) と呼ぶこともある．

$\forall (x,\, y) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$ をとると

$$\begin{aligned} \alpha(h)\kappa(x,\, y) &= \kappa\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x),\, y\bigr) \\ &= -\kappa([x, h],\, y) \\ &= -\kappa(x,\, [h, y]) \\ &= -\kappa\bigl(x,\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(y)\bigr) \\ &= -\beta(h)\kappa(x,\, y) \end{aligned}$$

が成り立つので $\kappa(x,\, y) = 0$ が言えた．

(4) (3) より

$$\mathfrak{g}_\alpha{}^\perp \supset \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}} \mathfrak{g}_\gamma \tag{2.5.3}$$

がわかる．定理 2.2.1 より κ は非退化なので，$\mathfrak{g}$ が有限次元であることから

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha{}^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\alpha$$

が成り立つ．よって (2.5.3) から $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} \le \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\alpha \iff \dim \mathfrak{g}_\alpha \le \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が言える．$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ は任意だったので $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} \le \dim \mathfrak{g}_\alpha$ も言えて $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が従う．故に

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha{}^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = \dim \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}} \mathfrak{g}_\gamma$$

が成り立ち，(2.5.3) の包含が等号だと分かった．

■

系 2.5.1:

$\kappa|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$ は非退化である．

証明 命題 2.5.1-(4) より $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_0{}^\perp = 0$，i.e. $\kappa|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$ は非退化である． ■

2.5.2　極大トーラスの中心化代数

補題 2.5.2:

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x,\, y \in \mathrm{End}\, V$ は $[x, y] = 0$ を充たす（i.e. 互いに可換）とする．このとき，$x,\, y$ のどちらか一方が冪零ならば $x \circ y$ も冪零である．特に $\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$ が成り立つ．

証明 x が冪零であるとする．このときある $n > 0$ が存在して $x^n = 0$ となるので，$[x, y] = 0 \iff x \circ y = y \circ x$ より $(x \circ y)^n = y^n \circ x^n = 0$ が言える．特に $x \circ y$ の表現行列を $\mathfrak{n}(\dim V,\, \mathbb{K})$ の元にするような V の基底が存在するので $\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$ である． ■

命題 2.5.2:

$\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h}$ に対して，

$$\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\ (= \mathfrak{g}_0)$$

<u>証明</u> $C \coloneqq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ とおく．命題 2.5.1 より $\mathfrak{h}$ は可換なので $\mathfrak{h} \subset C$ が成り立つ．$x \in \mathfrak{g}$ の抽象 Jordan 分解を $x = x_s + x_n$ と書く．

step1: $\forall x = x_s + x_n \in C$ に対して $x_s,\, x_n \in C$

$x \in C \iff \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{h}) = 0$ である．このとき命題 2.1.1-(3) より $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_s(\mathfrak{h}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_n(\mathfrak{h}) = 0$ が言える．系 2.3.5 より $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_s = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s)$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_n = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$ なので示された．

step2: $\forall x = x_s + x_n \in C$ に対して $x_s \in \mathfrak{h}$

$\forall x = x_s + x_n \in C$ をとる．このとき $\forall h \in \mathfrak{h}$ に対して $0 = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(0) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}([h, x]) = [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h), \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)] = 0$ が成り立つので $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h), \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x), \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は同時対角化可能であり，従って $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h + x_s) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ もまた半単純だとわかる．従って $\mathfrak{h} + \mathbb{K}x_s$ は $\mathfrak{h}$ を含む $\mathfrak{g}$ のトーラスだが，$\mathfrak{h}$ の極大性より $\mathfrak{h} + \mathbb{K}x_s = \mathfrak{h}$，i.e. $x_s \in \mathfrak{h}$ が言えた．

step3: $\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ が非退化

$\forall h \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ をとる．このとき $\kappa(h,\, \mathfrak{h}) = 0$ が成り立つ．示すべきは $h = 0$ である．

ところで，$x \in C$ が冪零ならば，$[x, \mathfrak{h}] = 0$ かつ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ が冪零であることから補題 2.5.2 が使えて $\kappa(x,\, y) = \mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y)\bigr) = 0$ が言える．i.e. $\kappa(x,\, \mathfrak{h}) = 0$ が成り立つ．ここで $\forall y = y_s + y_n \in C$ をとると，**(step2)** から $y_s \in \mathfrak{h}$ なので h の取り方から $\kappa(y_s,\, h) = 0$ がわかり，**(step1)** から $y_n \in C$ がわかるが，y_n は冪零なので結局 $\kappa(y,\, h) = \kappa(y_n,\, h) = 0$ だと分かった．$y \in C$ は任意だったのでこのことは $h \in C^{\perp}$ を意味するが，系 2.5.1 より $\kappa|_{C\times C}$ は非退化なので $h = 0$ が言えた[*28]．

step4: C は冪零 Lie 代数

$\forall x = x_s + x_n \in C$ をとる．**(step2)** より $x_s \in \mathfrak{h}$ であり，$\mathrm{ad}_C(x) = 0$ は冪零である．一方 $\mathrm{ad}_C(x_n)$ は定義から冪零なので，$\mathrm{ad}_C(x) = \mathrm{ad}_C(x_s) + \mathrm{ad}_C(x_n)$ も冪零である．よって Engel の定理から C は冪零 Lie 代数である．

step5: $\mathfrak{h} \cap [C,\, C] = 0$

κ は Lie ブラケットについて結合的なので，$[\mathfrak{h}, C] = 0$ と併せて $\kappa(\mathfrak{h},\, [C, C]) = 0$ を得る．従って **(step3)** より $\mathfrak{h} \cap [C, C] = 0$ が言えた．

step6: C は可換

背理法により示す．$[C, C] \neq 0$ とする．**(step4)** より C は冪零 Lie 代数で，かつ $[C, C] \subset C$ はそのイデアルであるから，このとき補題 1.1.5 が使えて $Z(C) \cap [C, C] \neq 0$ が言える．i.e. $z = z_s + z_n \in (Z(C) \cap [C, C]) \setminus \{0\}$ が存在する．**(step2)**, **(step5)** より $z_n \neq 0$ でなくてはならない．よって **(step1)** から $z_n \in C \setminus \{0\}$ と言うことになる．一方，命題 2.1.1-(2) より $\forall c \in C$ に対して $0 = [z, c] = [z_s, c] + [z_n, c]$ だが，**(step2)** より $z_s \in \mathfrak{h}$ なので $[z_s, c] = 0$ であり，$[z_n, c] = 0$，i.e. $z_n \in Z(C)$ となる．よって補題 2.5.2 から $\kappa(z_n,\, C) = 0$ が言えて，系 2.5.1 から $z_n = 0$ ということになり，$z_n \neq 0$ と矛盾する．

step7: $C = \mathfrak{h}$

背理法により示す．$C \neq \mathfrak{h}$ とすると，ある $x = x_s + x_n \in C$ が存在して $x_n \neq 0$ となる．このとき **(step1)** より $x_n \in C \setminus \{0\}$ であり，**(step6)** および補題 2.5.2 から $\forall y \in C$ に対して $\kappa(x_n,\, y) = \mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{ad}(x_n) \circ \mathrm{ad}(y)\bigr) = 0$ を充たすことになり，系 2.5.1 に矛盾する．

[*28] $\mathfrak{h} \subset C$ より $h \in C \cap C^{\perp}$.

■

系 2.5.2:

$\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化である．

<u>**証明**</u> 系 2.5.1 に命題 2.5.2 を用いるだけである． ■

$\mathbb{K}$-線型写像

$$\tilde{\kappa}\colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*,\ h \longmapsto \bigl(x \longmapsto \kappa(h,\, x)\bigr) \tag{2.5.4}$$

を考える．すると κ に関する $\mathfrak{h}$ の直交補空間の定義を思い出して

$$\operatorname{Ker}\tilde{\kappa} = \left\{\, h \in \mathfrak{h} \,\middle|\, \forall x \in \mathfrak{h},\ \kappa(h,\, x) = 0 \,\right\} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$$

となることがわかるが，系 2.5.2 より $\operatorname{Ker}\tilde{\kappa} = 0$ が言える．i.e. $\tilde{\kappa}$ は単射である．$\dim\mathfrak{h} = \dim\mathfrak{h}^*$ なので，補題 A.4.1-(3) から **$\tilde{\kappa}$ は $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である．** 従って $\forall\alpha \in \mathfrak{h}^*$ が与えられたとき，$\forall h \in \mathfrak{h}$ に対して $\alpha(h) = \kappa(\boldsymbol{t_\alpha},\, h) = \tilde{\kappa}(\boldsymbol{t_\alpha})(h)$ を充たすような $\boldsymbol{t_\alpha} \in \mathfrak{h}$ が存在する．

2.5.3 直交性

命題 2.5.3: ルートの直交性

- 体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$ のルート全体の集合 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$

を与える．$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を命題 2.5.2 によって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

と書く．このとき，以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{h}^* = \operatorname{Span}\Phi$

(2) $\alpha \in \Phi \implies -\alpha \in \Phi$

(3) $\forall\alpha \in \Phi$ および $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対して，$[x, y] = \kappa(x,\, y)t_\alpha$

(4) $\alpha \in \Phi \implies [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \operatorname{Span}\{t_\alpha\}$

(5) $\alpha \in \Phi \implies \alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha,\, t_\alpha) \neq 0$

(6) $\forall\alpha \in \Phi$ および $\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ に対して $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在し，$h_\alpha := [x_\alpha, y_\alpha] \in \mathfrak{h}$ とおくと

$$x_\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y_\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h_\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

を線型に拡張することで定義される $\mathbb{K}$-線型写像

$$\operatorname{Span}\{\, x_\alpha,\, y_\alpha,\, h_\alpha \,\} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\, \mathbb{K})$$

が Lie 代数の同型写像になる．

(7)

$$h_\alpha = \frac{2}{\kappa(t_\alpha,\, t_\alpha)} t_\alpha, \quad h_\alpha = -h_{-\alpha}$$

証明 (1) 背理法により示す．$\mathfrak{h}^* \supsetneq \operatorname{Span}\Phi$ を仮定する．このとき $\operatorname{Span}\Phi$ の基底 $\{\, \varepsilon^\mu \,\}_{1\le\mu\le r}$ $(r < \dim\mathfrak{h})$ を 1 つ固定すると，線型独立な $\dim\mathfrak{h} - r > 0$ 個の元 $\varepsilon^{r+1},\, \dots,\, \varepsilon^{\dim\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^* \setminus \Phi$ が存在して $\{\, \varepsilon^\mu \,\}_{1\le\mu\le r} \cup \{\, \varepsilon^\nu \,\}_{r+1\le\nu\le\dim\mathfrak{h}}$ が $\mathfrak{h}^*$ の基底になる．さらに $\dim\mathfrak{h} < \infty$ なので $\mathfrak{h}^*$ の基底 $\{\, \varepsilon^\mu \,\}_{1\le\mu\le\dim\mathfrak{h}}$ の双対基底 $\{\, e_\mu \in \mathfrak{h} \,\}_{1\le\mu\le\dim\mathfrak{h}}$ をとることができるが，このとき $r+1 \le \nu \le \dim\mathfrak{h}$ を充たす ν が少なくとも 1 つ存在して $e_\nu \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ が $\forall\alpha = \sum_{\mu=1}^r \alpha_\mu \varepsilon^\mu \in \Phi$ に対して $\alpha(e_\nu) = \sum_{\mu=1}^r \alpha_\mu \quad \varepsilon^\mu(e_\nu) = 0$ を充たす．このような e_ν のうちのどれか 1 つを h とおこう．

このとき $\mathfrak{g}_\alpha$ の定義から，$\forall\alpha \in \Phi$ に対して $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ が成り立つ．一方で，補題 2.5.1 より $[h, \mathfrak{h}] = 0$ であるから，命題 2.5.2 より $[h, \mathfrak{g}] = \bigl[h, \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha\bigr] = [h, \mathfrak{h}] \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} [h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0 \iff h \in Z(\mathfrak{g})$ がわかる．然るに $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数であることから $Z(\mathfrak{g}) = 0$ であり $h = 0$ と言うことになって矛盾．

(2) $\alpha \in \Phi$ とする．背理法により $-\alpha \in \Phi$ を示す．$-\alpha \notin \Phi$ を仮定する．このとき $\mathfrak{g}_{-\alpha} = 0$ であるから $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}} = 0$ であり，命題 2.5.1-(3) と併せると $\forall\beta \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta} = 0$ がわかる．よって κ の双線型性から $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}} = 0$, i.e. κ の radical S_κ について $0 \subsetneq \mathfrak{g}_\alpha \subset S_\kappa$ と言うことになって $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数であることに矛盾（定理 2.2.1）．

(3) $\forall\alpha \in \Phi$ および $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を 1 つずつとる．$\forall h \in \mathfrak{h}$ を 1 つ固定しよう．$\kappa \in L(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g};\, \mathbb{K})$ は対称かつ Lie ブラケットについて結合的なので

$$\begin{aligned}
\kappa(h,\, [x, y]) &= \kappa([h, x],\, y) \\
&= \kappa\bigl(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x),\, y\bigr) \\
&= \alpha(h)\kappa(x,\, y) \\
&= \kappa(t_\alpha,\, h)\kappa(x,\, y) \\
&= \kappa\bigl(\kappa(x,\, y)t_\alpha,\, h\bigr) \\
&= \kappa\bigl(h,\, \kappa(x,\, y)t_\alpha\bigr)
\end{aligned}$$

がわかる．$h \in \mathfrak{h}$ は任意だったので $\kappa\bigl(h,\, [x, y] - \kappa(x,\, y)t_\alpha\bigr) = 0$, i.e. κ に関する直交補空間の意味で $[x, y] - \kappa(x,\, y)t_\alpha \in \mathfrak{h}^\perp$ だと分かった．一方で，命題 2.5.1-(1)，命題 2.5.2 より $[x, y] \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ が言えて，かつ定義より $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ なので，$[x, y] - \kappa(x,\, y)t_\alpha \in \mathfrak{h}$ である．以上より $[x, y] - \kappa(x,\, y)t_\alpha \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ が分かったが，系 2.5.2 より $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$ なので $[x, y] - \kappa(x,\, y)t_\alpha = 0 \iff [x, y] = \kappa(x,\, y)t_\alpha$ が示された．

(4) $\alpha \in \Phi$ とする．(3) より，$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$ を示せば十分である．$\alpha \in \Phi$ なので，$x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ が存在する．もし $\kappa|_{\{x\}\times\mathfrak{g}_{-\alpha}} = 0$ ならば (2) の証明と同様の議論により $\kappa|_{\{x\}\times\mathfrak{g}} = 0$, i.e. $x \in S_\kappa$ と言う事になり定理 2.2.1 に矛盾．よって背理法からある $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在して $\kappa(x,\, y) \neq 0$ を充たす．従って (3) から $[x, y] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \setminus \{0\}$ が言えた．

(5) $\alpha \in \Phi$ とする．背理法により $\alpha(t_\alpha) \neq 0$ を示す．$\alpha(t_\alpha) = 0$ を仮定すると，$\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対して $[t_\alpha, x] = 0 = [t_\alpha, y]$ となる．(4) と同様の議論により $\kappa(x,\, y) \neq 0$ であるような $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在する．x, y のどちらか一方を $\kappa(x,\, y)^{-1}$ 倍することで，(3) において $[x, y] = t_\alpha \in \mathfrak{h}$ となる

ようにできる．このとき $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{s} := \mathrm{Span}\{x,\, y,\, t_\alpha\}$ は 3 次元の可解 Lie 代数であり，$\mathfrak{s} \cong \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ である[*29]．従って系 2.1.4 が使えて，$\forall s \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ に対して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(s) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は冪零である．$t_\alpha \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ なので $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha)$ は冪零である．一方で $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ なので $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha)$ は半単純でもあるから $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t_\alpha \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_\alpha = 0$ となるが，これは $\alpha \in \Phi$（従って $\alpha \neq 0$）であることに矛盾する．

(6) $\forall \alpha \in \Phi$ および $\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ を与える．このとき (4) の証明と同様の議論によりある $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在して $\kappa(x_\alpha,\, y) \neq 0$ を充たす．さらに (5) から $\kappa(t_\alpha,\, t_\alpha) \neq 0$ なので，

$$y_\alpha := \frac{2}{\kappa(t_\alpha,\, t_\alpha)\kappa(x_\alpha,\, y)} y$$

とおけば

$$\kappa(x_\alpha,\, y_\alpha) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha,\, t_\alpha)}$$

を充たす．よってさらに

$$h_\alpha := \frac{2}{\kappa(t_\alpha,\, t_\alpha)} t_\alpha \in \mathfrak{h}$$

とおけば (3) より

$$\begin{aligned}
[x_\alpha, y_\alpha] &= \kappa(x_\alpha,\, y_\alpha) t_\alpha = h_\alpha, \\
[h_\alpha, x_\alpha] &= \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, x_\alpha] = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}\alpha(t_\alpha) x_\alpha = 2x_\alpha, \\
[h_\alpha, y_\alpha] &= \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, y_\alpha] = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}\bigl(-\alpha(t_\alpha)\bigr) y_\alpha = -2y_\alpha
\end{aligned}$$

が成り立ち，$\mathrm{Span}\bigl\{x_\alpha,\, y_\alpha,\, h_\alpha\bigr\} \subset \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{sl}(2,\, \mathbb{K})$ と Lie 代数として同型になる．

(7) (6) の証明から即座に

$$h_\alpha = \frac{2}{\kappa(t_\alpha,\, t_\alpha)} t_\alpha$$

が従う．$\kappa(t_\alpha,\, h) := \alpha(h) \quad (\forall h \in \mathfrak{h})$ が t_α の定義だったので，

$$\forall h \in \mathfrak{h},\ \kappa(t_{-\alpha},\, h) = -\alpha(h) = \kappa(-t_\alpha,\, h)$$

が言える．よって系 2.5.2 から $t_{-\alpha} = -t_\alpha$ であり，

$$h_\alpha = -h_{-\alpha}$$

が言えた．

■

[*29] 抽象 Jordan 分解の定義の直前で述べたように，$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数ならば $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は単射である．

2.5.4 整性

命題 2.5.3-(6) で構成した $(x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \times \mathfrak{h}$ について，

$$\mathfrak{s}_\alpha := \mathrm{Span}\{\, x_\alpha,\, y_\alpha,\, h_\alpha \,\} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$$

とおく．

命題 2.5.4:

- 体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$ のルート全体の集合 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$

を与える．$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を命題 2.5.2 によって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

と書く．このとき，$\forall \alpha,\, \beta \in \Phi$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$．特に $\mathfrak{h}_\alpha := [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ とおくと

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha$$

が成り立ち，$\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ を充たす $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が一意的に存在する．

(2) $\lambda\alpha \in \Phi \implies \lambda = +1$ または $\lambda = -1$

(3) $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ で，かつ $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$

(4) $\alpha + \beta \in \Phi \implies [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

(5) $\beta \neq \pm\alpha$ ならば，

$$r := \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta - \lambda\alpha \in \Phi \,\},$$
$$q := \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta + \lambda\alpha \in \Phi \,\}$$

とおいたとき $-r \leq \forall \lambda \leq q$ に対して

$$\beta + \lambda\alpha \in \Phi \;\text{ かつ }\; \beta(h_\alpha) = r - q \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ．

! (3) の $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ は **Cartan 数** (Cartan integer) と呼ばれる．(5) で得られた系列 $\{\beta + \lambda\alpha \in \Phi\}_{-r \leq \lambda \leq q}$ のことを $\boldsymbol{\alpha}$**-string through** $\boldsymbol{\beta}$ と呼ぶ．

証明 $\forall \alpha \in \Phi$ を 1 つ固定する．$\mathfrak{s}_\alpha$ の随伴表現

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{s}_\alpha} : \mathfrak{s}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\; x \longmapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$$

によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{s}_\alpha$-加群と見做す．このとき $h_\alpha \in \mathfrak{s}_\alpha$ の，$\mathfrak{g}$ におけるウエイト μ のウエイト空間を $V_\mu \subset \mathfrak{g}$ と

書く．Weyl の定理から $\mathfrak{s}_\alpha$-加群 $\mathfrak{g}$ は既約な部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群の族 $\{\mathfrak{w}_i\}_{i\in I}$ の（$\mathfrak{s}_\alpha$-加群としての）直和

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{w}_i$$

に分解し，それぞれの直和因子 $\mathfrak{w}_i$ の既約な部分 $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群としての構造は定理 2.4.1 より定まる．特に系 2.4.2 より

- $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h_\alpha)$ の固有値（i.e. 随伴表現 $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{s}_\alpha}$ における $h_\alpha \in \mathfrak{s}_\alpha$ のウエイト）は全て整数
- 偶数ウエイトのウエイト空間の直和として書ける $\mathfrak{w}_i$ の個数は $\dim V_0$ 個
- 奇数ウエイトのウエイト空間の直和として書ける $\mathfrak{w}_i$ の個数は $\dim V_1$ 個

が成り立つ．

(1), (2)

$\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}^*} \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} \subset \mathfrak{g}$$

を考える[*30]．命題 2.5.1-(1) より $\forall\lambda \in \mathbb{K}^*$ に対して

$$\begin{aligned} x_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} &= \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(x_\alpha)(\mathfrak{g}_{\lambda\alpha}) = [x_\alpha, \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{(\lambda+1)\alpha}, \\ y_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} &= \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(y_\alpha)(\mathfrak{g}_{\lambda\alpha}) = [y_\alpha, \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{(\lambda-1)\alpha}, \\ h_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} &= \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h_\alpha)(\mathfrak{g}_{\lambda\alpha}) = [h_\alpha, \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つので，$\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群である．また，$\mathfrak{g}_\alpha$ の定義および命題 2.5.3-(5), (7) から，$\lambda\alpha \in \Phi$ を充たす任意の $\lambda \in \mathbb{K}^*$ に対して

$$\forall x \in \mathfrak{g}_{\lambda\alpha},\ h_\alpha \blacktriangleright x = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h_\alpha)(x) = \lambda\alpha(h_\alpha)x = 2\lambda x$$

が成り立つ．i.e. $\mathfrak{g}_{\lambda\alpha} = V_{2\lambda} \cap \mathfrak{m}$ である．さらに補題 2.5.1 より $h_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{h} = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h_\alpha)(\mathfrak{h}) = [h_\alpha, \mathfrak{h}] = 0$ が言えるので，$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 = V_0 \cap \mathfrak{m}$ である．

ここで $\dim(\mathrm{Ker}\,\alpha) = \dim\mathfrak{h} - 1$ であり[*31]，$\forall h \in \mathrm{Ker}\,\alpha$ に対して

$$\begin{aligned} x_\alpha \blacktriangleright h &= -\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h)(x_\alpha) = \alpha(h)x_\alpha = 0, \\ y_\alpha \blacktriangleright h &= -\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h)(y_\alpha) = -\alpha(h)x_\alpha = 0, \\ h_\alpha \blacktriangleright h &= -\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h)(h_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $\mathfrak{s}_\alpha$ は $\mathrm{Ker}\,\alpha$ に自明に作用するので，$\mathrm{Ker}\,\alpha$ は $\dim\mathfrak{h} - 1$ 個の自明な（従ってウエイト 0 の）既約 $\mathfrak{s}_\alpha$-部分加群の直和である．一方，$\mathfrak{s}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ 自身もまた $\mathfrak{g}$ の既約な部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群であり，命題 2.5.3-(6) より

$$\begin{aligned} h_\alpha \blacktriangleright x_\alpha &= \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h_\alpha)(x_\alpha) = [h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \\ h_\alpha \blacktriangleright y_\alpha &= \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h_\alpha)(x_\alpha) = [h_\alpha, x_\alpha] = -2y_\alpha, \\ h_\alpha \blacktriangleright h_\alpha &= \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h_\alpha)(h_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

[*30] $\mathbb{K}^*$ の元は $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ なる $\mathbb{K}$-線型写像ということなので，要するにスカラー倍である．
[*31] $\alpha \neq 0$ なので $\dim(\mathrm{Im}\,\alpha) = 1$ である．よって階数・退化次元の定理から $\dim(\mathrm{Ker}\,\alpha) = \dim\mathfrak{h} - 1$.

が成り立つのでウエイト 0, ±2 を持つ. i.e. $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \subset \mathfrak{s}_\alpha$ である. 従って $\operatorname{Ker}\alpha \oplus \mathfrak{s}_\alpha$ は[*32] $(\dim\mathfrak{h}-1)+1 = \dim\mathfrak{h}$ 個の，偶数ウエイトを持つ既約な部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群の直和に分解するが，系 2.4.2 よりこのような既約部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群の $\mathfrak{m}$ 内における総数は $\dim(V_0 \cap \mathfrak{m}) = \dim\mathfrak{h}$ 個なので，結局 $\mathfrak{m}$ 内の h_α の偶数ウエイトは 0, ±2 以外に出現しないことが分かった．従って $2\alpha,\ \frac{1}{2}\alpha \notin \Phi$ である[*33]．このことから $V_1 \cap \mathfrak{m} = 0$ がわかり，系 2.4.2 から $\mathfrak{m}$ 内に奇数ウエイトが出現しないこともわかった．以上の考察より

$$\mathfrak{m} = \operatorname{Ker}\alpha \oplus \mathfrak{s}_\alpha$$

なので $\mathbb{K}h_\alpha \subset \mathfrak{s}_\alpha$ であり，$\dim\mathfrak{s}_\alpha = 3$ であることから $\dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$ が言えた．特に命題 2.5.3-(4) より $\mathbb{K}h_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] =: \mathfrak{h}_\alpha$ であり，

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha$$

も言えた．

(3), (4), (5)

$\beta = \pm\alpha$ のとき，$\alpha(h_\alpha) = 2$ なので (3) が成り立つ．よって以下では $\forall\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ を 1 つとる．$\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間

$$\mathfrak{k} := \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}$$

を考える．命題 2.5.1-(1) より $\forall\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} x_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} &= [x_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+(\lambda+1)\alpha}, \\ y_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} &= [y_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+(\lambda-1)\alpha}, \\ h_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} &= [h_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つので，$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群である．(1) において α は任意だったので $\forall\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して $\dim\mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} = 1$ である．$\mathfrak{g}_\alpha$ の定義および命題 2.5.3-(5), (7) から，$\beta + \lambda\alpha \in \Phi$ を充たす任意の $\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\forall x \in \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha},\ h_\alpha \blacktriangleright x = \big(\beta(h_\alpha) + 2\lambda\big)x$$

が成り立つ．i.e. $\mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} = V_{\beta(h_\alpha)+2\lambda} \cap \mathfrak{k}$ である．特に $\beta(h_\alpha) + 2\lambda \in \mathbb{Z}$ なので $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ でなくてはならない（**(3) の前半**）.

α, β を固定したとき，$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ だと分かったので $\beta(h_\alpha) \equiv 0, 1 \mod 2$ のどちらかである．$\beta(h_\alpha) \equiv 0 \mod 2$ ならば

$$V_0 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\beta - \frac{\beta(h_\alpha)}{2}\alpha}, \quad V_1 \cap \mathfrak{k} = 0$$

$\beta(h_\alpha) \equiv 1 \mod 2$ ならば

$$V_0 \cap \mathfrak{k} = 0, \quad V_1 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\beta - \frac{\beta(h_\alpha)-1}{2}\alpha}$$

[*32] $\mathfrak{h} = \operatorname{Ker}\alpha \oplus \mathbb{K}h_\alpha$ なので $\operatorname{Ker}\alpha \cap \mathfrak{s}_\alpha = 0$ である．

[*33] 議論の冒頭で $\alpha \in \Phi$ は任意にとっていたので，もし $2\alpha \in \Phi$ ならば，$\beta := 2\alpha \in \Phi$ とおいたときに $2\beta = 4\alpha \in \Phi$ という事になり矛盾．$\alpha = 2(\frac{1}{2}\alpha) \in \Phi$ なので $\frac{1}{2}\alpha \notin \Phi$ も言えた．

なので，いずれの場合も $\dim(V_0 \cap \mathfrak{k}) + \dim(V_1 \cap \mathfrak{k}) = 1$ であり，系 2.4.2 より $\mathfrak{k}$ は既約な $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群であることが分かった．従って $\mathfrak{k}$ の最高（resp. 最低）ウエイト m（resp. l）が存在し，

$$\begin{aligned} \beta(h_\alpha) + 2q &:= m, \\ \beta(h_\alpha) - 2r &:= l \end{aligned}$$

とおけば

$$\begin{aligned} q &= \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta + \lambda\alpha \in \Phi \,\}, \\ r &= \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta - \lambda\alpha \in \Phi \,\} \end{aligned}$$

が成り立ち，さらに定理 2.4.1-(1) より $-r \leq \forall\lambda \leq q$ に対して $\beta(h_\alpha) + 2\lambda = (\beta + \lambda\alpha)(h_\alpha)$ は $\mathfrak{k}$ のウエイトなので

$$\beta + \lambda\alpha \in \Phi$$

である．特に $l = -m$ なので

$$\beta(h_\alpha) = r - q \in \mathbb{Z}$$

が言えた（**(5)**）．さらに $q, r \geq 0$ なので $-r \leq q - r \leq q$ が成り立ち，

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta + (q - r)\alpha \in \Phi$$

が分かった（**(3) の後半**）．

(2) および $0 \notin \Phi$ であることから $\alpha + \beta \in \Phi$ ならば $\beta \neq \pm\alpha$ である．よって補題 2.4.2 より $x_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_\beta = [x_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0$ である．(1) より $\dim \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 1$ なので，命題 2.5.1-(1) から $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が言えた（**(4)**）．

■

2.5.5 有理性

- 体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$ のルート全体の集合 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$

を与える．$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を命題 2.5.2 によって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

と書く．系 2.5.2 から得られる同型 (2.5.4) によって，$\mathfrak{h}^*$ 上に非退化かつ対称な双線型形式

$$(\ ,\ ) \colon \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathbb{K},\ (\alpha, \beta) \longmapsto \kappa\bigl(\tilde{\kappa}^{-1}(\alpha), \tilde{\kappa}^{-1}(\beta)\bigr) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$$

を定義する．

命題 2.5.3-(1) より，$\dim \mathfrak{h}$ 個のルート $\alpha^1, \dots, \alpha^{\dim \mathfrak{h}} \in \Phi$ であって $\mathfrak{h}^*$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての基底となるようなものが存在する．

補題 2.5.3:

$\forall \beta \in \mathfrak{h}^*$ を基底 $\alpha^1, \dots, \alpha^{\dim \mathfrak{h}} \in \Phi$ で

$$\beta = c_\mu \alpha^\mu$$

と展開すると，$1 \le \forall \mu \le \dim \mathfrak{h}$ に対して $c_\mu \in \mathbb{Q}$ が成り立つ．

<u>**証明**</u> この証明では Einstein の規約を使わない．$1 \le \forall \mu \le \dim \mathfrak{h}$ に対して

$$\frac{2(\alpha^\mu,\, \beta)}{(\alpha^\mu,\, \alpha^\mu)} = \sum_{\nu=1}^{\dim \mathfrak{h}} c_\nu \frac{2(\alpha^\mu,\, \alpha^\nu)}{(\alpha^\mu,\, \alpha^\mu)} \tag{2.5.5}$$

命題 2.5.3-(7), 命題 2.5.4-(3) より $\frac{2(\alpha^\mu,\, \beta)}{(\alpha^\mu,\, \alpha^\mu)} = \frac{2}{\kappa(t_{\alpha^\mu},\, t_{\alpha^\mu})}\beta(t_{\alpha^\mu}) = \beta(h_{\alpha^\mu}) \in \mathbb{Z}$ などが成り立つので，(2.5.5) は $(c_\nu) \in \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{h}}$ に関する $\mathbb{Z}$-係数線型連立方程式である．特に α^μ は線型独立なので $\det\bigl[(\alpha^\mu,\, \alpha^\nu)\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le \dim \mathfrak{h}} \neq 0$ であり，

$$\det \left[\frac{2(\alpha^\mu,\, \alpha^\nu)}{(\alpha^\mu,\, \alpha^\mu)}\right]_{1 \le \mu,\, \nu \le \dim \mathfrak{h}} = \left(\prod_{\nu=1}^{\dim \mathfrak{h}} \frac{2}{(\alpha^\mu,\, \alpha^\mu)}\right) \det\bigl[(\alpha^\mu,\, \alpha^\nu)\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le \dim \mathfrak{h}} \neq 0$$

i.e. (2.5.5) は $\mathbb{Q}^{\dim \mathfrak{h}}$ に一意的な解を持つ． ■

補題 2.5.3 により，$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\, \Phi \subset \mathfrak{h}^*$ の次元が $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h}^*$ だと分かった．

$\forall \alpha,\, \beta \in \mathfrak{h}^*$ をとる．このとき $\mathfrak{g}_\alpha$ の定義を思い出すと，$\forall x \in \mathfrak{g}$ をルート空間分解することで $x = x_0 + \sum_{\gamma \in \Phi} x_\gamma$ w/ $x_0 \in \mathfrak{h}$, $x_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$ と書けるので

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\beta)(x) &= \sum_{\gamma \in \Phi} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\beta)(x_\gamma) \\
&= \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(t_\alpha)\gamma(t_\beta)\, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_\gamma}(x_\gamma)
\end{aligned}$$

となる．さらに命題 2.5.4-(1) より $\dim \mathfrak{g}_\gamma = 1$ なので $\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_\gamma}\bigr) = 1$ であり，

$$\begin{aligned}
\kappa(t_\alpha,\, t_\beta) &= \mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\beta)(x)\bigr) \\
&= \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(t_\alpha)\gamma(t_\beta)
\end{aligned}$$

が分かった．従って

$$\begin{aligned}
(\alpha,\, \beta) &= \kappa(t_\alpha,\, t_\beta) \\
&= \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(t_\alpha)\gamma(t_\beta) \\
&= \sum_{\gamma \in \Phi} (\gamma,\, \alpha)(\gamma,\, \beta)
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に

$$\begin{aligned}
(\beta,\, \beta) &= \sum_{\gamma \in \Phi} (\gamma,\, \beta)^2 \\
&= (\beta,\, \beta)^2 \left(\sum_{\gamma \in \Phi} \frac{1}{4}\left(\frac{2(\gamma,\, \beta)}{(\beta,\, \beta)}\right)^2\right) \ge 0
\end{aligned}$$

で $\frac{2(\gamma,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$ であるから $(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$ であり，従って $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$ であることもわかった．このことから，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \coloneqq \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi$$

とおけば，制限

$$(\ ,\ )|_{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}} \colon \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

は $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ 上の正定値内積を定める．

体の拡大 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ によってベクトル空間の係数拡大 $\mathbb{E} \coloneqq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ を行うことで，$(\ ,\ )|_{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}}$ は $\mathbb{E} \cong \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{h}}$ 上の正定値内積へと自然に拡張される．i.e. 組 $\big(\mathbb{E}, (\ ,\ )\big)$ は Euclid 空間である！

本章の考察をまとめて次の定理を得る：

定理 2.5.3:

- 体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$ のルート全体の集合 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$
- 体の拡大 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ による $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi$ の係数拡大 $\mathbb{E}$
- $\mathbb{E}$-上の正定値内積

$$(\ ,\ ) \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R},\ (\alpha, \beta) \longmapsto \kappa(t_\alpha, t_\beta)$$

を与える．このとき以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ \mathbb{E} = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \Phi, \quad 0 \notin \Phi \\
&(2)\ \ \lambda\alpha \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 1 \\
&(3)\ \ \alpha, \beta \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad \beta - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Phi \\
&(4)\ \ \alpha, \beta \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

定理 2.5.3 によって，半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその極大トーラス $\mathfrak{h}$ の組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から，Euclid 空間とその上のルート Φ の組 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の間の対応

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \longrightarrow (\mathbb{E}, \Phi)$$

が得られた事になる．定理 2.5.3 の条件を充たす組 $(\mathbb{E}, \Phi)$ は**ルート系** (root system) と呼ばれる：

公理 2.5.1: ルート系

- 有限次元 Euclid 空間[a] $\big(\mathbb{E}, (\ ,\ )\big)$
- $\mathbb{E}$ の部分集合 $\Phi \subset \mathbb{E}$

の組 $(\mathbb{E}, \Phi)$ が**ルート系** (root system) であるとは，以下の条件を充たすことを言う：

(Root-1) Φ は 0 を含まない有限集合で，かつ $\mathbb{E} = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$ を充たす．

(Root-2) $\lambda\alpha \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 1$

(Root-3) $\alpha,\ \beta \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad \beta - 2\dfrac{(\beta,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha \in \Phi$

(Root-4) $\alpha,\ \beta \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad 2\dfrac{(\beta,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)} \in \mathbb{Z}$

---

[a] 有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間であって，対称かつ正定値な双線型形式 $(\ ,\ )\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ を持つもののこと．

実は，勝手なルート系が与えられると，それに対応する $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ が Lie 代数の同型を除いて一意に決まることが後に明らかになる．差し当たって，まず次の章ではルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$ の完全な分類を行う．

第 3 章

ルート系

この章において，特に断らない限り体 $\mathbb{K}$ は代数閉体[*1]で，かつ $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$ であるとする．また，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は常に有限次元であるとする．

3.1 公理的方法

Euclid 空間 (Euclid space) とは，

- 体 $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 $\mathbb{E}$
- 対称かつ正定値な双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

の組 $\bigl(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}}\bigr)$ のことを言う[*2]．Euclid 空間 $\bigl(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}}\bigr)$ の任意の元 $\alpha \in \mathbb{E}$ に対して，

- **鏡映面** (reflecting hyperplane)[*3]

$$\boldsymbol{P_\alpha} \coloneqq \left\{ \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; (\beta, \alpha)_{\mathbb{E}} = 0 \right\} = (\mathbb{R}\alpha)^{\perp}$$

- 鏡映面 P_α に関する**鏡映** (reflecting)

$$\boldsymbol{\sigma_\alpha} \colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E},\ \beta \longmapsto \beta - 2\frac{(\beta, \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha, \alpha)_{\mathbb{E}}}\alpha$$

を考える．

> **!** $2\frac{(\beta,\,\alpha)}{(\alpha,\,\alpha)} \in \mathbb{R}$ が頻繁に登場するので，
>
> $$[\![\beta, \alpha]\!] \coloneqq 2\frac{(\beta,\ \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha,\ \alpha)_{\mathbb{E}}}$$
>
> と略記することにする．写像 $[\![\ ,\ ]\!] \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ は記号的には内積のように見えるかもしれないが，あくまで第一引数についてのみ線型なのであって，対称でも双線型でもないことに注意．

[*1] つまり，定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha) = 0$ を充たす．

[*2] Euclid 空間と言って位相空間のことを指す場合があるが，そのときは双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ を使って $\mathbb{E}$ 上の距離関数を $d_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{E}\times\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$，$(x,\, y) \longmapsto (x-y, x-y)_{\mathbb{E}}$ と定義し（これは通常 **Euclid 距離**と呼ばれる），$\mathbb{E}$ に $d_{\mathbb{E}}$ による距離位相を入れる．

[*3] 余次元 1 の部分 $\mathbb{R}$-ベクトル空間．最右辺は対称かつ非退化な双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ による直交補空間の意味である．

σ_α は $\mathbb{R}$-線型でかつ $\forall \beta \in \mathbb{E}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha(\beta) &= \bigl(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\bigr) - \Bigl[\!\!\Bigl[\bigl(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\bigr), \alpha\Bigr]\!\!\Bigr]\alpha \\
&= \beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha + [\![\beta, \alpha]\!][\![\alpha, \alpha]\!]\alpha \\
&= \beta - 2[\![\beta, \alpha]\!]\alpha + 2[\![\beta, \alpha]\!]\alpha \\
&= \beta
\end{aligned}
$$

を充たす，i.e. $\sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha$ なので，$\sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ である．

補題 3.1.1: 鏡映の特徴付け

Euclid 空間 $\mathbb{E}$ と，

- $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\, \Phi$
- $\forall \alpha \in \Phi,\ \sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$

を充たす $\mathbb{E}$ の有限部分集合 $\Phi \subset \mathbb{E}$ を与える．
このとき，$\sigma \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ が

(RF-1) $\sigma(\Phi) = \Phi$
(RF-2) 余次元 1 の部分ベクトル空間 $P \subset \mathbb{E}$ が存在して，$\forall \beta \in P,\ \sigma(\beta) = \beta$ が成り立つ
(RF-3) $\exists \alpha \in \Phi \setminus \{0\},\ \sigma(\alpha) = -\alpha$

の 3 条件を満たすならば $\sigma = \sigma_\alpha$（かつ $P = P_\alpha$）である．

証明 $\tau := \sigma \circ \sigma_\alpha\, (= \sigma \circ \sigma_\alpha^{-1})$ とおき，$\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ であることを示す．
(RF-1) より $\tau(\Phi) = \Phi$, $\tau(\alpha) = \alpha$ が成り立つので $\tau|_{\mathbb{R}\alpha} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\alpha}$ である．さらに $\mathbb{R}$-線型写像

$$
\overline{\tau} \colon \mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha \longrightarrow \mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha,\ \beta + \mathbb{R}\alpha \longmapsto \tau(\beta) + \mathbb{R}\alpha
$$

は well-defined だが，**(RF-2)** より $\overline{\tau} = \mathrm{id}_{\mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha}$ である．よって τ の固有値は全て 1 であり，τ の最小多項式 $f(t)$ は $(t-1)^{\dim \mathbb{E}}$ の約元である．一方，Φ は有限集合なので，$\forall \beta \in \Phi$ に対してある $k_\beta \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau^{k_\beta}(\beta) = \beta$ を充たす．ここで $k := \max\{k_\beta \mid \beta \in \Phi\}$ とおくと，**(RF-1)** より $\tau^k = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ が言える．よって $f(t)$ は $t^k - 1$ の約元でもある．従って，$f(t) = \gcd\bigl((t-1)^{\dim \mathbb{E}}, t^k - 1\bigr) = t - 1$ だと分かった．故に $\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ である． ■

3.1.1 ルート系

前章で与えたルート系の公理を再掲するところから始めよう：

公理 3.1.1: ルート系

- 有限次元 Euclid 空間 $\bigl(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}}\bigr)$
- $\mathbb{E}$ の部分集合 $\Phi \subset \mathbb{E}$

の組 $(\mathbb{E}, \Phi)$ が**ルート系** (root system) であるとは，以下の条件を充たすことを言う：

(Root-1) Φ は 0 を含まない有限集合で，かつ $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$ を充たす．

(Root-2) $\lambda\alpha \in \Phi \implies \lambda = \pm 1$

(Root-3) $\alpha,\, \beta \in \Phi \implies \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$

(Root-4) $\alpha,\, \beta \in \Phi \implies [\![\beta, \alpha]\!] \in \mathbb{Z}$

Φ の元のことを**ルート** (root) と呼ぶ．

本資料の以降では，文脈上直積集合の要素との混同が起きる恐れがないときは Euclid 空間 $\left(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}}\right)$ に備わっている双線型形式を $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ と書く代わりに $(\ ,\ )$ と略記する．

ルート系と言ったときに，**(Root-2)** を除外する場合がある．その場合我々が採用した定義に該当するものは**簡約ルート系** (reduced root system) と呼ばれる．

定義 3.1.1:

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の**ランク** (rank) とは，$\dim \mathbb{E} \in \mathbb{N}$ のことを言う．

公理 **(Root-4)** は，任意のルートの 2 つ組の配位に非常に強い制約を与える．というのも，2 つのベクトルのなす角の定義を思い出すと，$\forall \alpha,\, \beta \in \Phi$ に対してある $\theta \in [0, \pi]$ が存在して

$$[\![\beta, \alpha]\!] = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos\theta \in \mathbb{Z} \tag{3.1.1}$$

$$[\![\alpha, \beta]\!][\![\beta, \alpha]\!] = 4\cos^2\theta \in \mathbb{Z} \tag{3.1.2}$$

が成り立たねばならないのである．$[\![\alpha, \beta]\!],\, [\![\beta, \alpha]\!] \in \mathbb{Z}$ かつ $0 \le \cos^2\theta \le 1$ なので，(3.1.2) から

$$\cos^2\theta = 0,\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm1)}{4},\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm2)}{4},\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm3)}{4},\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm4)}{4},\ \frac{(\pm2)\cdot(\pm2)}{4} \quad (\text{複号同順})$$

しかあり得ないとわかる．**(Root-2)** も考慮すると，$\|\alpha\| \le \|\beta\|$ ならば[*4]あり得る可能性は以下の通り[*5]：

表 3.1: 可能なルートの 2 つ組 $\alpha,\, \beta$

$[\![\alpha, \beta]\!]$	$[\![\beta, \alpha]\!]$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	-
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3
2	2	0	1
-2	-2	π	1

[*4] このとき (3.1.1) より $[\![\alpha, \beta]\!] \le [\![\beta, \alpha]\!]$

[*5] 表 3.1 の最後の 2 段は $\beta = \pm\alpha$ の場合に相当する．

補題 3.1.2:

$(\mathbb{E}, \Phi)$ をルート系とする．$\alpha \neq \pm\beta$ を充たす任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して以下が成り立つ：

(1) $(\alpha, \beta) > 0 \implies \alpha - \beta \in \Phi$
(2) $(\alpha, \beta) < 0 \implies \alpha + \beta \in \Phi$

証明 $(\alpha, \beta) > 0$ とする．このとき $[\![\alpha, \beta]\!] > 0$ であるから，表 3.1 より $[\![\alpha, \beta]\!], [\![\beta, \alpha]\!]$ の少なくとも一方は 1 に等しい．$[\![\alpha, \beta]\!] = 1$ だとすると，**(Root-3)** から $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ がいえる．$[\![\beta, \alpha]\!] = 1$ ならば $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in \Phi$ であり，$\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ が従う．(2) は (1) において β の代わりに $-\beta = \sigma_\beta(\beta) \in \Phi$ を用いて同じ議論をすれば良い． ■

定義 3.1.2: α-string through β

$(\mathbb{E}, \Phi)$ をルート系とする．$\alpha \neq \pm\beta$ を充たす任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して，Φ の部分集合

$$\left\{ \beta + \lambda\alpha \in \mathbb{E} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{Z} \right\} \cap \Phi$$

のことを $\boldsymbol{\alpha}$**-string through** $\boldsymbol{\beta}$ と呼ぶ．

命題 3.1.1: α-string through β の性質

$(\mathbb{E}, \Phi)$ をルート系とする．$\alpha \neq \pm\beta$ を充たす任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して

$$r := \max\left\{ \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \beta - \lambda\alpha \in \Phi \right\},$$
$$q := \max\left\{ \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \beta + \lambda\alpha \in \Phi \right\}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) α-string through β は $\mathbb{E}$ の部分集合

$$\left\{ \beta + \lambda\alpha \in \mathbb{E} \,\middle|\, -r \leq \lambda \leq q \right\} \tag{3.1.3}$$

に等しい．i.e.

$$\lambda \in \mathbb{Z} \text{ かつ } \beta + \lambda\alpha \in \Phi \implies -r \leq \lambda \leq q$$

である．

(2) α-string through β は鏡映 σ_α の作用の下で不変である．

(3) $r - q = [\![\beta, \alpha]\!]$．特に α-string through β の長さは 4 以下である．

証明 (1) 背理法により示す．ある $-r < \lambda < q$ に対して $\beta + \lambda\alpha \notin \Phi$ であるとする．このときある $-r \leq s < p \leq q$ が存在して

$$\beta + s\alpha \in \Phi, \qquad \beta + (s+1)\alpha \notin \Phi, \qquad \beta + (p-1)\alpha \notin \Phi, \qquad \beta + p\alpha \in \Phi$$

を充たすが，補題 3.1.2 の対偶より $(\alpha, \beta + p\alpha) \leq 0 \leq (\alpha, \beta + s\alpha)$ が成り立つ．よって $(s-p)(\alpha, \alpha) \geq 0$ である．然るに $s - p < 0$ かつ $(\alpha, \alpha) > 0$ なのでこれは矛盾である．

(2) $-r \leq \forall \lambda \leq q$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(\beta + \lambda\alpha) &= \beta + \lambda\alpha - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha - \lambda[\![\alpha, \alpha]\!]\alpha \\ &= \beta + \bigl(-[\![\beta, \alpha]\!] - \lambda\bigr)\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ．**(Root-3)** より $\beta + \bigl(-[\![\beta, \alpha]\!] - \lambda\bigr)\alpha \in \Phi$ が言える．さらに **(Root-4)** より $-[\![\beta, \alpha]\!] - \lambda \in \mathbb{Z}$ なので，(1) より $-r \leq -[\![\beta, \alpha]\!] - \lambda \leq q$ だと分かった．i.e. $\sigma_\alpha(\beta + \lambda\alpha)$ は α-string through β の元である．

(3) r, q の定義より，(2) の証明において

$$\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - \bigl([\![\beta, \alpha]\!] + q\bigr)\alpha = \beta - r\alpha$$

が成り立たねばならない．よって

$$r - q = [\![\beta, \alpha]\!]$$

である．表 3.1 より $|r - q| \leq 3$ であるから，集合 (6.2.1) の要素数は 4 以下である．

■

定義 3.1.3: 双対ルート系

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ に対して

$$\boldsymbol{\Phi}^\vee := \left\{ \frac{2}{(\alpha,\, \alpha)}\alpha \in \mathbb{E} \;\middle|\; \alpha \in \Phi \right\}$$

とおき，組 $(\mathbb{E}, \boldsymbol{\Phi}^\vee)$ のことを $(\mathbb{E}, \Phi)$ の**双対ルート系** (dual root system) と呼ぶ．

$\alpha \in \Phi$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}^\vee := \frac{2}{(\alpha,\, \alpha)}\alpha \in \Phi^\vee$$

と書く．

双対ルート系がルート系の公理を充たすことを確認しよう：

(Root-1,2) $(\mathbb{E}, \Phi)$ がルート系なので明らか．

(Root-3) $\forall \alpha^\vee, \beta^\vee \in \Phi^\vee$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) &= \frac{2}{(\beta,\, \beta)}\beta - \left[\!\!\left[\frac{2}{(\beta,\, \beta)}\beta, \frac{2}{(\alpha,\, \alpha)}\alpha \right]\!\!\right] \frac{2}{(\alpha,\, \alpha)}\alpha \\ &= \frac{2}{(\beta,\, \beta)}\beta - \frac{\frac{2}{(\beta,\,\beta)}}{\frac{2}{(\alpha,\,\alpha)}}[\![\beta, \alpha]\!]\frac{2}{(\alpha,\, \alpha)}\alpha \\ &= \frac{2}{(\beta,\, \beta)}\sigma_\alpha(\beta)\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

だが，

$$\begin{aligned}\bigl(\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta)\bigr) &= (\beta, \beta) - 2[\![\beta, \alpha]\!](\beta, \alpha) + [\![\beta, \alpha]\!]^2(\alpha, \alpha) \\ &= (\beta, \beta) - 2[\![\beta, \alpha]\!](\beta, \alpha) + 2[\![\beta, \alpha]\!](\beta, \alpha) \\ &= (\beta, \beta)\end{aligned}$$

なので

$$\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = \sigma_\alpha(\beta)^\vee \in \Phi^\vee$$

だと分かった．

(Root-4) $\forall \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\ \frac{2}{(\beta,\beta)}\beta \in \Phi^\vee$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}
[\![\beta^\vee, \alpha^\vee]\!] &= \left[\!\!\left[\frac{2}{(\beta,\ \beta)}\beta,\ \frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha\right]\!\!\right] \\
&= \frac{\frac{2}{(\beta,\beta)}}{\frac{2}{(\alpha,\alpha)}}[\![\beta, \alpha]\!] \\
&= \frac{\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}}{\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}}[\![\beta, \alpha]\!] \\
&= \frac{[\![\alpha, \beta]\!]}{[\![\beta, \alpha]\!]}[\![\beta, \alpha]\!] \\
&= [\![\alpha, \beta]\!] \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

が言えた．

3.1.2 Weyl 群

定義 3.1.4: Weyl 群

$(\mathbb{E},\ \Phi)$ をルート系とする．$\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ の部分集合 $\left\{ \sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \ \middle|\ \alpha \in \Phi \right\}$ が生成する $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ の部分群のことをルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$ の **Weyl 群** (Weyl group) と呼び，$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\Phi})$ と書く．

本資料の以降では，文脈上考えているルート系が明らかな場合 $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ を $\mathscr{W}$ と略記する．

(Root3) より，$\forall \tau \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ の Φ への制限は全単射である．その上 **(Root-1)** から Φ は有限集合でかつ $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\, \Phi$ が成り立つので，$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ を Φ に作用する対称群 $\mathfrak{S}_{|\Phi|}$ の部分群と同一視できる．特に $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ は有限群である．

補題 3.1.3:

$(\mathbb{E},\ \Phi)$ をルート系とする．$\tau \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ が $\tau(\Phi) = \Phi$ を充たすならば，$\forall \alpha,\ \beta \in \Phi$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$
(2) $[\![\beta, \alpha]\!] = [\![\tau(\beta), \tau(\alpha)]\!]$

証明 $\forall \alpha,\ \beta \in \Phi$ をとる．**(Root-3)** より $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ なので，$\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}\big(\tau(\beta)\big) = \tau \circ \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ が成り立つ．一方で

$$\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}\big(\tau(\beta)\big) = \tau\big(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\big) = \tau(\beta) - [\![\beta, \alpha]\!]\tau(\alpha) \tag{3.1.5}$$

である．$\beta \in \Phi$ は任意で $\tau \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ は全単射なので

(RF-1) $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\Phi) = \Phi$
(RF-2) $\forall \beta \in P_\alpha,\ \tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\beta) = \beta$
(RF-3) $\tau(\alpha) \in \Phi \setminus \{0\},\ \tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}\bigl(\tau(\alpha)\bigr) = -\tau(\alpha)$

が成り立つことが分かった．よって補題 3.1.1 より $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$ である．
さらに (3.1.5) から

$$\tau(\beta) - [\![\beta, \alpha]\!]\tau(\alpha) = \sigma_{\tau(\alpha)}\bigl(\tau(\beta)\bigr) = \tau(\beta) - [\![\tau(\beta), \tau(\alpha)]\!]\tau(\alpha)$$

が分かるので (2) が従う． ■

定義 3.1.5: ルート系の同型

2 つのルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$, $(\mathbb{E}',\ \Phi')$ を与える．写像

$$\phi\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$$

が**ルート系の同型写像** (isomorphism) であるとは，以下の 3 条件を満たすことを言う：

(1) ϕ は $\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型写像
(2) $\phi(\Phi) = \Phi'$
(3) $\forall \alpha,\ \beta \in \Phi$ に対して $[\![\phi(\beta), \phi(\alpha)]\!] = [\![\beta, \alpha]\!]$

ルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$ の**自己同型** (automorphism) とは，$\phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ であって $\phi(\Phi) = \Phi$ を充たすもののことを言う．これは補題 3.1.3-(2) により自動的にルート系の同型となる．ルート系の自己同型全体が写像の合成に関してなす群のことを**ルート系の自己同型群**と呼び，$\mathbf{Aut}\,\boldsymbol{\Phi}$ と書く．

ルート系の同型

$$\phi\colon (\mathbb{E},\ \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}',\ \Phi')$$

について，$\forall \alpha,\ \beta \in \Phi$ に対して

$$\sigma_{\phi(\alpha)} \circ \phi(\beta) = \phi(\beta) - [\![\phi(\beta), \phi(\alpha)]\!]\phi(\alpha) = \phi\bigl(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\bigr) = \phi \circ \sigma_\alpha(\beta)$$

が成り立つ．i.e. ルート系の図式

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma_\alpha"'] & \Phi' \arrow[d, "\sigma_{\phi(\alpha)}"] \\ \Phi \arrow[r, "\phi"'] & \Phi' \end{tikzcd}$$

は可換である．よってルート系の同型は Weyl 群の自然な（群の）同型

$$\begin{aligned} \overline{\phi}\colon \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) &\longrightarrow \mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi'), \\ \sigma &\longmapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

を引き起こす．

補題 3.1.4:

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の Weyl 群 $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ は，ルート系の自己同型群 $\operatorname{Aut}\Phi$ の正規部分群である．

証明 $\forall \sigma \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ を 1 つとる．このときある $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Phi$ が存在して $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_k}$ と書ける[*6]．従って $\forall \tau \in \operatorname{Aut}\Phi$ に対して，補題 3.1.3-(1) より

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau \circ \sigma_{\alpha_1} \circ \tau^{-1}) \circ \cdots \circ (\tau \circ \sigma_{\alpha_k} \circ \tau^{-1}) = \sigma_{\tau(\alpha_1)} \circ \cdots \circ \sigma_{\tau(\alpha_k)} \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$$

が成り立つ．i.e. $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \triangleleft \operatorname{Aut}\Phi$ である． ■

補題 3.1.5: 双対ルートの Weyl 群

$$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \cong \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi^{\vee})$$

証明 (3.1.4) より，写像 $\sigma_\alpha \longmapsto \sigma_{\alpha^\vee}$ は同型写像である． ■

3.2 単純ルートと Weyl 群

この節では $(\mathbb{E}, \Phi)$ を任意のランク l のルート系とし，その Weyl 群を $\mathscr{W}$ と略記する．

3.2.1 ルート系の底と Weyl の区画

定義 3.2.1: ルート系の底

Φ の部分集合 $\Delta \subset \Phi$ が**底** (base) であるとは，以下を充たすことをいう：

(B-1) Δ は $\mathbb{R}$-ベクトル空間 $\mathbb{E}$ の基底である．

(B-2) $\forall \beta \in \Phi$ に対して整数の族 $\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta}\mathbb{Z}$ が一意的に存在して

$$\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} \beta_\alpha \alpha$$

を充たし，$\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \geq 0$ であるか $\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \leq 0$ であるかのどちらかである．

- Δ の元のことを**単純ルート** (simple root) と呼ぶ．
- $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} \beta_\alpha \alpha \in \Phi$ に対して

$$\mathbf{ht}\,\boldsymbol{\beta} \coloneqq \sum_{\alpha\in\Delta} \beta_\alpha \in \mathbb{Z}$$

  と定義し，底 Δ に関するルート β の**高さ** (height) と呼ぶ．
- $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} \beta_\alpha \alpha \in \Phi$ が**正**（resp. **負**）であるとは，$\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \geq 0$ (resp. $\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \leq 0$)

[*6] $\sigma_{\alpha_i}^{-1} = \sigma_{\alpha_i}$ なのでこれで良い．

が成り立つことを言い，$\boldsymbol{\beta} \succ \mathbf{0}$（resp. $\boldsymbol{\beta} \prec \mathbf{0}$）と書く[a]．

- 正（resp. 負）のルート全体の集合のことを $\boldsymbol{\Phi}^{+}$（resp. $\boldsymbol{\Phi}^{-}$）と書く[b]．
- $\mathbb{E}$ 上の半順序 $\prec \subset \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ を

$$\mu \prec \lambda \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \exists! \{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_{\geq 0},\ \lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$$

と定義する．

[a] LaTeX コマンドは $\succ$ が \succ，$\prec$ が \prec である．
[b] 明らかに $\Phi^{-} = -\Phi^{+}$ である．

$\prec$ が半順序になっていることを確認しておこう：

(反射律) $\forall \mu \in \mathbb{E}$ に対して $\mu - \mu = 0$ が成り立つので $\mu \prec \mu$ である．

(反対称律) $\mu \prec \lambda$ かつ $\lambda \prec \mu$ だとする．このとき $\{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta},\ \{l_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_{\geq 0}$ が一意的に存在して

$$\lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha, \qquad \mu - \lambda = \sum_{\alpha \in \Delta} l_\alpha \alpha$$

と書ける．辺々足すと **(B-1)** より $\forall \alpha \in \Delta$ に対して $k_\alpha + l_\alpha = 0$ だと分かるが，$k_\alpha \geq 0$ かつ $l_\alpha \geq 0$ なので $k_\alpha = l_\alpha = 0$，i.e. $\mu - \lambda = 0 \iff \mu = \lambda$ が言えた．

(推移律) $\mu \prec \lambda$ かつ $\lambda \prec \nu$ だとする．このとき $\nu - \mu = (\nu - \lambda) + (\lambda - \mu)$ なので明らかに $\mu \prec \nu$ である．

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の底を定義したのは良いが，存在しなくては意味がない．

補題 3.2.1:

Δ が Φ の底ならば，相異なる任意の 2 つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta) \leq 0$ であり，$\alpha - \beta \notin \Phi$ である．

証明 背理法により示す．$(\alpha, \beta) > 0$ だとする．仮定より $\alpha \neq \beta$ であり，かつ Δ の元の線型独立性から $\beta \neq -\alpha$ なので，補題 3.1.2 から $\alpha - \beta \in \Phi$ と言うことになる．然るにこのとき $\alpha - \beta \in \Phi$ が $\alpha, \beta \in \Delta$ の係数 $1, -1$ の線型結合で書けていることになり **(B-2)** に矛盾する． ■

定義 3.2.2:

$\forall\gamma\in\mathbb{E}$ に対して以下を定義する：

- Φ の部分集合

$$\boldsymbol{\Phi^+(\gamma)} \coloneqq \left\{\,\alpha\in\Phi \;\middle|\; (\gamma,\alpha)>0\,\right\}$$

-

$$\gamma\in\mathbb{E}\setminus\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$$

  のとき，γ は**正則** (regular) であるという．γ が正則でないとき**特異** (sigular) であると言う．

- $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ が

$$\exists\beta_1,\,\beta_2\in\Phi^+(\gamma),\ \alpha=\beta_1+\beta_2$$

  を充たすとき，α は**分割可能** (decomposable) であると言う．分割可能でないとき**分割不可能** (indecomposable) であると言う．

γ が正則ならば $\forall\alpha\in\Phi$ に対して $(\gamma,\alpha)\neq0$ なので，**(Root-2)** から $\Phi=\Phi^+(\gamma)\amalg\bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$（disjoint union）が成り立つ．

定理 3.2.1: 底の存在

正則な任意の $\gamma\in\mathbb{E}$ を与える．このとき集合

$$\Delta(\gamma)\coloneqq\left\{\,\alpha\in\Phi^+(\gamma)\;\middle|\;\text{分割不可能}\,\right\}$$

は Φ の底である．逆に Φ の任意の底 Δ に対してある正則な $\gamma\in\mathbb{E}$ が存在して $\Delta=\Delta(\gamma)$ となる．

証明 **step1: $\boldsymbol{\Phi^+(\gamma)}$ の任意の元は $\boldsymbol{\Delta(\gamma)}$ の $\mathbb{Z}_{\geq0}$-係数線型結合で書ける**

背理法により示す．$\Delta(\gamma)$ の $\mathbb{Z}_{\geq0}$-係数線型結合で書けない $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ が存在するとする．このとき，そのような α のうち (γ,α) が最小であるようなものが存在するのでそれを α_0 とおく．$\alpha_0\notin\Delta(\gamma)$ なので[*7]α_0 は分割可能であり，ある $\beta_1,\,\beta_2\in\Phi^+(\gamma)$ が存在して $\alpha=\beta_1+\beta_2$ と書ける．このとき

$$(\gamma,\alpha_0)=(\gamma,\beta_1)+(\gamma,\beta_2)>(\gamma,\beta_i)$$

が成り立つので，α_0 の最小性から $\beta_1,\,\beta_2$ はどちらも $\Delta(\gamma)$ の元の $\mathbb{Z}_{\geq0}$-係数線型結合で書ける．然るにこのとき α も $\Delta(\gamma)$ の元の $\mathbb{Z}_{\geq0}$-係数線型結合で書けることになって矛盾．

step2: $\boldsymbol{\alpha,\,\beta\in\Delta(\gamma)}$ かつ $\boldsymbol{\alpha\neq\beta}$ ならば，$\boldsymbol{(\alpha,\,\beta)\leq0}$

背理法により示す．$(\alpha,\beta)>0$ を仮定する．このとき補題 3.1.2-(1) より $\alpha-\beta\in\Phi$ であり，$\beta-\alpha=\sigma_{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)\in\Phi$ もわかる．よって $\alpha-\beta\in\Phi^+(\gamma)$ または $\beta-\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ である．然るに前者の場合 $\alpha=\beta+(\alpha-\beta)$ なので $\alpha\in\Delta(\gamma)$ が分割可能ということになって矛盾し，後者の場合は $\beta=\alpha+(\beta-\alpha)$ なので $\beta\in\Delta(\gamma)$ が分割可能ということになって矛盾である．

[*7] $\alpha_0\in\Delta(\gamma)$ だとすると，$\alpha_0\in\Delta(\gamma)$ の係数 $1\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ の線型結合として書けていることになり矛盾．

step3: $\Delta(\gamma)$ の元は互いに線型独立

$\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(\gamma)} \in \prod_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}$ に対して $\sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} k_\alpha \alpha = 0$ を仮定する．$\forall\alpha\in\Delta(\gamma)$ に対して

$$\Delta^+(\gamma) := \{\, \alpha\in\Delta(\gamma) \mid k_\alpha > 0 \,\}, \qquad \Delta^-(\gamma) := \{\, \alpha\in\Delta(\gamma) \mid k_\alpha < 0 \,\}$$

とおくと $\Delta^+(\gamma)\cap\Delta^-(\gamma) = \emptyset$ で，仮定は

$$\sum_{\alpha\in\Delta^+(\gamma)} k_\alpha \alpha = \sum_{\alpha\in\Delta^-(\gamma)} (-k_\alpha)\alpha$$

と同値である．$\varepsilon := \sum_{\alpha\in\Delta^+(\gamma)} k_\alpha\alpha$ とおくと，**step2** から

$$0 \le (\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{\alpha\in\Delta^+(\gamma),\, \beta\in\Delta^-(\gamma)} k_\alpha(-k_\beta)(\alpha,\beta) \le 0$$

が成り立つので $\varepsilon = 0$ だとわかる．よって

$$0 = (\gamma, \varepsilon) = \sum_{\alpha\in\Delta^+(\gamma)} k_\alpha(\gamma,\alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta^-(\gamma)} (-k_\alpha)(\gamma,\alpha)$$

であり，$\forall\alpha\in\Delta(\gamma)$, $k_\alpha = 0$ が言えた．

step4: $\Delta(\gamma)$ は Φ の底

$\Phi = \Phi^+(\gamma) \amalg \bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$ なので，**step1** と併せて **(B-2)** が，**step3** と併せて **(B-1)** が従う．

step5: 任意の底 Δ に対してある正則な $\gamma\in\mathbb{E}$ が存在して $\Delta = \Delta(\gamma)$ となる

Φ の底 Δ が与えられたとき，$\forall\alpha\in\Delta$ に対して $(\gamma,\alpha) > 0$ を充たす $\gamma\in\mathbb{E}$ をとる[*8]．**(B-2)** より γ は正則であり，かつ $\forall\beta = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_\alpha\alpha \in \Phi^+$ に対して

$$(\gamma, \beta) = \sum_{\alpha\in\Delta} \beta_\alpha(\gamma,\alpha) > 0$$

が成り立つので $\beta\in\Phi^+(\gamma)$，i.e. $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$, $\Phi^- = -\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ も分かる．ところが **step4** より $\Phi = \Phi^+ \amalg \Phi^- = \Phi^+(\gamma) \amalg \bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$ なので，$\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ でなくてはいけない．従って $\forall\alpha\in\Delta$ は分割不可能であり[*9]，$\Delta\subset\Delta(\gamma)$ だと分かった．**(B-1)** および **step4** より $|\Delta| = |\Delta(\gamma)| = l$ なので[*10] $\Delta = \Delta(\gamma)$ が言えた．

■

[*8] このような γ が存在することを示そう．**(B-1)** より Δ は $\mathbb{E}$ の基底だから，$\forall\alpha$ に対して $\gamma_\alpha\in\mathbb{E}$ を，$\mathbb{E}$ の部分ベクトル空間 $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\Delta\setminus\{\alpha\})$ の $(\ ,\ )$ に関する直交補空間 $\Bigl(\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\Delta\setminus\{\alpha\})\Bigr)^\perp$ への α の射影とする．Δ の元は全て互いに線型独立なので $\gamma_\alpha\neq 0$ である．このとき，$\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}_{>0}$ に対して $\gamma := \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha\gamma_\alpha$ とおけば，$\forall\alpha\in\Delta$ に対して $(\gamma,\alpha) = k_\alpha(\gamma_\alpha,\alpha) > 0$ が成り立つ．

[*9] $\beta_1 = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_{1\alpha}\alpha$, $\beta_2 = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_{2\alpha}\alpha \in \Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ を用いて $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ と書けたとする．このとき Δ の元の線型独立性から $\beta_{1\alpha} + \beta_{2\alpha} = 1$ かつ $\forall\gamma\in\Delta\setminus\{\alpha\}$, $\beta_{1\gamma} + \beta_{2\gamma} = 0$ が成り立つが，**(B-2)** より $(\beta_{1\alpha}, \beta_{2\alpha}) = (1, 0)$ または $(0, 1)$ かつ $\forall\gamma\in\Delta\setminus\{\alpha\}$, $\beta_{1\gamma} = \beta_{2\gamma} = 0$, i.e. $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha, 0)$ または $(0, \alpha)$ でなくてはならず，$0\notin\Phi^+$ に矛盾．

[*10] [Hum72] では集合の**濃度** (cardinality) の意味で $\mathrm{Card}\,\Delta$ と書かれていた．

定義 3.2.3: Weyl の区画

- 位相空間[a] $\mathbb{E}$ の部分空間 $\mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$ の連結成分の 1 つのことを（開な）**Weyl の区画** (Weyl chamber) [b]と呼ぶ.
- 正則な $\gamma \in \mathbb{E}$ が属する Weyl の区画のことを $\mathfrak{C}(\gamma)$ と書く[c].
- Φ の底 Δ に対して定理 3.2.1 の意味で $\Delta = \Delta(\gamma)$ ならば $\mathfrak{C}(\Delta) := \mathfrak{C}(\gamma)$ とおき，**Δ に関する Weyl の基本区画** (fundamental Weyl chamber relative to Δ)[d] と呼ぶ.

---

[a] Euclid 空間の定義の脚注を参照.
[b] この訳語は筆者が勝手につけたものである. [佐武 87] では **Weyl の部屋**と呼ばれていた.
[c] LaTeX コマンドは `\mathfrak{C}`
[d] これの訳語は全く普及していない気がする. **Δ に関する基本的 Weyl の部屋**だと語感が悪いと思ったのでこのような訳語を充てた.

補題 3.2.2: Weyl の区画の基本性質

正則な任意の $\gamma, \gamma' \in \mathbb{E}$ および任意の Φ の底 Δ を与える. 定理 3.2.1 によって得られる Φ の底を $\Delta(\gamma)$ と書く.

(1) $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma') \iff \Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$

(2) 写像

$$\begin{aligned} \{\, \Phi \text{ の底全体の集合} \,\} &\longrightarrow \{\, \text{Weyl の区画全体の集合} \,\}, \\ \Delta &\longmapsto \mathfrak{C}(\Delta) \end{aligned}$$

は全単射である.

(3) $\mathfrak{C}(\Delta) = \left\{\, \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; \forall \alpha \in \Delta,\ (\beta, \alpha) > 0 \,\right\}$

証明 (1) $\alpha \in \Phi$ に関する鏡映面 P_α に関して

$$P_\alpha^+ := \left\{\, \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; (\beta,\alpha) > 0 \,\right\}, \qquad P_\alpha^- := \left\{\, \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; (\beta,\alpha) < 0 \,\right\}$$

とおく. すると $\mathbb{E} \setminus P_\alpha = P_\alpha^+ \cup P_\alpha^-$（disjoint union）となるから,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha &= \bigcap_{\alpha\in\Phi} (\mathbb{E} \setminus P_\alpha) \\ &= \bigcap_{\alpha\in\Phi} (P_\alpha^+ \cup P_\alpha^-) \\ &= \bigcup_{\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Phi} \in \prod_{\alpha\in\Phi}\{\pm\}} \bigcap_{\alpha\in\Phi} P_\alpha^{\mu_\alpha} \end{aligned}$$

である. 最右辺の $\bigcap_{\alpha\in\Phi} P_\alpha^{\mu_\alpha}$ は凸集合の共通部分なので凸集合であり，従って連結である. さらに $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Phi} \in \prod_{\alpha\in\Phi}\{\pm\}$ に関する重複を除いて位相空間の意味で disjoint であるから Weyl の区画であ

る[*11]．従って $\mathfrak{C}(\gamma)$ は，$\forall\alpha\in\Phi$ に対して

$$\mu_\alpha(\gamma) \coloneqq \begin{cases} +, & (\gamma,\alpha)>0, \\ -, & (\gamma,\alpha)<0 \end{cases}$$

とおけば

$$\mathfrak{C}(\gamma) = \bigcap_{\alpha\in\Phi} P_\alpha^{\mu_\alpha(\gamma)} = \left\{\, \beta\in\mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha\in\Phi,\ (\gamma,\alpha)(\beta,\alpha)>0 \,\right\} \tag{3.2.1}$$

と書ける．よって

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\gamma)=\mathfrak{C}(\gamma') \quad &\iff \quad \forall\alpha\in\Phi,\ \mu_\alpha(\gamma)=\mu_\alpha(\gamma') \\ &\iff \quad \Phi^+(\gamma)=\Phi^+(\gamma') \\ &\iff \quad \Delta(\gamma)=\Delta(\gamma') \end{aligned}$$

が言える．

(2) (1)，定理 3.2.1，および Weyl の基本区画の定義から従う．

(3) $\Delta=\Delta(\gamma)$ を充たす正則な $\gamma\in\mathbb{E}$ を 1 つとる．すると (3.2.1) より

$$\mathfrak{C}(\Delta) = \left\{\, \beta\in\mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha\in\Phi,\ (\gamma,\alpha)(\beta,\alpha)>0 \,\right\}$$

だが，$\Phi=\Phi^+(\gamma)\amalg\bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$ でかつ $\Phi^+(\gamma)$ の定義より $\forall\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ に対して $(\gamma,\alpha)>0$ が成り立つので

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\Delta) &= \left\{\, \beta\in\mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha\in\Phi^+(\gamma),\ (\beta,\alpha)>0 \,\right\} \\ &= \left\{\, \beta\in\mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha\in\Delta(\gamma),\ (\beta,\alpha)>0 \,\right\} \end{aligned}$$

だと分かった．

■

補題 3.2.3: Weyl の区画と Weyl 群の関係

正則な任意の $\gamma\in\mathbb{E}$ および任意の Φ の底 Δ を与える．このとき $\forall\sigma\in\mathscr{W}$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\sigma\bigl(\Delta(\gamma)\bigr)=\Delta\bigl(\sigma(\gamma)\bigr)$

(2) $\sigma(\Delta)$ もまた Φ の底である．

(3) $\sigma\bigl(\mathfrak{C}(\gamma)\bigr)=\mathfrak{C}\bigl(\sigma(\gamma)\bigr)$

(4) $\sigma\bigl(\mathfrak{C}(\Delta)\bigr)=\mathfrak{C}\bigl(\sigma(\Delta)\bigr)$

証明 鏡映は等長変換（isometry）なので $\bigl(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\bigr)=(\alpha,\beta)$ が成り立つ．

(1)

$$\begin{aligned} \sigma\bigl(\Phi^+(\gamma)\bigr) &= \left\{\, \sigma(\alpha)\in\Phi \;\middle|\; (\gamma,\alpha)=\bigl(\sigma(\gamma),\sigma(\alpha)\bigr)>0 \,\right\} \\ &= \left\{\, \beta\in\Phi \;\middle|\; \bigl(\sigma(\gamma),\beta\bigr)>0 \,\right\} \\ &= \Phi^+\bigl(\sigma(\gamma)\bigr) \end{aligned}$$

[*11] より厳密には，$\mathbb{E}\setminus\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$ の部分空間として開かつ閉 (clopen) であり，かつそれ自身連結なので，連結成分の 1 つだと分かる．

が分かる．従って $\sigma\big(\Delta(\gamma)\big) = \Delta\big(\sigma(\gamma)\big)$ である．

(2) 定理 3.2.1 より，ある正則な $\gamma \in \mathbb{E}$ が存在して $\Delta = \Delta(\gamma)$ と書ける．よって (1) から $\sigma(\Delta) = \Delta\big(\sigma(\gamma)\big)$ であるが，再度定理 3.2.1 より右辺は Φ の底である．

(3) (3.2.1)，および $\sigma(\Phi) = \Phi$ より

$$\begin{aligned}\sigma\big(\mathfrak{C}(\gamma)\big) &= \left\{\, \sigma(\beta) \in \mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha \in \Phi,\ (\gamma,\alpha)(\beta,\alpha) = \big(\sigma(\gamma),\sigma(\alpha)\big)\big(\sigma(\beta),\sigma(\alpha)\big) > 0 \,\right\} \\ &= \left\{\, \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha \in \Phi,\ \big(\sigma(\gamma),\alpha\big)\big(\beta,\alpha\big) > 0 \,\right\} \\ &= \mathfrak{C}\big(\sigma(\gamma)\big)\end{aligned}$$

(4) (4) および定理 3.2.1 より従う．

■

補題 3.2.3 より，写像[*12]

$$\pi_{\mathrm{W}} \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{Isom}(\{\mathrm{Weyl}\ の区画\}),\ \sigma \longmapsto \Big(\mathfrak{C}(\gamma) \mapsto \mathfrak{C}\big(\sigma(\gamma)\big)\Big) \tag{3.2.2}$$

$$\pi_{\mathrm{b}} \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{Isom}(\{\Phi\ の底\}),\ \sigma \longmapsto \Big(\Delta \mapsto \sigma(\Delta)\Big) \tag{3.2.3}$$

が群準同型であることが分かった．i.e. Weyl 群 $\mathscr{W}$ は Weyl の区画全体の集合，および Φ の底全体の集合に群として左作用する．

3.2.2 単純ルートに関する補題

この小節では Φ の任意の底 Δ を 1 つ固定する．

補題 3.2.4:

$\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ が正ルートならば，ある $\beta \in \Delta$ が存在して $\alpha - \beta \in \Phi$ となる．特に，$\alpha - \beta \succ 0$ である．

証明 $\forall\beta \in \Delta$ に対して $(\alpha,\beta) \leq 0$ が成り立つと仮定すると，定理 3.2.1 の **step3** の証明と同様の議論により $\Delta \cup \{\alpha\}$ が線型独立となり，Δ が $\mathbb{E}$ の基底であることに矛盾．よってある $\beta \in \Delta$ が存在して $(\alpha,\beta) > 0$ となる．$\alpha \notin \Delta$ なので $\alpha \neq \pm\beta$ であることと併せると，補題 3.1.2 が使えて $\alpha - \beta \in \Phi$ だと分かる．

仮定より $\alpha \succ 0$ なので $\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Delta} \in \prod_{\gamma\in\Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が一意的に存在して $\alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} \alpha_\gamma \gamma$ と書ける．$\alpha \notin \Delta$ なのである $\gamma \in \Delta \setminus \{\beta\}$ が存在して $\alpha_\gamma > 0$ を充たす．よって $\alpha - \beta \in \Phi$ を単純ルートで展開した $\mathbb{Z}$-係数のうち少なくとも 1 つは正である．よって (B-2) から $\alpha - \beta \succ 0$ が言える． ■

[*12] $\mathrm{Isom}(X)$ は距離空間 X 上の全単射な等長変換全体が写像の合成に関して成す群（**等長変換群**; isometry group）を意味する．

系 3.2.2:

$\forall \beta \in \Phi^+$ に対して $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Delta$ が存在して（重複も許す），

$$\beta = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$$

かつ $1 \le \forall i \le k$ に対して

$$\sum_{j=1}^{i} \alpha_j \in \Phi$$

を充たす．

証明 仮定より $\{\beta_\gamma\}_{\gamma\in\Delta} \in \prod_{\gamma\in\Delta} \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が一意的に存在して $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} \beta_\gamma \gamma$ と書ける．$\mathrm{ht}\,\beta$ に関する数学的帰納法により示す．$\mathrm{ht}\,\beta = 1$ のときは $\beta \in \Delta \subset \Phi$ なので明らか．

$\mathrm{ht}\,\beta > 1$ とする．このとき $\beta \notin \Delta$ である．従って補題 3.2.4 が使えて $\beta - \gamma \in \Phi^+$ となる．よって帰納法の仮定から示された． ■

補題 3.2.5:

任意の単純ルート $\alpha \in \Delta$ に対して，$\sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ は $\sigma_\alpha\bigl(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}\bigr) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ を充たす．

証明 $\forall \beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ を 1 つとる．このとき $\{\beta_\gamma\}_{\gamma\in\Delta} \in \prod_{\gamma\in\Delta} \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が一意的に存在して $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} \beta_\gamma \gamma$ と書ける．$\beta \ne \pm\alpha$ だから，ある $\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ が存在して $\beta_\gamma > 0$ となる．このとき $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha$ の γ の係数は $k_\gamma > 0$ のままである．よって **(B-2)** から $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$ が言える．$\alpha = \sigma_\alpha(-\alpha) \ne \sigma_\alpha(\beta)$ なので $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ が言えた． ■

系 3.2.3:

$$\delta \coloneqq \frac{1}{2} \sum_{\beta\in\Phi^+} \beta$$

とおくと，$\forall \alpha \in \Delta$ に対して

$$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$$

が成り立つ．

証明 補題 3.2.5 より

$$\sigma_\alpha(\delta) = \sigma_\alpha\left(\sum_{\beta\in\Phi^+\setminus\{\alpha\}} \beta\right) + \sigma_\alpha(\alpha) = \delta - \alpha$$

■

補題 3.2.6:

重複を許して $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta$ を任意にとる．
このとき，もし $\sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t) \prec 0$ ならば，ある $1 \le s < t$ が存在して

$$\sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{s-1}} \circ \sigma_{\alpha_{s+1}} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}$$

が成り立つ．

証明 $\circ$ を省略し，$\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$ と略記する．

$$\beta_i := \begin{cases} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t), & 0 \le i \le t-2 \\ \alpha_t, & i = t-1 \end{cases}$$

とおく．$\beta_0 \prec 0$ かつ $\beta_{t-1} \succ 0$ なので，

$$s := \min\{\, i \in \mathbb{N} \mid \beta_i \succ 0 \,\}$$

が存在する．このとき $\beta_s \in \Phi^+$ かつ $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$ なので補題 3.2.5 より $\beta_s = \alpha_s$ でなくてはならない．$\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1} \in \mathscr{W}$ なので，このとき補題 3.1.3-(1) より

$$\sigma_s = \sigma_{\beta_s} = (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1})$$

だと分かる．よって

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}\sigma_s\sigma_{s+1} \cdots \sigma_t &= \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}(\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1})\sigma_{s+1} \cdots \sigma_t \\ &= \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}\sigma_{s+1} \cdots \sigma_t \end{aligned}$$

■

系 3.2.4:

$\sigma \in \mathscr{W}$ が，$\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta$ を用いて $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t}$ と表示されているとする．このような σ の表示のうち t が最小のものに対しては $\sigma(\alpha_t) \prec 0$ である．

証明

$$\sigma(\alpha_t) = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}(-\alpha_t)$$

なので，もし $\sigma(\alpha_t) \succ 0$ ならば $\sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t) \prec 0$ となる．然るにこのとき補題 3.2.6 からある $1 \le s < \mathrm{len}(\sigma)$ が存在して

$$\sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{s-1}} \circ \sigma_{\alpha_{s+1}} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}$$

が成り立ち，t の最小性に矛盾する．よって背理法から $\sigma(\alpha_t) \prec 0$ である． ■

3.2.3 Weyl 群の性質

準備が整ったので，Weyl 群の極めて重要な性質を示す．

定理 3.2.5: Weyl 群の性質

Φ の底 Δ を任意に与える．

(1) $\gamma \in \mathbb{E}$ が正則ならば，ある $\sigma \in \mathscr{W}$ が存在して，$\forall \alpha \in \Delta$, $\bigl(\sigma(\gamma), \alpha\bigr) > 0$ を充たす．
特に，Weyl 群の作用 (3.2.2)

$$\pi_{\mathrm{W}} \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{Isom}(\{\text{Weyl の区画}\}),\ \sigma \longmapsto \Bigl(\mathfrak{C}(\gamma) \mapsto \mathfrak{C}\bigl(\sigma(\gamma)\bigr)\Bigr)$$

は**推移的** (transitive) [a]である．

(2) Δ' が Φ のもう 1 つの底ならば，ある $\sigma \in \mathscr{W}$ が存在して $\sigma(\Delta') = \Delta$ を充たす．
i.e. Weyl 群の作用 (3.2.3)

$$\pi_{\mathrm{b}} \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{Isom}(\{\Phi \text{ の底}\}),\ \sigma \longmapsto \Bigl(\Delta \mapsto \sigma(\Delta)\Bigr)$$

は**推移的** (transitive) である．

(3) $\forall \alpha \in \Phi$ に対してある $\sigma \in \mathscr{W}$ が存在して $\sigma(\alpha) \in \Delta$ を充たす．

(4) $\mathscr{W}$ は集合 $\{\, \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \,\} \subset \{\, \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi \,\}$ によって生成される．

(5) $\sigma \in \mathscr{W}$ が $\sigma(\Delta) = \Delta$ を充たすならば $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ である．i.e. Weyl 群の作用 (3.2.2) は**自由** (free) である．

[a] i.e. 任意の Weyl の区画 $\mathfrak{C}(\gamma)$, $\mathfrak{C}(\gamma')$ に対してある $\sigma \in \mathscr{W}$ が存在して $\pi_{\mathrm{W}}(\sigma)(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\gamma')$ を充たす．

証明 集合 $\{\, \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \,\}$ によって生成される $\mathscr{W}$ の部分群を $\mathscr{W}'$ とする．まず (1)-(3) を $\mathscr{W}'$ において示してから $\mathscr{W}' = \mathscr{W}$ を示す．

(1) 正則な $\gamma \in \mathbb{E}$ を任意にとる．$\delta \coloneqq \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$ とおき，$\sigma \in \arg\max_{\sigma \in \mathscr{W}'} \bigl(\sigma(\gamma), \delta\bigr)$ を 1 つとる[*13]．ここで $\forall \alpha \in \Delta$ を 1 つとると，$\sigma_\alpha \circ \sigma \in \mathscr{W}$ であるから系 3.2.3 より

$$\bigl(\sigma(\gamma), \delta\bigr) \geq \bigl(\sigma_\alpha \circ \sigma(\gamma), \delta\bigr) = \bigl(\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)\bigr) = \bigl(\sigma(\gamma), \delta - \alpha\bigr) = \bigl(\sigma(\gamma), \delta\bigr) - \bigl(\sigma(\gamma), \alpha\bigr)$$

が分かる．よって $\bigl(\sigma(\gamma), \alpha\bigr) \geq 0$ が分かった．γ は正則なので $\bigl(\sigma(\gamma), \alpha\bigr) = \bigl(\gamma, \sigma^{-1}(\alpha)\bigr) > 0$ が言えた．補題 3.2.2-(3) より，このことは $\sigma(\gamma) \in \mathfrak{C}(\Delta)$ を意味する．従って $\pi_{\mathrm{W}}(\sigma)\bigl(\mathfrak{C}(\gamma)\bigr) = \mathfrak{C}\bigl(\sigma(\gamma)\bigr) = \mathfrak{C}(\Delta)$ であり，γ, Δ は任意だったので補題 3.2.2-(2) より π_{W} が推移的であることが分かった．

(2) 定理 3.2.1 より，$\Delta' = \Delta(\gamma')$ を充たす正則な $\gamma' \in \mathbb{E}$ が存在する．このとき (1) および補題 3.2.2-(3) よりある $\sigma \in \mathscr{W}'$ が存在して $\sigma(\gamma') \in \mathfrak{C}(\Delta)$ が成り立つから，再度補題 3.2.3 より $\sigma\bigl(\mathfrak{C}(\Delta')\bigr) = \sigma\bigl(\mathfrak{C}(\gamma')\bigr) = \mathfrak{C}\bigl(\sigma(\gamma')\bigr) = \mathfrak{C}(\Delta)$ が分かる．従って補題 3.2.2-(2) より $\sigma(\Delta') = \Delta$ である．

(3) $\forall \alpha \in \Phi$ を 1 つとる．(2) より，α が少なくとも 1 つの（Δ とは限らない）Φ の底に属することを言えば良い．

(Root-2) より $\forall \beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ に対して $\beta \notin \mathbb{K}\alpha$ であるから $\mathbb{K}\alpha \cap \mathbb{K}\beta = 0$ である．よって $P_\alpha \cap P_\beta = (\mathbb{K}\alpha)^\perp \cap (\mathbb{K}\beta)^\perp = (\mathbb{K}\alpha \oplus \mathbb{K}\beta)^\perp$ となる[*14]が，$\mathbb{K}\alpha \subsetneq \mathbb{K}\alpha \oplus \mathbb{K}\beta$ なので $P_\alpha \cap P_\beta = (\mathbb{K}\alpha \oplus \mathbb{K}\beta)^\perp \subsetneq (\mathbb{K}\alpha)^\perp = P_\alpha$ が成り立ち，$\exists \gamma \in P_\alpha \setminus (P_\alpha \cap P_\beta)$ が言える．ここで γ に Euclid 距離の

[*13] $\mathscr{W}' \subset \mathscr{W}$ は有限群なのでこのような σ は少なくとも 1 つ存在する．

[*14] $\perp$ は Euclid 空間に備わっている双線型形式 (,) に関する直交補空間の意味である．

意味で十分近い正則な $\gamma' \in \mathbb{E}$ を取れば，ある $\varepsilon > 0$ に対して $(\gamma', \alpha) = \varepsilon$ かつ $|(\gamma', \beta)| > \varepsilon$ を充たすようにできる．すると $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ で，かつ $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ は任意だったので α は分割不可能であり，[*15]，$\alpha \in \Delta(\gamma')$ が言えた．

(4) $\mathscr{W} = \mathscr{W}'$ を言うには，$\forall \alpha \in \Phi$ に対して $\sigma_\alpha \in \mathscr{W}'$ が成り立つことを示せば十分である．ここで (3) よりある $\sigma \in \mathscr{W}'$ が存在して $\sigma(\alpha) \in \Delta$ を充たすようにできる．このとき補題 3.1.3-(1) より $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}$ であるので，$\sigma_{\alpha(\alpha)} \in \mathscr{W}'$ より $\sigma_\alpha = \sigma^{-1} \circ \sigma_{\sigma(\alpha)} \circ \sigma \in \mathscr{W}'$ が言えた．

(5) 背理法により示す．$\sigma(\Delta) = \Delta$ でかつ $\sigma \neq \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ を仮定する．このとき (4) よりある $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$ が存在して $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t}$ と表示できる．このような σ の表示のうち，t が最小のものをとる．然るにこのとき仮定より $\sigma(\alpha_t) \succ 0$ と言うことになって系 3.2.4 に矛盾．

■

定義 3.2.4: Weyl 群の簡約表示

Φ の底 Δ を任意に与える．

- $\forall \sigma \in \mathscr{W}$ に対して一意に定まる非負整数

$$\mathbf{len}(\boldsymbol{\sigma}) \coloneqq \min\left\{ t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta,\ \sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t} \right\}$$

  を Δ に関する σ の**長さ** (length) と呼ぶ．ただし $\mathrm{len}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) \coloneqq 0$ と定義する．
- $\sigma \in \mathscr{W}$ の表示

$$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{\mathrm{len}(\sigma)}} \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \alpha_i \in \Delta$$

  のことを Δ に関する σ の**簡約表示** (reduced presentation) と呼ぶ．

補題 3.2.7: 簡約表示の長さ

Φ の底 Δ を任意に与える．このとき $\forall \sigma \in \mathscr{W}$ に対して

$$\mathrm{len}(\sigma) = \left| \left\{ \beta \in \Phi \;\middle|\; \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma(\beta) \prec 0 \right\} \right|$$

が成り立つ．右辺を $\boldsymbol{n(\sigma)}$ とおく．

<u>証明</u> $\forall \sigma \in \mathscr{W}$ を 1 つ固定する．$\mathrm{len}(\sigma)$ に関する数学的帰納法により示す．$\mathrm{len}(\sigma) = 0$ のときは $\sigma = \mathrm{id}$ なので良い[*16]．

$\mathrm{len}(\sigma) > \mathrm{len}(\tau)$ を充たす任意の $\tau \in \mathscr{W}$ に対して補題が成り立っているとする．$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t}$ を Δ に関する σ の簡約表示とし，$\alpha \coloneqq \alpha_t \in \Delta$ とおく．すると系 3.2.4 より $\sigma(\alpha) \prec 0$ であるから

$$\alpha \in \left\{ \beta \in \Phi \;\middle|\; \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma(\beta) \prec 0 \right\}$$

[*15] α が分割可能とする．このときある $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma')$ が存在して $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ と書ける．ところが今 $(\gamma', \beta_i) > \varepsilon$ であるから，$\varepsilon = (\gamma', \alpha) = (\gamma', \beta_1) + (\gamma', \beta_2) > 2\varepsilon$ と言うことになり，$\varepsilon > 0$ に矛盾．

[*16] **(Root-1)** より $0 \notin \Phi$ である．

がわかる．一方で $\sigma\circ\sigma_\alpha(\alpha)=\sigma(-\alpha)\succ 0$ なので

$$\{\,\beta\in\Phi\mid \beta\succ 0\ \text{ かつ }\ \sigma\circ\sigma_\alpha(\beta)\prec 0\,\}=\{\,\beta\in\Phi^+\setminus\{\alpha\}\mid \sigma\bigl(\sigma_\alpha(\beta)\bigr)\prec 0\,\}$$

であるが，補題 3.2.5 から最右辺は

$$\{\,\beta\in\Phi\mid \beta\succ 0\ \text{ かつ }\ \sigma(\beta)\prec 0\,\}\setminus\{\alpha\}$$

に等しい．よって

$$\begin{aligned}
n(\sigma\circ\sigma_\alpha)&=\bigl|\{\,\beta\in\Phi\mid \beta\succ 0\ \text{ かつ }\ \sigma\circ\sigma_\alpha(\beta)\prec 0\,\}\bigr|\\
&=\bigl|\{\,\beta\in\Phi\mid \beta\succ 0\ \text{ かつ }\ \sigma(\beta)\prec 0\,\}\setminus\{\alpha\}\bigr|\\
&=\bigl|\{\,\beta\in\Phi\mid \beta\succ 0\ \text{ かつ }\ \sigma(\beta)\prec 0\,\}\bigr|-1\\
&=n(\sigma)-1
\end{aligned}$$

だと分かった．ところで $\mathrm{len}(\sigma\circ\sigma_\alpha)=\mathrm{len}(\sigma_{\alpha_1}\circ\cdots\circ\sigma_{\alpha_{t-1}})=\mathrm{len}(\sigma)-1<\mathrm{len}(\sigma)$ であるから，帰納法の仮定より $\mathrm{len}(\sigma)-1=\mathrm{len}(\sigma\circ\sigma_\alpha)=n(\sigma\circ\sigma_\alpha)=n(\sigma)-1$ であり，$n(\sigma)=\mathrm{len}(\sigma)$ が言えた． ■

位相空間 X の部分空間 $A\subset X$ の閉包[*17]を $\overline{A}$ と書く．一般に，群 G の作用 $\blacktriangleright\colon G\times X\longrightarrow X$ の**基本領域** (fundamental domain) とは，X の部分空間 $A\subset X$ であって $\forall x\in X$ に対して $A\cap(G\blacktriangleright\{x\})$ が 1 点集合になるようなもののことを言う．

補題 3.2.8: Weyl 群の作用の基本領域

Φ の底 Δ を任意に与え，$\forall\lambda,\ \mu\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ をとる．
このとき $\exists\sigma\in\mathscr{W},\ \sigma(\lambda)=\mu$ ならば，σ は点 λ を固定する鏡映の積で書ける．特に $\lambda=\mu$ である．

<u>**証明**</u> $\mathrm{len}(\sigma)$ に関する数学的帰納法により示す．$\mathrm{len}(\sigma)=0$ ならば明らか．

$\mathrm{len}(\sigma)>0$ とする．補題 3.2.7 より σ はある正ルートを負ルートに移す．よって $\sigma(\alpha)\prec 0$ を充たす $\alpha\in\Delta$ が存在する．このとき $\lambda,\ \mu\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ であることから

$$0\geq\bigl(\mu,\sigma(\alpha)\bigr)=\bigl(\sigma^{-1}(\mu),\alpha\bigr)=(\lambda,\alpha)\geq 0$$

となって $(\lambda,\alpha)=0$ が分かった．従って $\sigma_\alpha(\lambda)=\lambda,\ \sigma\circ\sigma_\alpha(\lambda)=\mu$ が言える．i.e. σ_α は λ を固定する鏡映である．さらに補題 3.2.5, 3.2.7 から $\mathrm{len}(\sigma\circ\sigma_\alpha)=\mathrm{len}(\sigma)-1$ であり，帰納法の仮定が使えて $\sigma=(\sigma\circ\sigma_\alpha)\circ\sigma_\alpha$ は λ を固定する鏡映の積で書ける． ■

3.2.4 既約なルート系

定義 3.2.5: ルート系の既約性

ルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$ が**既約** (irreducible) であるとは，Φ が以下の条件を満たすことを言う：

(Root-irr)

Φ の部分集合 $\Phi_1,\ \Phi_2\subset\Phi$ が $\Phi=\Phi_1\amalg\Phi_2$ かつ $(\Phi_1,\Phi_2)=0$ を充たす $\Longrightarrow$ $\Phi_1=\emptyset$ または $\Phi_2=\emptyset$

[*17] $\overline{A}:=\bigcap_{F\colon\text{closed},\ A\subset F}F$

命題 3.2.1: ルート系の既約性の特徴付け

ルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$ を与え，Φ の底 Δ を 1 つ固定する．
このとき，以下の 2 つは同値である：

(1) Φ は既約

(2) Δ の部分集合 $\Delta_1,\ \Delta_2 \subset \Delta$ が $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$ かつ $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ を充たす $\Longrightarrow$ $\Delta_1 = \emptyset$ または $\Delta_2 = \emptyset$

証明 **(1) $\Longleftarrow$ (2)**

対偶を示す．Φ の空でない 2 つの部分集合 $\Phi_1,\ \Phi_2 \subset \Phi$ であって $\Phi = \Phi_1 \amalg \Phi_2$ かつ $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ を充たすものが存在するとする．このとき $\Delta_i \coloneqq \Delta \cap \Phi_i\ (i = 1,\ 2)$ とおくと $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$ かつ $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ が成り立つ．あとは $\Delta_1 \neq \emptyset$ かつ $\Delta_2 \neq \emptyset$ を背理法により示す．$\Delta_1,\ \Delta_2$ のどちらかが空だと仮定する．議論は全く同様なので $\Delta_2 = \emptyset$ としよう．このとき $\Delta \subset \Phi_1$ なので仮定より $(\Delta, \Phi_2) = 0$ だが，**(B-1)** よりこのことは $(\mathbb{E}, \Phi_2) = 0$ を意味する．よって $\Phi_2 = \emptyset$ となり $\Phi_2 \neq \emptyset$ に矛盾．

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Φ が既約だとする．このとき背理法によって (2) を示す．Δ の空でない 2 つの部分集合 $\Delta_1,\ \Delta_2 \subset \Delta$ であって $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$ かつ $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ を充たすものが存在するとする．このとき定理 3.2.5-(3) より，

$$\Phi_i \coloneqq \left\{ \alpha \in \Phi \,\middle|\, \exists \sigma \in \mathscr{W},\ \sigma(\alpha) \in \Delta_i \right\}$$

とおくと $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ となる．ここで $\forall \alpha_i \in \Delta_i$ に対して仮定より $[\![\alpha_i, \alpha_j]\!] = 0 \quad (i \neq j)$ であるから

$$(\sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} - \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\alpha_1})(\beta) = [\![\beta, \alpha_2]\!][\![\alpha_2, \alpha_1]\!]\alpha_1 - [\![\beta, \alpha_1]\!][\![\alpha_1, \alpha_2]\!]\alpha_2 = 0$$

i.e. $\sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} = \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\alpha_1}$ である．さらに $\sigma_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j \quad (i \neq j)$ であるから $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ であり，$\Phi_i \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\, \Delta_i$ である．よって背理法の仮定から $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ となるが，仮定より Φ は既約なので $\Phi_1 = \emptyset$ または $\Phi_2 = \emptyset$ である．従って Δ_i のどちらかが空集合ということになって矛盾．

■

補題 3.2.9:

ルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$ を与え，Φ の底 Δ を任意にとる．
このとき Φ が既約ならば，半順序 $\prec$ に関して Φ は唯一の極大元 $\beta_0 \in \Phi$ を持つ[a]．特に $\beta_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ と書いたときに $\forall \alpha \in \Delta,\ k_\alpha > 0$ である．

[a] i.e. $\forall \alpha \in \Phi,\ \alpha \neq \beta_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ht}\, \alpha < \mathrm{ht}\, \beta_0$．さらに，$\forall \alpha \in \Delta,\ (\beta_0, \alpha) \geq 0$

証明 **(Root-1)** より $(\Phi, \prec)$ は有限な半順序集合だから極大元 $\beta_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \in \Phi$ を少なくとも 1 つ持つ．$\beta_0 \prec 0$ だとすると任意の単純ルート α に対して $\beta_0 \prec \alpha$ となり β_0 の極大性に矛盾．よって $\beta_0 \succ 0$ である．

まず $\forall \alpha \in \Delta,\ k_\alpha > 0$ を示そう．

$$\Delta_1 \coloneqq \left\{ \alpha \in \Delta \,\middle|\, k_\alpha > 0 \right\},$$
$$\Delta_2 \coloneqq \left\{ \alpha \in \Delta \,\middle|\, k_\alpha = 0 \right\}$$

とおくと $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$ が成り立つ．$\Delta_2 = \emptyset$ を背理法により示す．$\Delta_2 \neq \emptyset$ を仮定する．$\beta_0 \neq 0$ なので $\Delta_1 \neq \emptyset$ だが，仮定より Φ が既約なので命題 3.2.1 から $(\Delta_1, \Delta_2) \neq 0$，i.e. ある $\alpha_1 \in \Delta_1$, $\alpha_2 \in \Delta_2$ が存在して $(\alpha_1, \alpha_2) < 0$ を満たす．従って

$$(\alpha_2, \beta_0) = k_{\alpha_1}(\alpha_2, \alpha_1) + \sum_{\gamma \in \Delta_1 \setminus \{\alpha_1\}} k_\gamma \underbrace{(\alpha_2, \gamma)}_{\leq 0\ (\because\ \text{補題 } 3.2.1)} < 0$$

ということになる．然るにこのとき補題 3.1.2 から $\alpha_2 + \beta_0 \in \Phi$ となり β_0 の極大性に矛盾する．

次に，$\forall \alpha \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta_0) \geq 0$ であることを背理法により示す．実際ある $\alpha \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta_0) < 0$ だとすると補題 3.1.2 から $\alpha + \beta_0 \in \Phi$ となり β_0 の極大性に矛盾する．次に，ある $\alpha_0 \in \Delta$ が存在して $(\alpha_0, \beta_0) > 0$ となることを背理法により示す．実際 $\forall \alpha \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta_0) = 0$ だとすると $\beta_0 \in (\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Delta)^\perp = \mathbb{E}^\perp = 0$ ということになり矛盾する．

最後に β_0 の一意性を示す．別の極大元 $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} \beta_\gamma \gamma \in \Phi$ をとる．上の議論は β にも当てはまるので $\forall \gamma \in \Delta$, $\beta_\gamma > 0$ であり，

$$(\beta, \beta_0) = \beta_{\alpha_0}(\alpha_0, \beta_0) + \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha_0\}} \beta_\gamma(\gamma, \beta_0) > 0$$

だと分かった．従って補題 3.1.2 から $\beta = \beta_0$ または $\beta - \beta_0 \in \Phi$ である．後者だと β, β_0 のどちらかの極大性に矛盾するので，背理法から証明が完成した． ■

補題 3.2.10:

Φ が既約ならば，Weyl 群の表現

$$\pi \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E}),\ \sigma \longmapsto \big(\gamma \mapsto \sigma(\gamma)\big)$$

は既約である．特に，$\forall \alpha \in \Phi$ に対して

$$\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\big(\mathscr{W} \blacktriangleright \{\alpha\}\big)$$

が成り立つ[a]．

[a] $\blacktriangleright \colon \mathscr{W} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E},\ (\sigma,\ \gamma) \longmapsto \pi(\sigma)(\gamma)$ と定義した．

証明 $\mathbb{E}$ の 0 でない $\mathscr{W}$-不変な部分ベクトル空間 $W \subset \mathbb{E}$ を任意にとる．このとき W の直交補空間 $W^\perp$ について $\mathbb{E} = W \oplus W^\perp$ が成り立つ．$\forall \gamma \in W, \forall \delta \in W^\perp, \forall \sigma \in \mathscr{W}$ に対して $\big(\gamma, \sigma(\delta)\big) = \big(\sigma^{-1}(\gamma), \delta\big) = 0$ が成り立つので $\sigma(\delta) \in W^\perp$ であり，$W^\perp$ もまた $\mathscr{W}$-不変である．

さて，W は $\mathscr{W}$-不変なので $\forall \alpha \in \Phi$ に対して $\sigma_\alpha(W) = W$ が成り立つ．このときもし $\alpha \notin W$ かつ $W \not\subset P_\alpha$ だとすると $\gamma \in W \setminus P_\alpha$ が存在して $\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - [\![\gamma, \alpha]\!]\alpha \in W$ が成り立つが $[\![\gamma, \alpha]\!] \neq 0$ なので $\alpha \in W$ ということになり矛盾．よって $\alpha \in W$ または $W \subset P_\alpha = (\mathbb{K}\alpha)^\perp$ である．i.e. $\forall \alpha \in \Phi$ は W か $W^\perp$ のどちらか一方に含まれ，$\Phi = (\Phi \cap W) \amalg (\Phi \cap W^\perp)$ が成り立つ．然るに $\big(\Phi \cap W, \Phi \cap W^\perp\big) = 0$ かつ W は 0 でないので，Φ の既約性から $\Phi \cap W^\perp = \emptyset$ だと分かる．$\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$ なので $W^\perp = 0$ が言えた．

$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\big(\mathscr{W} \blacktriangleright \{\alpha\}\big)$ は 0 でない $\mathscr{W}$-不変な部分ベクトル空間なので，π が既約表現であることから $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\big(\mathscr{W} \blacktriangleright \{\alpha\}\big)$ である． ■

補題 3.2.11:

Φ が既約ならば，ルートの長さがとりうる値は高々 2 通りである．さらに，同じ長さのルートは互いに Weyl 群の作用により移り合う．

<u>**証明**</u> $\forall\alpha,\,\beta\in\Phi$ をとる．補題 3.2.10 より $\mathbb{E}=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\,\sigma(\alpha)\mid\sigma\in\mathscr{W}\,\}$ なので，ある $\sigma\in\mathscr{W}$ が存在して $(\sigma(\alpha),\beta)\neq 0$ を充たす[*18]．α と $\sigma(\alpha)$ を取り替えることで $(\alpha,\beta)\neq 0$ として良い．このとき表 3.1 より $\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}\in\{1,\,2,\,3,\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{3}\}$ である．

さて，互いに長さの異なる 3 つのルート $\alpha,\,\beta,\,\gamma\in\Phi$ が存在したとする．冒頭の議論からこのとき $(\alpha,\beta)\neq 0,\;(\gamma,\beta)\neq 0$ を仮定してよく，$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2},\,\frac{\|\gamma\|^2}{\|\beta\|^2},\,\frac{\|\gamma\|^2}{\|\alpha\|^2}\in\{2,\,3,\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{3}\}$ である．然るにこのときどの組み合わせであっても $\frac{\|\gamma\|^2}{\|\alpha\|^2}=\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}\frac{\|\gamma\|^2}{\|\beta\|^2}\notin\{2,\,3,\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{3}\}$ となり矛盾．故に前半が示された．

後半を示す．$\|\alpha\|=\|\beta\|$ とする．冒頭の議論から $(\alpha,\beta)\neq 0$ を仮定して良い．このとき表 3.1 から $[\![\alpha,\beta]\!]=[\![\beta,\alpha]\!]=\pm 1$ となる．必要ならば β を $-\beta=\sigma_\beta(\beta)$ に置き換えることで $[\![\alpha,\beta]\!]=1$ にできる．すると

$$\sigma_\alpha\circ\sigma_\beta\circ\sigma_\alpha(\beta)=\sigma_\alpha\circ\sigma_\beta(\beta-\alpha)=\sigma_\alpha(-\beta-\alpha+\beta)=\alpha$$

であることが分かった． ■

補題 3.2.12:

Φ が既約ならば，補題 3.2.9 で得た極大ルート $\beta_0\in\Phi$ の長さの値は，あり得る 2 通りのうち大きい方である．

<u>**証明**</u> Φ の底 Δ および $\forall\alpha\in\Phi$ をとる．$(\beta_0,\beta_0)\geq(\alpha,\alpha)$ を示せば十分である．

さて，定理 3.2.5-(3) より，$\mathscr{W}$ の作用によって移すことで $\alpha\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ を仮定して良い．補題 3.2.9 より $\beta_0-\alpha\succ 0$ なので，$\forall\gamma\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ に対して $(\gamma,\beta_0-\alpha)\geq 0$ である．$\gamma=\beta_0,\,\alpha$ の場合を考えることで $(\beta_0,\beta_0)\geq(\beta_0,\alpha)\geq(\alpha,\alpha)$ が言えた． ■

3.3 ルート系の分類

この節では $(\mathbb{E},\,\Phi)$ を任意のランク l のルート系とし，その Weyl 群を $\mathscr{W}$ と略記する．さらに Φ の底 Δ を 1 つ固定する．

3.3.1 Cartan 行列

[*18] $\forall\sigma\in\mathscr{W}$ に対して $(\sigma(\alpha),\beta)=0$ だとすると $\beta\in(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\,\sigma(\alpha)\mid\sigma\in\mathscr{W}\,\})^{\perp}=0$ となり矛盾

$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ と書こう．

定義 3.3.1: Cartan 行列

ルート系 Φ の **Cartan 行列** (Cartan matrix) とは，

$$\begin{bmatrix} [\![\alpha_1, \alpha_1]\!] & \cdots & [\![\alpha_1, \alpha_l]\!] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\![\alpha_l, \alpha_1]\!] & \cdots & [\![\alpha_l, \alpha_l]\!] \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(l,\, \mathbb{Z})$$

のこと[a]．$[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!] \in \mathbb{Z}$ のことを **Cartan 整数** (Cartan integer) と呼ぶ．

[a] Δ は $\mathbb{E}$ の基底なので，Cartan 行列を $\mathrm{GL}(l,\, \mathbb{R})$ の元と見做すこともできる．

定理 3.2.5-(2) および補題 3.1.2-(2) より，Cartan 行列は底 Δ の取り方によらずに定まる[*19]！

命題 3.3.1: Cartan 行列によるルート系の特徴付け

- ランク l のルート系 $(\mathbb{E},\, \Phi)$, $(\mathbb{E}',\, \Phi')$
- Φ の底 $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$
- Φ' の底 $\Delta' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l\}$

を与える．このとき以下の 2 つは同値である：

(1) $1 \le \forall \mu,\, \nu \le l$ に対して $[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!] = [\![\alpha'_\mu, \alpha'_\nu]\!]$

(2) ルート系の同型写像

$$\phi\colon (\mathbb{E},\, \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}',\, \Phi')$$

が存在する．

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2)

写像

$$\phi\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}',\ \alpha_\mu \longmapsto \alpha'_\mu$$

がルート系の同型写像となることを示す．まず Δ, Δ' はそれぞれ $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ の基底なので，写像 $\phi\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ はベクトル空間の同型写像である．

次に，仮定より

$$\begin{aligned} \phi \circ \sigma_{\alpha_\mu} \circ \phi^{-1}(\alpha'_\nu) &= \phi \circ \sigma_{\alpha_\mu}(\alpha_\nu) \\ &= \phi(\alpha_\nu - [\![\alpha_\nu, \alpha_\mu]\!]\alpha_\mu) \\ &= \alpha'_\nu - [\![\alpha'_\nu, \alpha'_\mu]\!]\alpha'_\mu \\ &= \sigma_{\alpha'_\mu}(\alpha'_\nu) \end{aligned}$$

[*19] 単純ルートのラベル付けの任意性を除く．

が成り立つので $\phi \circ \sigma_{\alpha_\mu} \circ \phi^{-1} = \sigma_{\alpha'_\mu}$ が言える．$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$, $\mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi')$ はそれぞれ $\{\, \sigma_{\alpha_\mu} \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha_\mu \in \Delta \,\}$, $\{\, \sigma_{\alpha'_\mu} \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha'_\mu \in \Delta' \,\}$ により生成されるので

$$\phi \circ \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \circ \phi^{-1} = \mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi')$$

だと分かった．よって定理 3.2.5-(3) より

$$\phi(\Phi) = \phi\bigl(\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \blacktriangleright \Delta\bigr) = \phi \circ \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \circ \phi^{-1} \circ \phi(\Delta) = \mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi') \blacktriangleright \Delta' = \Phi'$$

が言えた．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

ルート系の同型写像

$$\phi\colon (\mathbb{E},\, \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}',\, \Phi')$$

が存在するとする．このとき $\phi(\Delta)$ もまた Φ' の底になるので，補題 3.2.3-(1) よりある $\sigma' \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi')$ が存在して $\sigma'\bigl(\phi(\Delta)\bigr) = \Delta'$ を充たす．よって ϕ を $\sigma' \circ \phi$ に置き換えることで $\phi(\Delta) = \Delta'$ であるとして良い．さらに Δ, Δ' の添字を付け替えることで $\phi(\alpha_\mu) = \alpha'_\mu$ が成り立つとして良い．すると ϕ がルート系の同型写像であることから

$$[\![\alpha'_\mu, \alpha'_\nu]\!] = [\![\phi(\alpha_\mu), \phi(\alpha_\nu)]\!] = [\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!]$$

が言える．

■

つまり，任意のルート系はその Cartan 行列が与えれれれば完全に[*20]復元できる！ 実際，例えば次の手順に従えば良い [Hum72, p.56]：

(1) 相異なる任意の単純ルート $\alpha_\mu, \alpha_\nu \in \Delta$ をとってくる．すると補題 3.2.1 から

$$\max\{\, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \alpha_\mu - \lambda \alpha_\nu \in \Phi \,\} = 0$$

なので，命題 3.1.1-(4) から α_ν-string through α_μ は

$$\{\, \alpha_\mu + \lambda \alpha_\nu \mid 0 \leq \lambda \leq -[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!] \,\} \subset \Phi$$

と求まる．

(2) (1) を全ての $1 \leq \mu \neq \nu \leq l$ について繰り返せば，高さ 2 のルート全体の集合 $\Phi_{\mathrm{ht}=2} \coloneqq \{\, \alpha \in \Phi \mid \mathrm{ht}\,\alpha = 2 \,\}$ が求まる．このとき $\forall \alpha_\mu \in \Delta$, $\forall \alpha \in \Phi_{\mathrm{ht}=2}$ に対して $[\![\alpha, \alpha_\mu]\!] \in \mathbb{Z}$ を計算しておく．

(3) $\forall \alpha_\mu \in \Delta$ および $\forall \alpha \in \Phi_{\mathrm{ht}=2}$ に対して，補題 3.2.1 から

$$r \coloneqq \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \alpha - \lambda \alpha_\mu \in \Phi \,\} = 0,\, 1$$

である．よって α_μ-string through α は (2) で計算しておいた $[\![\alpha, \alpha_\mu]\!] \in \mathbb{Z}$ を使って

$$\{\, \alpha + \lambda \alpha_\mu \mid -r \leq \lambda \leq r - (\alpha, \alpha_\mu) \,\} \subset \Phi$$

と求まる．

(4) (3) を全ての $1 \leq \mu \neq \nu \leq l$ について繰り返せば，高さ 3 のルート全体の集合 $\Phi_{\mathrm{ht}=3} \coloneqq \{\, \alpha \in \Phi \mid \mathrm{ht}\,\alpha = 3 \,\}$ が求まる．このとき $\forall \alpha_\mu \in \Delta$, $\forall \alpha \in \Phi_{\mathrm{ht}=3}$ に対して $[\![\alpha, \alpha_\mu]\!] \in \mathbb{Z}$ を計算しておく．

(5) 補題 3.2.4 より任意の正ルート α は正ルートと単純ルートの和の形で書けるので，(1)-(4) までの手順を十分な回数繰り返せば全ての正ルートが得られる．

従って，ルート系を分類するには Cartain 行列としてあり得るものを全て列挙できれば十分である．

3.3.2 Coxeter グラフと Dynkin 図形

まず，Cartan 行列 $\left[\llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket\right]_{1\le\mu,\,\nu\le l}$ について

(CM-1) $1 \le \forall \mu \le l$ に対して

$$\llbracket \alpha_\mu, \alpha_\mu \rrbracket = 2\frac{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)}{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)} = 2$$

なので，対角成分は常に 2 である．

(CM-2) 補題 3.2.1 より $\forall 1 \le \mu \neq \nu \le l$ について

$$\llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket \le 0$$

なので，非対角成分は常に非正である．

(CM-3) 表 3.1 より $\forall 1 \le \mu \neq \nu \le l$ について

$$\llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket \llbracket \alpha_\nu, \alpha_\mu \rrbracket = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

のいずれかである．とくに $\llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket = -1$ であるか $\llbracket \alpha_\nu, \alpha_\mu \rrbracket = -1$ であるかのどちらかである．

が即座にわかる．**(CM-1)** より，Cartan 行列を知りたければその非対角成分を完全に決定できれば十分である．

定義 3.3.2: Coxeter グラフと Dynkin 図形

ランク l のルート系 Φ の Cartan 行列 $\left[\llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket\right]_{1\le\mu,\,\nu\le l}$ を与える．Φ の **Dynkin 図形** (Dynkin diagram) [a]$\Gamma(\Phi)$ とは，以下のデータからなる：

- $\forall \alpha_\mu \in \Delta$ に対して頂点

$$\Gamma(\alpha_\mu) \coloneqq \underset{\mu}{\bullet}$$

を持つ．i.e. $\Gamma(\Phi)$ は l 個の頂点を持つ．

- $\forall \alpha_\mu,\, \alpha_\nu \in \Delta$ に対して辺集合

$$\Gamma(\alpha_\mu,\, \alpha_\nu) \coloneqq \begin{cases} \emptyset, & \mu = \nu \ \text{または}\ \llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket \llbracket \alpha_\nu, \alpha_\mu \rrbracket = 0 \\ \{\underset{\mu}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{\nu}{\bullet}\}, & \mu \neq \nu \ \text{かつ}\ \llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket \llbracket \alpha_\nu, \alpha_\mu \rrbracket = 1 \\ \{\underset{\mu}{\bullet}\!\!\Rightarrow\!\!\underset{\nu}{\bullet}\}, & \mu \neq \nu \ \text{かつ}\ \llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket \llbracket \alpha_\nu, \alpha_\mu \rrbracket = 2 \ \text{かつ}\ \|\alpha_\nu\| < \|\alpha_\mu\| \\ \{\underset{\mu}{\bullet}\!\!\Rrightarrow\!\!\underset{\nu}{\bullet}\}, & \mu \neq \nu \ \text{かつ}\ \llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket \llbracket \alpha_\nu, \alpha_\mu \rrbracket = 3 \ \text{かつ}\ \|\alpha_\nu\| < \|\alpha_\mu\| \end{cases}$$

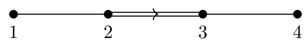
を持つ．i.e. $\Gamma(\Phi)$ の辺集合に自己ループはなく，かつ $\underset{\mu}{\bullet}$ と $\underset{\nu}{\bullet}$ の間には $\llbracket \alpha_\mu, \alpha_\nu \rrbracket \llbracket \alpha_\nu, \alpha_\mu \rrbracket$ 重

辺が存在する．特に $n \geq 2$ 重辺の場合，$\|\alpha_\nu\| < \|\alpha_\mu\|$（resp. $\|\alpha_\nu\| > \|\alpha_\mu\|$）ならば辺の上に右（resp. 左）向きの矢印が描かれる．

[a] [EGH+11, p.8] では “In fact, if we needed to make contact with an alien civilization and show them how sophisticated our civilization is, perhaps showing them Dynkin diagrams would be the best choice!” とまで言っている．実際，Dynkin 図形はルート系の分類以外にも様々な分類問題の文脈で登場する．例えば `https://ncatlab.org/nlab/show/ADE+classification` など．詳細は後の章で述べよう．

Dynkin 図形から矢印（i.e. 単純ルートの長さに関する情報）を取り除いたものを **Coxeter グラフ** (Coxeter graph) と呼ぶ．

与えられた Dynkin 図形から Cartain 行列を一意に復元できる．例えば



（これは F_4 と呼ばれるルート系を表す）に対応する Cartan 行列は

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.3.3　ルート系の既約成分

命題 3.2.1 より，Φ が既約であることと Δ が互いに直交する 2 つの真部分集合の disjoint union に分解しないことは同値である．このことから，

$$\Phi \text{ が既約} \iff \textbf{対応する Dynkin 図形が連結}$$

である．

命題 3.3.2:

任意のルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ は既約なルート系 $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ の disjoint union に分解し，$\mathbb{E}_i \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Phi_i$ とおくと直交直和の意味で

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_t$$

が成り立つ．

証明 Φ の底 Δ に対応する Coxeter グラフが連結成分を t 個持つとする．このとき Coxeter グラフの各連結成分に対応して $\Delta = \Delta_1 \amalg \cdots \amalg \Delta_t$ と分解すると Coxeter グラフの定義から $i \neq j \implies (\Delta_i, \Delta_j) = 0$ である．よって $\mathbb{E}_i \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Delta_i$ とおくと直交直和の意味で $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_t$ が成り立つ．さらにルート系の公理を充たす $\Phi_i \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \Delta_i$ は明らかに $\mathbb{E}_i$ のルート系になる．Φ_i の Weyl 群 $\mathscr{W}_{\mathbb{E}_i}(\Phi_i)$ は $\{\, \sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha \in \Delta_i \,\}$ によって生成される $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ の部分群の定義域を $\mathbb{E}_i$ に制限したものに等しい．さらに，$\alpha \notin \Delta_i \implies (\alpha, \Delta_i) = 0 \iff \Delta_i \subset P_\alpha \implies \sigma_\alpha|_{\mathbb{E}_i} = \mathrm{id}_{\mathbb{E}_i}$ なので $\mathbb{E}_i$ たちは $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$-不

変である．よって $\forall\alpha \in \Phi$ に対して $\sigma_\alpha(\mathbb{E}_i) = \mathbb{E}_i$ なので，$\alpha \in \mathbb{E}_i$ または $\mathbb{E}_i \subset P_\alpha$ である．よってある $1 \leq \exists i \leq t$ が存在して $\alpha \in \Phi_i$ となる[*21]．i.e. $\Phi = \Phi_1 \amalg \cdots \amalg \Phi_t$ である． ■

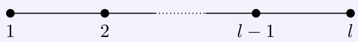
従って，既約なルート系 $\iff$ 連結な Dynkin 図形を分類すれば十分である．

3.3.4 ルート系の分類定理

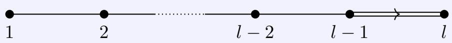
定理 3.3.1: 既約なルート系の分類定理

ランク l の既約なルート系 Φ を与える．このとき Φ の Dynkin 図形は以下のいずれかである：

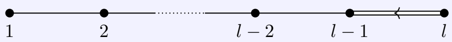
$\boldsymbol{A_l}$ $(l \geq 1)$ **型:**



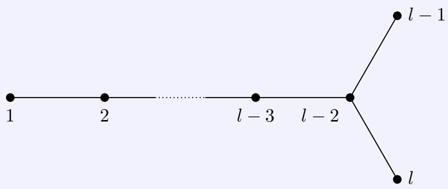
$\boldsymbol{B_l}$ $(l \geq 2)$ **型:**



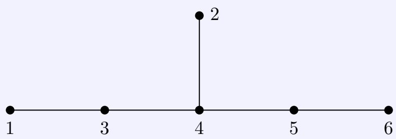
$\boldsymbol{C_l}$ $(l \geq 3)$ **型:**



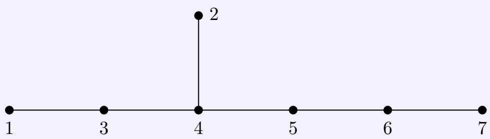
$\boldsymbol{D_l}$ $(l \geq 4)$ **型:**



$\boldsymbol{E_6}$ **型:**

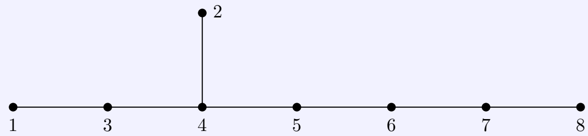


$\boldsymbol{E_7}$ **型:**

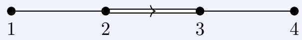


[*21] $1 \leq \forall i \leq t$ に対して $\mathbb{E}_i \subset P_\alpha \iff (\alpha, \mathbb{E}_i) = 0$ だとすると $\alpha \in (\mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_t)^\perp = 0$ となって $\alpha \in \Phi$ に矛盾．

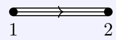
***E_8* 型:**



***F_4* 型:**



***G_2* 型:**



証明 まずは可能な Coxeter グラフを分類する．

- 任意次元の Euclid 空間 $\big(\mathbb{E}, (\ ,\ )\big)$
- 互いに線型独立な単位ベクトルの集合 $\mathfrak{U} := \{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{E}$ であって，$1 \le \forall i \neq j \le n$ に対して

$$(e_i, e_j) \le 0 \ \text{ かつ } \ 4(e_i, e_j)^2 \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

  を充たすもの（この条件を充たす $\mathbb{E}$ の部分集合は**許容できる** (admissible) と言うことにする）

を与える．任意の許容できる $\mathfrak{U} \subset \mathbb{E}$ にグラフ $\Gamma(\mathfrak{U})$ を割り当てる操作を次のように定義する：

- $\forall e_i \in \mathfrak{U}$ に対して頂点

$$\Gamma(e_i) = \bullet_i$$

  を対応付ける
- $\forall e_i,\ e_j \in \mathfrak{U}$ に対して辺集合

$$\Gamma(e_i,\ e_j) = \begin{cases} \emptyset, & i = j \ \text{ または } \ 4(e_i, e_j)^2 = 0 \\ \{\underset{i}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{j}{\bullet}\}, & i \neq j \ \text{ かつ } \ 4(e_i, e_j)^2 = 1 \\ \{\underset{i}{\bullet}\!\!=\!\!=\!\!=\!\!\underset{j}{\bullet}\}, & i \neq j \ \text{ かつ } \ 4(e_i, e_j)^2 = 2 \\ \{\underset{i}{\bullet}\!\!\equiv\!\!\equiv\!\!\equiv\!\!\underset{j}{\bullet}\}, & i \neq j \ \text{ かつ } \ 4(e_i, e_j)^2 = 3 \end{cases}$$

  を対応付ける[*22]．

i.e. $\Gamma(\mathfrak{U})$ の頂点集合は n 点集合 $\{\bullet_1, \ldots, \bullet_n\}$ であり，$\Gamma(\mathfrak{U})$ の辺集合に自己ループはなく，かつ $\bullet_i$ と $\bullet_j$ の間には $4(e_i, e_j)^2$ 重辺が存在する．

[*22] $\left|\{\underset{i}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{j}{\bullet}\}\right| = 1,\ \left|\{\underset{i}{\bullet}\!\!=\!\!=\!\!=\!\!\underset{j}{\bullet}\}\right| = 2,\ \left|\{\underset{i}{\bullet}\!\!\equiv\!\!\equiv\!\!\equiv\!\!\underset{j}{\bullet}\}\right| = 3$ と言うことである．

補題 3.3.1: step 1

$\forall e_i \in \mathfrak{U}$ に対して，$\mathfrak{U} \setminus \{e_i\}$ もまた許容できる．

証明 許容できることの定義から明らか． ■

補題 3.3.2: step 2

$$\left|\left\{\, (e_i,\, e_j) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \,\middle|\, i < j,\ \Gamma(e_i,\, e_j) \neq \emptyset \,\right\}\right| < n$$

証明 $e := \sum_{i=1}^{n} e_i$ とおく．e_i の線型独立性から $e \neq 0$ が言える．よって

$$0 < (e, e) = n + \sum_{i<j} 2(e_i, e_j) \tag{3.3.1}$$

が成り立つ．さて，$(e_i, e_j) \neq 0 \iff \Gamma(e_i,\, e_j) \neq \emptyset$ を充たす任意の $1 \leq i < j \leq n$ をとる．すると，$\mathfrak{U}$ が許容できるので $2(e_i, e_j) \leq -1$ が成り立つ．よって不等式 (3.3.1) からこのような $(i,\, j)$ の総数は $n - 1$ 以下でなくてはいけない． ■

補題 3.3.3: step 3

$\Gamma(\mathfrak{U})$ はサイクルを含まない．

証明 補題 3.3.1 より $\mathfrak{U}$ の任意の空でない部分集合 $\mathfrak{C}$ もまた許容できるので，グラフ $\Gamma(\mathfrak{C})$ が定まる．今 $\{f_1, \cdots, f_k\} := \mathfrak{C}$ とおき，$\Gamma(\mathfrak{C})$ がサイクルになっている，i.e.

$$\Gamma(f_i,\, f_j) \begin{cases} \neq \emptyset, & |i - j| = 1 \ \text{ または } \ \{i,\, j\} = \{1,\, k\} \\ = \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるとしよう．然るにこのとき

$$\left|\left\{\, (f_i,\, f_j) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \,\middle|\, i < j,\ \Gamma(f_i,\, f_j) \neq \emptyset \,\right\}\right| = k$$

となり **step 2** に矛盾． ■

補題 3.3.4: step 4

$\forall e_i \in \mathfrak{U}$ に対して

$$\left| \bigcup_{e_j \in \mathfrak{U} \setminus \{e_i\}} \Gamma(e_i,\, e_j) \right| \leq 3$$

証明 $\forall e \in \mathfrak{U}$ をとり，$\Gamma(e,\, e_j) \neq \emptyset$ を充たす $e_j \in \mathfrak{U}$ 全体の集合を $\{f_1,\, \dots,\, f_k\} \subset \mathfrak{U}$ と書く．このとき $1 \leq \forall j \leq k$ に対して $(e, f_j) < 0$ が成り立つ．さらに補題 3.3.3 より $\Gamma(f_i)$ たちは非連結なので $1 \leq \forall i \neq j \leq k$ に対して $(f_i, f_j) = 0$ が成り立つ．i.e. f_i たちは正規直交する．

$\mathfrak{U}$ は線型独立なので，$\exists f_0 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e,\, f_1,\, \dots,\, f_k\} \cap \left(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{f_1,\, \dots,\, f_k\}\right)^{\perp} \setminus \{0\}$ である．f_0 を適当に規格化して単位ベクトルにすることができる．すると $f_0,\, \dots,\, f_k$ の正規直交性から $e = \sum_{i=0}^{k} (e, f_i) f_i$ が成り立つので，

$$1 = (e, e) = \sum_{i=0}^{k} (e, f_i)^2 = (e, f_0)^2 + \sum_{i=1}^{k} (e, f_i)^2$$

が従い，f_0 の定義から $(e, f_0) \neq 0$ なので[*23]

$$\sum_{i=1}^{k} 4(e, f_i)^2 < 4$$

でなくてはいけない．$4(e, f_i)^2 = |\Gamma(e,\, f_i)|$ なので左辺は $\left|\bigcup_{e_j \in \mathfrak{U} \setminus \{e\}} \Gamma(e,\, e_j)\right|$ に等しい． ■

補題 3.3.5: step 5

3 重辺を含む $\Gamma(\mathfrak{U})$ としてあり得るのは

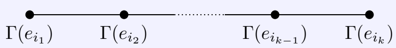
のみである．

証明 step 4 より明らか． ■

補題 3.3.6: step 6

部分集合 $\{e_{i_1},\, \dots,\, e_{i_k}\} \subset \mathfrak{U}$ に対して

$$\Gamma(\{e_{i_1},\, \dots,\, e_{i_k}\}) =$$



が成り立つならば，集合

$$\mathfrak{U}' := \left(\mathfrak{U} \setminus \{e_{i_1},\, \dots,\, e_{i_k}\}\right) \cup \left\{\sum_{\mu=1}^{k} e_{i_\mu}\right\}$$

もまた許容できる．

証明 仮定より $1 \leq \forall \mu < \nu \leq k$ に対して

$$2(e_{i_\mu}, e_{i_\nu}) = \begin{cases} -1, & \nu = \mu + 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つので，$e := \sum_{\mu=1}^{k} e_{i_\mu}$ とおくと

$$(e, e) = k + \sum_{\mu < \nu} 2(e_{i_\mu}, e_{i_\nu}) = k - (k-1) = 1$$

[*23] $(e, f_0) = 0$ だとすると $f_0 \in \mathrm{Span}\{e,\, f_1,\, \dots,\, f_k\} \cap (\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e\})^{\perp} \cap (\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{f_1,\, \dots,\, f_k\})^{\perp} = \mathrm{Span}\{e,\, f_1,\, \dots,\, f_k\} \cap (\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e,\, f_1,\, \dots,\, f_k\})^{\perp} = 0$，i.e. $f_0 = 0$ となり矛盾．

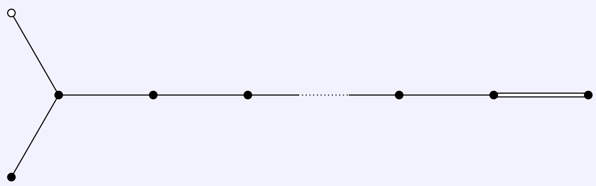
だとわかる. i.e. $e\in\mathfrak{U}'$ は単位ベクトルである. **step 3** より, $\forall f\in\mathfrak{U}'\backslash\{e\}$ に対して $\Gamma(f)$ は $\Gamma(e_{i_1}),\ \dots,\ \Gamma(e_{i_k})$ の高々 1 つのみと連結になり得るので，$(e,f)=0$ であるか，$1\le\exists!\mu\le k,\ (e,f)=(e_{i_\mu},f)\neq 0$ であるかのどちらかである．いずれの場合も $4(e,f)^2\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ なので $\mathfrak{U}'$ は許容できる． ■

補題 3.3.7: step 7

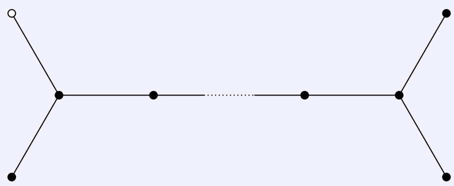
$\Gamma(\mathfrak{U})$ は以下の形をした部分グラフを含まない：

(1)

(2)



(3)



証明 $\Gamma(\mathfrak{U})$ が (1), (2), (3) の形をした部分グラフを含むとする．このとき **step 1**, **step 6** より 4 つの辺に繋がった頂点を持つグラフが許容されることになって **step 4** に矛盾． ■

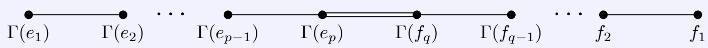
補題 3.3.8: step 8

連結なグラフ $\Gamma(\mathfrak{U})$ としてあり得るのは以下の 4 つの形のみである：

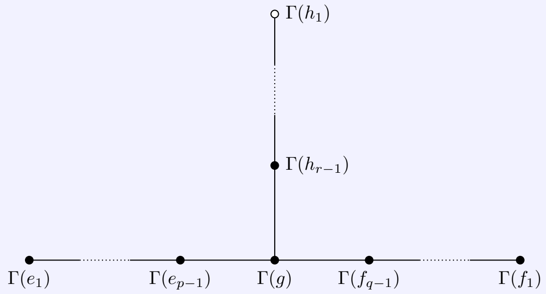
$\boldsymbol{A_n}$

$\boldsymbol{G_2}$

(1)

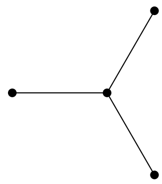


(2)



<u>**証明**</u> **step 5** より，3 重辺を含む $\Gamma(\mathfrak{U})$ の形としてあり得るのは $\boldsymbol{G_2}$ のみである．

$\Gamma(\mathfrak{U})$ が 2 重辺を 2 つ以上含む場合，**step 1** により **step 7**-(1) の形に帰着されてしまうので矛盾．よって $\Gamma(\mathfrak{U})$ は 2 重辺を高々 1 つしか含まない．$\Gamma(\mathfrak{U})$ が 2 重辺を 1 つ持つ場合，**step 1** により **step 7**-(2) の形に帰着されてしまうので


(3.3.2)

の形の部分グラフを持たない．よって (1) の形のみがあり得る．

$\Gamma(\mathfrak{U})$ が 1 重辺しか持たないとする．**step 3** によりサイクルを持たないので，(3.3.2) の形をした部分グラフを含まないならばあり得る形は $\boldsymbol{A_n}$ のみである．**step 1** により **step 7**-(3) の形に帰着されてしまうので (3.3.2) の形をした部分グラフを 2 つ以上持つことはできない．よって (2) のみがあり得る． ■

補題 3.3.9: step 9

step 8-(1) の形としてあり得るのは

$\boldsymbol{F_4}$

$\boldsymbol{B_n}, \boldsymbol{C_n}$

のみである．

<u>**証明**</u> $e := \sum_{i=1}^{p} ie_i,\ f := \sum_{j=1}^{q} jf_j$ とおく．頂点へのラベルの付け方から $1 \leq \forall i \leq p-1,\ 2(e_i, e_{i+1}) = -1$

かつ $1 \leq \forall j \leq q-1, 2(f_j, f_{j+1}) = -1$ で，他の場合は $(e_k, e_l) = (f_k, f_l) = 0$ になる．よって

$$(e, e) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2},$$
$$(f, f) = \sum_{j=1}^{q} j^2 - \sum_{j=1}^{q-1} j(j+1) = \frac{q(q+1)}{2}$$

が成り立つ．$4(e_p, f_q)^2 = 2$ かつ $1 \leq \forall i \leq p-1,\ 1 \leq \forall j \leq q-1,\ (e_i, f_j) = 0$ であるから

$$(e, f)^2 = p^2 q^2 (e_p, f_q)^2 = \frac{p^2 q^2}{2}$$

も成り立つ．従って，$e,\ f$ は明らかに線型独立なので Cauchy-Schwartz の不等式から

$$(e, f)^2 < (e, e)(f, f) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{p^2 q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4} \quad \Longrightarrow \quad (p-1)(q-1) < 2$$

でなくてはいけない．よってあり得るのは

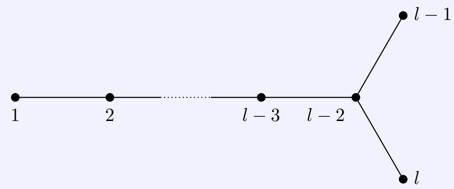
- $(p,\ q) = (2,\ 2)$（F_4 型）
- $(p,\ q) = (1,\ q),\ (p,\ 1)$（$B_n,\ C_n$ 型）

のみである． ■

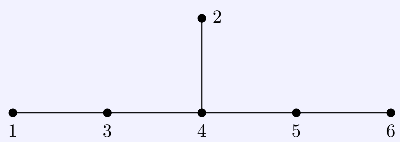
補題 3.3.10: step 10

step 8-(2) の形としてあり得るのは

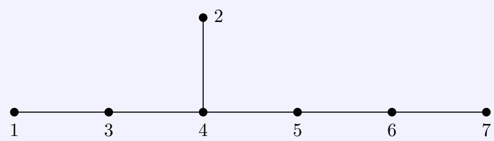
$\boldsymbol{D_n}$



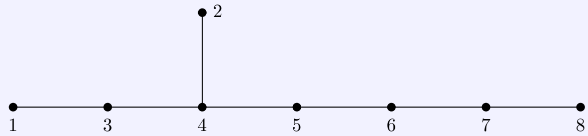
$\boldsymbol{E_6}$



$\boldsymbol{E_7}$



***E*$_8$**



のみである．

<u>**証明**</u> $e \coloneqq \sum_{i=1}^{p-1} ie_i,\ f \coloneqq \sum_{j=1}^{q-1} jf_j,\ h \coloneqq \sum_{k=1}^{r-1} kh_k$ とおく．$e,\ f,\ h$ は互いに直交し，$\mathfrak{U}$ の元の線型独立性から $g \notin \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e,\ f,\ h\}$ である．このとき $\exists g_0 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{g,\ e,\ f,\ h\} \cap \left(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e,\ f,\ h\}\right)^{\perp} \setminus \{0\}$ である．$g_0,\ e,\ f,\ h$ の直交性から

$$g = \frac{(g, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0 + \frac{(g, e)}{(e, e)} e + \frac{(g, f)}{(f, f)} f + \frac{(g, h)}{(h, h)} h$$

が成り立つので

$$1 = \frac{(g_0, g)^2}{(g_0, g_0)(g, g)} + \frac{(e, g)^2}{(e, e)(g, g)} + \frac{(f, g)^2}{(f, f)(g, g)} + \frac{(h, g)^2}{(h, h)(g, g)}$$

であり，g_0 の定義から $(g, g_0) \neq 0$ なので，$\cos\theta_1 \coloneqq \frac{(e,g)}{\|e\|\|g\|},\ \cos\theta_2 \coloneqq \frac{(f,g)}{\|f\|\|g\|},\ \cos\theta_3 \coloneqq \frac{(h,g)}{\|h\|\|g\|}$ について

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 < 1 \tag{3.3.3}$$

が成り立つ．また，**step 9** の証明と全く同じ計算をすることで

$$(e, e) = \frac{p(p-1)}{2}, \qquad (f, f) = \frac{q(q-1)}{2}, \qquad (h, h) = \frac{r(r-1)}{2}$$

が言えるので

$$\cos^2\theta_1 = \frac{(e, g)^2}{(e, e)(g, g)} = (p-1)^2 \frac{(e_{p-1}, g)^2}{(e, e)} = (p-1)^2 \frac{1/4}{p(p-1)/2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

が成り立つ[*24]．同様の計算により

$$\cos^2\theta_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right), \qquad \cos^2\theta_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

が従い，不等式 (3.3.3) は

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \tag{3.3.4}$$

に帰着する．頂点のラベルを適当に入れ替えることで $1/p \leq 1/q \leq 1/r \leq 1/2$ が成り立つようにできる．すると，不等式 (3.3.4) から $1 < 3/r \leq 3/2$ であり，$r = 2$ が確定する．このとき不等式 (3.3.4) から $1/2 < 1/p + 1/q \leq 2/q \leq 1$ なので $2 \leq q < 4$ だとわかる．$q = 2$ ならば不等式 (3.3.4) は $0 < 1/p$ となるので p は任意の自然数値を取り得る．$q = 3$ ならば不等式 (3.3.4) より $1/6 < 1/p \iff p < 6$ でなくてはならない．纏めると，

*24 $|\Gamma(e_{p-1},\ g)| = 1$ なので $(e_{p-1}, g)^2 = 1/4$ である．

- $(p,\,q,\,r) = (p,\,2,\,2)$（$D_n$ 型）
- $(p,\,q,\,r) = (3,\,3,\,2)$（$E_6$-型）
- $(p,\,q,\,r) = (4,\,3,\,2)$（$E_7$-型）
- $(p,\,q,\,r) = (5,\,3,\,2)$（$E_8$-型）

のみがあり得る． ■

これで Coxeter グラフの分類が完了した．$B_l,\,C_l$ 型以外の Dynkin 図形は，対応する Coxeter グラフから頂点へのラベルの付け方の不定性を除いて一意に定まるので証明が完了した． ■

3.4　ルート系の構成と自己同型

分類定理の締めとして，$A-G$ の各ルート系が存在することを示す．A_l, D_l に対して別の方法もあるが，ここでは各ルート系を直接構成することにする．これにより，Weyl 群の構造も具体的に明示される．
Weyl 群の生成系は，底 Δ に関する鏡映を含めば何でもいいことに注意（その方が見やすい場合もある）．

3.4.1　ルート系の構成

n 次元 Euclid 空間 $\big(\mathbb{E},\,(\ ,\ )\big)$ の正規直交基底を $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ と表す．また，何らかの有限個の基底により生成される $\mathbb{Z}$-加群のことを格子 (lattice) と呼ぶ．特に，正規直交基底により生成されるものを Λ と書く．

補題 3.4.1:

既約ルート系は，（0 でない）高々 2 通りの長さを持つ格子の部分集合として定義できる．i.e. 定理 3.3.1 に示された $A-G$ の各ルート系は存在する．

証明　まず，格子や長さの選び方によらず Φ がルート系の公理の 1-3 を満たすことを示す．

(Root-1)　格子は離散的かつ，高々有限の長さを持つベクトルの集合はコンパクトだから，Φ は有限集合．かつ定義より 0 を含まないので，**(Root-1)** を満たす．

(Root-2)　等しい長さの格子ベクトルをすべて含むことから明らか．

(Root-3)　**(Root-4)** を満たせば $\sigma_\alpha(\beta)\in\Phi$ 鏡映で Λ に写る．σ_α は等長写像なので，**(Root-3)** を満たす．

よってあとは, **(Root-4)** は各ルート系ごとに示せばよい．実は長さの選び方は，C_l, G_2 型を除いて $1, 2$ のみにでき，$[\![\beta,\alpha]\!] = \frac{2}{(\alpha,\alpha)}(\beta,\alpha)\in\mathbb{Z}$ より明らかに **(Root-4)** を満たす．
以下，ルート系 Φ を明示したときの複合 $\pm$ は全て任意とする．また，先頭の複合が底を選んだ際のルートの正負に対応する．

$A_l\ (l\geq 1)$ **型**

$$\mathbb{E} = \big\{\,\alpha\in\mathbb{R}^{l+1}\;\big|\;(\alpha,\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{l+1}) = 0\big\},\quad \Phi = \big\{\,\alpha\in\Lambda\cap\mathbb{E}\;\big|\;(\alpha,\alpha)=2\big\} = \big\{\,\varepsilon_i-\varepsilon_j\;\big|\;i\neq j\big\}$$

とすると，$(\mathbb{E},\Phi)$ はルート系となる．

$$\Delta = \big\{\,\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\;\big|\;i=1,\dots,l\big\}$$

は，線型独立性と

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + \cdots + (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j), \quad (i < j) \tag{3.4.1}$$

より底となる．Cartan 行列は

$$[\![\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}]\!] = 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j\pm 1} \tag{3.4.2}$$

より，A_l 型となっている．鏡映 σ_α は添字 (i,j) を入れ替えるので，Weyl 群は対称群 $\mathfrak{S}_{l+1}$ と同型.

B_l $(l \geq 2)$ 型

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^l, \quad \Phi = \left\{ \alpha \in \Lambda \,\middle|\, (\alpha, \alpha) = 1, 2 \right\} = \left\{ \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), \,\middle|\, i \neq j \right\} \cup \left\{ \pm\varepsilon_i, \,\middle|\, i \in 1, \ldots, l \right\}$$

とするとルート系となる.

$$\Delta = \left\{ \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \,\middle|\, i = 1, \ldots, l-1 \right\} \cup \{\varepsilon_l\}$$

は，線型独立性，(3.4.1) と，

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + \cdots + (\varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l) + \varepsilon_l \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j &= (\varepsilon_i - \varepsilon_j) + 2\varepsilon_j \end{aligned}$$

より，底となる．Cartan 行列は，(3.4.2) と

$$[\![\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_l]\!] = 2[\![\varepsilon_l, \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}]\!] = -2\delta_{i+1,l} \tag{3.4.3}$$

より，B_l 型となっている．鏡映 σ_{ε_i} は ε_i の符号の入れ替えだから，A_l 型の Weyl 群の結果と合わせると，B_l 型の Weyl 群 $\mathscr{W}$ は $\mathbb{Z}_2^l \rtimes \mathfrak{S}_l$

C_l $(l \geq 3)$ 型　B_l 型の双対で証明完了なので，詳細は省略．具体的なルート系だけ示しておく.

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^l, \quad \Phi = \left\{ \alpha \in I \,\middle|\, (\alpha, \alpha) = 2, 4 \right\}$$

D_l $(l \geq 4)$ 型

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^l, \quad \Phi = \left\{ \alpha \in I \,\middle|\, (\alpha, \alpha) = 2 \right\} = \left\{ \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), \,\middle|\, i \neq j \right\}$$

とするとルート系となる.

$$\Delta = \left\{ \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \,\middle|\, i = 1, \ldots, l-1 \right\} \cup \{\varepsilon_l + \varepsilon_{l+1}\}$$

は，線型独立性，(3.4.1) と，

$$\begin{aligned} \varepsilon_i + \varepsilon_j &= (\varepsilon_i - \varepsilon_j) + 2(\varepsilon_j - \varepsilon_{l-1}) + (\varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l) + (\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) \quad (j \leq l-1) \\ \varepsilon_i + \varepsilon_l &= (\varepsilon_i - \varepsilon_{l-1}) + (\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) \end{aligned}$$

より，底となる．Cartan 行列は，(3.4.2) と

$$[\![\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_l + \varepsilon_{l+1}]\!] = -\delta_{i+1,l}$$

より，D_l 型となっている．$\sigma_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}\sigma_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ は 2 成分同時の符号の入れ替えで，この合成のみを含む部分群は，$i, i+1$ $(l = 1, \ldots, l-1)$ の符号の入れ替えで生成できる，互いに可換だから $\mathbb{Z}_2^{l-1}$．全体の Weyl 群は $\mathscr{W} = \mathbb{Z}_2^{l-1} \rtimes \mathfrak{S}_l$

E_l $(l=6,7,8)$ 型　Λ' を Λ の内，成分和が偶数のものとすると，Λ の部分 $\mathbb{Z}$-加群である．

$$\mathbb{E}=\mathbb{R}^8, \qquad \Phi=\Phi_8 \coloneqq \left\{ \alpha\in\Lambda'+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i\mathbb{Z} \;\middle|\; (\alpha,\alpha)=2 \right\}$$
$$= \left\{\, \pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j), \;\middle|\; i\neq j \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{c_i}\varepsilon_i \;\middle|\; c_i=0,1,\ \sum_{i=1}^{8}c_i\in 2\mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}=\left\{\, \alpha\in\mathbb{R}^8 \;\middle|\; (\alpha,\varepsilon_7+\varepsilon_8)=0 \right\}, && \Phi=\mathbb{E}\cap\Phi_8 \\ &\mathbb{E}=\left\{\, \alpha\in\mathbb{R}^8 \;\middle|\; (\alpha,\varepsilon_7+\varepsilon_8)=(\alpha,\varepsilon_6+\varepsilon_7)=0 \right\}, && \Phi=\mathbb{E}\cap\Phi_8 \end{aligned}$$

とすると，いずれもルート系となる．

$$\Delta=\left\{ \alpha_1\coloneqq\frac{1}{2}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_8-\sum_{i=2}^{7}\varepsilon_i\right),\ \varepsilon_1+\varepsilon_2 \right\} \cup \left\{\, \varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i \;\middle|\; i=1,\dots,l-2 \right\}$$

は，線型独立性と，(3.4.1) などより底となる．Cartan 行列を計算すると，E_l 型となっている．Weyl 群 $\mathscr{W}$ は有限の時間の計算で求めることができる．

F_4 型

$$\mathbb{E}=\mathbb{R}^4, \quad \Phi=\left\{ \alpha\in I+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{2}\mathbb{Z} \;\middle|\; (\alpha,\alpha)=1,2 \right\}$$
$$=\left\{\, \pm\varepsilon_i \right\} \cup \left\{\, \pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j), \;\middle|\; i\neq j \right\} \cup \left\{ \pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4) \right\}$$

とすると，$(\mathbb{E},\Phi)$ はルート系となる．

$$\Delta=\left\{ \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_3-\varepsilon_4, \varepsilon_4, \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4) \right\}$$

は，線型独立性と，(3.4.1) などより底となる．Cartan 行列は，(3.4.2), (3.4.3) と

$$\begin{aligned} &\left[\!\!\left[\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4) \right]\!\!\right]=0 \quad (i=2,3) \\ &\left[\!\!\left[\varepsilon_4, \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4) \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4), \varepsilon_4 \right]\!\!\right]=-1 \end{aligned}$$

より，F_4 型となっている．Weyl 群 $\mathscr{W}$ は，実は D_4 型の Weyl 群が正規部分群になっている．残りは Δ の後ろ二つの単純ルートで生成できるので，A_2 型の Weyl 群と同型．よって，構造の一例は $(\mathbb{Z}_2^3\rtimes\mathfrak{S}_4)\rtimes\mathfrak{S}_3\simeq\mathbb{Z}_2^5\rtimes(\mathfrak{S}_3\times\mathfrak{S}_3)$ であり，D_4 型の $\operatorname{Aut}\Phi$ とも同型である．

G_2 型　2 次元なので，簡単に絵は書けるが，一応今までと同じ方法で示す．

$$\begin{aligned} \mathbb{E}&=\left\{\, \alpha\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\alpha,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=0 \right\} \\ \Phi&=\left\{\, \alpha\in I\cap\mathbb{E} \;\middle|\; (\alpha,\alpha)=2,6 \right\} \\ &=\pm\{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_3, 2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3, 2\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_1, -2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2\} \end{aligned}$$

とすると，ルート系となる．実際，

$$\Delta=\left\{ \alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \alpha_2=2\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_1 \right\}$$

表 3.2: 既約ルート系の構造

型	正ルート数	Weyl 群の構造	Weyl 群の位数	Γ	Cartan 行列式
A_l	$\frac{(l+1)l}{2}$	$\mathfrak{S}_{l+1}$	$(l+1)!$	$\mathbb{Z}_2 \quad (l \geq 2)$	$l+1$
B_l, C_l	l^2	$\mathbb{Z}_2^l \rtimes \mathfrak{S}_l$	$2^l l!$	1	2
D_l	$l^2 - l$	$\mathbb{Z}_2^{l-1} \rtimes \mathfrak{S}_l$	$2^{l-1} l!$	$\begin{cases} \mathfrak{S}_3 & (l=4) \\ \mathbb{Z}_2 & (l>4) \end{cases}$	4
E_6	36		$72 \times 6!$	$\mathbb{Z}_2$	3
E_7	63		$72 \times 8!$	1	2
E_8	120		$192 \times 10!$	1	1
F_4	24	$(\mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathfrak{S}_4) \rtimes \mathfrak{S}_3$	1152	1	1
G_2	6	D_6	12	1	1

は，線型独立性と，

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 - \varepsilon_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 &= 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ -2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{aligned}$$

より，底となる．Cartan 行列は，

$$[\![\alpha_1, \alpha_2]\!] = -1, \quad [\![\alpha_2, \alpha_1]\!] = -3$$

より，G_2 型となっている．Weyl 群 $\mathscr{W}$ は二面体群 $\mathrm{D}_6 = \mathbb{Z}_6 \rtimes \mathbb{Z}_2$．

■

3.4.2 ルート系の同型

定理 3.4.1: ルート系の自己同型の全体像

ルート系 Φ の底 Δ を固定する．この底を保つ同型写像

$$\Gamma = \left\{ \sigma = \mathrm{Aut}\,\Phi \;\middle|\; \sigma(\Delta) = \Delta \right\}$$

に対し，

$$\mathrm{Aut}\,\Phi = \mathscr{W} \rtimes \Gamma \tag{3.4.4}$$

となる．.

証明 Weyl 群の作用の自由性（定理 3.2.5）より，$\Gamma \cap \mathscr{W} = \{1\}$ である．また，$\forall \tau \in \mathrm{Aut}\,\Phi$ について，$\tau(\Delta)$ も底である．Weyl 群の作用が推移的（定理 3.2.5）なので，

$$\forall \tau \in \mathrm{Aut}\,\Phi,\ \exists \sigma \in \mathscr{W}, \quad \sigma\tau(\Delta) = \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \tau \in \mathscr{W}\Gamma$$

である．補題 3.1.4 より，$\mathscr{W}$ は正規部分群であったから，(3.4.4) が成り立つ． ■

ルート系の同型写像は $[\![,]\!]$ を保つ．よって，Γ は **Dynkin 図形の自己同型** (diagram automorphism) 群である．この結果は，表 3.2 にまとまっている．特に，D_4 のそれは Triality（双対 (duality) の類推）と呼ばれる．

3.5 ウエイトの抽象論

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の Weyl 群を $\mathscr{W}$ とする．

3.5.1 ウエイト

定義 3.5.1: 整ウエイト，ルート格子 (root lattice)

ルート系 Φ により定まる

$$\Lambda_{\mathrm{w}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{E} \,\middle|\, [\![\lambda, \Phi]\!] \subset \mathbb{Z} \right\}$$

は，$[\![,]\!]$ の第一引数線型性より $\mathbb{Z}$-加群である．これを**ウエイト格子** (weight lattice) と呼び，その元を**整ウエイト** (integral weight) と呼ぶ．また，Φ で生成される $\mathbb{Z}$-加群

$$\Lambda_{\mathrm{r}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \Phi$$

を**ルート格子** (root lattice) と呼ぶ．

定義より明らかに，

$$\Phi \subset \Lambda_{\mathrm{w}} \subset \mathbb{E}$$

である．また底 Δ を固定すると，exercise10.1（演習回でやった双対ルートの話）より

$$[\![\lambda, \Phi]\!] = [\![\Phi^{\vee}, \lambda^{\vee}]\!] \in \mathbb{Z}$$

なので，$[\![,]\!]$ の第一引数線型性の線型性から，$\Delta^{\vee}$ だけ，双対を戻すと Δ だけを調べれば良い:

$$[\![\lambda, \Phi]\!] \subset \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad [\![\lambda, \Delta]\!] \subset \mathbb{Z}$$

定義 3.5.2: 優ウエイト，強い優ウエイト

ルート系 Φ の底 Δ を選ぶ．整ウエイト $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{w}}$ が**優** (dominant) であるとは，

$$[\![\lambda, \Delta]\!] \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

を満たすことをいう．その集合を Λ_{w}^{+} と書く．また，整ウエイト $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{w}}$ が**強い優** (strongly dominant) であるとは，

$$[\![\lambda, \Delta]\!] \subset \mathbb{Z}_{>0}$$

を満たすことをいう．

Weyl の区画の言葉で言えば，優ウエイトの集合 Λ_{w}^{+} は $\Lambda_{\mathrm{w}} \cap \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$，強い優ウエイトの集合は $\Lambda_{\mathrm{w}} \cap \mathfrak{C}(\Delta)$ となる．

底の双対 $\Delta^\vee$ は，双対ルート系の底となるので，Euclid 空間の基底を張る．これに対する Euclid 空間の双対的な基底をとることを考える．

定義 3.5.3: 基本優ウエイト

優ウエイトのうち，

$$[\![\lambda_i, \alpha_j]\!] = (\lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}, \quad (\forall i, j = 1, \ldots, n)$$

を満たす λ_i のことを（底 Δ に関する）**基本優ウエイト** (fundamental dominant weight) と呼ぶ．その集合を Δ_w と書く．

Δ_w は $\mathbb{E}$ の基底なので，任意のベクトル $v \in \mathbb{E}$ は

$$v = \sum_{i=1}^{l} v_i \lambda_i, \quad \left(v_i = \sum_{i=1}^{l} v_i [\![\lambda_i, \alpha_j]\!] = [\![v, \alpha_j]\!] \right) \tag{3.5.1}$$

と書ける．係数 v_i は，$[\![,]\!]$ の第一引数線型性より従う．

定理 3.5.1: ウエイト格子の基底

Δ_w はウエイト格子の基底である．また，（強い）優ウエイトは非負（正）整数線型結合で書ける．

証明 任意のウエイトを (3.5.1) のように展開した係数は，整ウエイトの定義より整数．優ウエイトの場合は，非負整数．強い優ウエイトの場合は，正整数．■

定義 3.5.4: ルート系の基本群

$$\Lambda_\mathrm{w}/\Lambda_\mathrm{r}$$

で定まる商は，有限な $\mathbb{Z}$-加群をなす．これをルート系 Φ の**基本群** (fundamental group) と呼ぶ．

証明 単純ルートを (3.5.1) のように展開した係数は，Cartan 整数そのもの．よって，ルート格子 Λ_r はウエイト格子 Λ_w の部分加群である．
Cartan 行列は，ウェイト格子 Λ_w の基底からルート格子 Λ_r の基底への変換を表している．この行列式が，基本群の位数となる（$\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p$ のイメージ）．i.e. 有限．■

PID（単項イデアル整域）上の有限生成加群の構造定理より，基本群は $\mathbb{Z}_p$ (p： 素数) の直積で書ける．表 3.2 にある行列式の値から，A_l, D_l 型以外は巡回群や自明な群だとわかる．実際は，D_l 型のうち，l が偶数の場合は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ であり，他は全て単一の巡回群となる（Cartan 逆行列から具体的に示される）．

3.5.2 優ウエイト

Weyl 群 $\mathscr{W}$ は等長写像の群なので，$\mathbb{E}$ 上の内積を保つ．よって，$\mathscr{W}(\Lambda) \simeq \Lambda$ である．

補題 3.5.1:

(1) 各ウエイトは $\sigma \in \mathscr{W}$ で別の優ウエイトと 1 対 1 で移り合う．

(2) $\forall \lambda \in \Lambda_{\mathrm{w}}^{+}, \ \forall \sigma \in \lambda, \quad \sigma\lambda \prec \lambda$

(3) λ が強い優ウエイトのとき，$\sigma\lambda = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = 1$.

__証明__ 定理 3.2.8 と，exercise10.14（$\mathbb{E}$ の任意の点は，$\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ の点から，$\mathscr{W}$ で写る）より直ちに従う． ■

定義 3.2.1 で定義した半順序 $\prec$ について，μ が優だとしても $\mu \prec \lambda$ なる λ が優とは限らないが，ある種の制限を与える．

補題 3.5.2:

$\forall \lambda \in \Lambda^{+}$ に対し，$\mu \prec \lambda$ を満たす整（，優，強い優）ウェイト μ の数は有限．

__証明__ $\lambda + \mu \in \Lambda^{+}$ である．また $\prec$ の定義より，$\lambda - \mu$ は正ルートの線型結合で書けるから，$\lambda - \mu \in \Lambda^{+}$．よって，

$$0 \leq (\lambda + \mu, \lambda - \mu) = (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu)$$

となり，μ はコンパクト集合 $\left\{ v \in \mathbb{E} \mid (v, v) \in (\lambda, \lambda) \right\}$ の元．μ は格子（離散集合）の元でもあるから，$\mu \prec \lambda$ なる整ウエイトは有限個． ■

3.5.3 ウエイト δ

系??で定義した $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\beta \succ 0} \beta$ について考察する．

補題 3.5.3:

$$\delta = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j$$

である．よって，δ は強い優ウエイトである．

__証明__ 系??より，$\sigma_{\alpha_j}\delta = \delta - \alpha_j \ (\alpha_j \in \Delta)$．射影の定義より，$[\![\delta, \alpha_j]\!] = 1$ である．(3.5.1) より，これはウエイト格子の基底 Δ_{w} での展開係数でもある:

$$\delta = \sum_{j=1}^{l} [\![\delta, \alpha_j]\!] \lambda_j = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j$$

■

補題 3.5.4:

$\forall \mu \in \Lambda^+, \forall \sigma \in \mathscr{W}$ に対し，$\nu = \sigma^{-1}\mu$ とすると，以下を満たす:

$$(\nu + \delta, \nu + \delta) \leq (\mu + \delta, \mu + \delta) \tag{3.5.2}$$

ただし，等号成立は $\nu = \mu$ に限る．

証明 σ は等長写像なので，

$$\begin{aligned}(\nu + \delta, \nu + \delta) &= (\sigma(\nu + \delta), \sigma(\nu + \delta)) = (\mu + \sigma\delta, \mu + \sigma\delta) \\ &= (\mu, \mu) + 2(\mu, \delta) + (\delta, \delta) - 2(\mu, \delta) + 2(\mu, \sigma\delta) \quad (\because (\delta, \delta) = (\sigma\delta, \sigma\delta)) \\ &= (\mu + \delta, \mu + \delta) - 2(\mu, \delta - \sigma\delta)\end{aligned}$$

μ は優ウエイトで，$\delta - \sigma\delta$ は正ルートの和で書けるから，$(\mu, \delta - \sigma\delta) \geq 0$ より，(3.5.3) を満たす．等号成立条件は，

$$(\mu, \delta - \sigma\delta) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\mu, \delta) = (\mu, \sigma\delta) = (\nu, \delta) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mu - \nu, \delta) = 0$$

で，$\mu - \nu$ は正ルートの和で書け，δ は strongly 優なので，$\mu = \nu$． ■

3.5.4 ウエイトの飽和集合

定義 3.5.5: 飽和集合，最高ウエイト

ウエイト格子 Λ_{w} の部分集合 Π に対し，

$$\forall \lambda \in \Pi,\ \forall \alpha \in \Phi,\ \forall i = 0, \ldots, [\![\lambda, \alpha]\!], \quad \lambda - i\alpha \in \Pi$$

を満たすとき，Π は**飽和**している (saturated) と呼ぶ．また，$\exists \lambda \in \Lambda_{\mathrm{w}}^+ \cap \Pi$ について，

$$\mu \prec \lambda \quad (\forall \mu \in \Pi)$$

を満たすとき，Π は**最高ウエイト** (highest weight) を持つという．

鏡映の定義より，$\sigma_\alpha \lambda = \lambda - [\![\lambda, \alpha]\!]\alpha$ だったから，$\mathscr{W}(\Pi) \subset \Pi$ となる．

【例 3.5.1】自明な飽和集合

零ベクトルの単元集合 $\{0\}$ は，0 を最高ウエイトとする飽和集合．
また，半単純 Lie 代数のルート系について，$\Phi \cup \{0\}$ は飽和集合．特に，既約なルート系に対しては補題 3.2.9 より，半順序 $\prec$ に関する極大ルートを持っていた．

飽和集合に関するいくつかの補題を示そう．

補題 3.5.5:

最高ウエイトを持つ飽和集合は有限．

証明　補題 3.5.2. ■

補題 3.5.6:

Π を飽和集合とし，λ をその最高ウエイトとすると以下を満たす:

$$\forall \mu \in \Lambda^+,\ \mu \prec \lambda \quad \Longrightarrow \quad \mu \in \Pi$$

証明　$\mu \prec \lambda \in \Pi$ より，

$$\forall i = 1, \ldots, l,\ \exists k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \mu' = \mu + \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i \in \Pi$$

とできる．$\mu' \neq \mu$ のとき，

$$\exists j \in \{1, \ldots, l\}, \quad (\mu' - \mu, \alpha_j),\ k_j > 0$$

である（存在しないとすると，$(\mu' - \mu, \mu' - \mu) > 0$ に矛盾）．よって，$[\![\mu' - \mu, \alpha_j]\!]$ となる．μ は優ウェイトなので，$[\![\mu, \alpha_j]\!] \geq 0$ だから，$[\![\mu', \alpha_j]\!] > 0$．飽和集合の定義より，新たな Π の元 $\mu' - [\![\mu', \alpha_j]\!]\alpha_j$ が得られた．これを有限回繰り返せば，$\mu' = \mu$ となる． ■

補題 3.5.7:

Π を飽和集合，λ をその最高ウエイト，$\mu \in \Pi$ とすると，以下を満たす:

$$(\mu + \delta, \mu + \delta) \leq (\lambda + \delta, \lambda + \delta) \tag{3.5.3}$$

ただし，等号成立は $\mu = \lambda$ に限る．

証明　補題 3.5.1, 3.5.4 より，μ が優ウエイトの場合を調べればよい．λ は最高ウエイトなので，$\mu = \lambda - \pi$ とすると，π は正ルートの和で書ける．すると，

$$\begin{aligned}(\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta) &= (\lambda + \delta, \mu + \delta + \pi) - (\lambda + \delta - \pi, \mu + \delta) \\ &= (\lambda + \delta, \pi) + (\pi, \mu + \delta) \geq 0 \quad (\because \mu, \lambda, \delta \in \Lambda^+)\end{aligned}$$

となる．$\lambda + \delta$ は強い優ウエイトなので，等号成立は $\pi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \mu$. ■

第 5 章

存在定理

5.1　普遍包絡代数

この章は [Hum72, Chapter V] に相当する．

Lie 代数に積が備わっている必要はないが，$\mathfrak{g}$-加群の定義 **(M3)** には xy，yx という元が作用しているように見える．そうしてあるのは，自然に積の構造を入れた普遍包絡代数を作ることができるからである．

5.1.1　テンソル代数と対称代数

この節では，体 $\mathbb{K}$ は任意とし，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を無限次元を許す．
半単純性を使わないので，第 1 章でやってもよい内容だが，PBW 定理の証明は unpleasant task なので，ここにあるらしい．

いくつかの代数を普遍性によって定義する．

定義 5.1.1: テンソル代数

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間を V とする．

- 単位的 $\mathbb{K}$-結合代数 $T(V)$
- 包含写像 $i: V \to T(V)$

の組 $(T(V), i)$ が．**テンソル代数** (tensor algebra) であるとは，以下の性質を満たすことをいう．

(テンソル代数の普遍性)　任意の単位的 $\mathbb{K}$-結合代数 A および任意の $\mathbb{K}$-線型写像 $f: V \longrightarrow A$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-代数準同型 $\overline{f}: T(V) \longrightarrow A$ が一意的に存在する：

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & \forall A \\
T(V) \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

命題 5.1.1: テンソル代数の一意性

テンソル代数は，単位的結合代数の同型を除いて一意的に存在する．

<u>**証明**</u> **(一意性)** 別のテンソル代数を (T', i') とすると，普遍性より準同型 $f\colon T \longrightarrow T'$，$f'\colon T' \longrightarrow T$ が得られる．可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dd, dashed, "\mathrm{id}_T"] \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "i"'] & \\
 & T
\end{tikzcd}$$

が成り立つので，$1_T = f' \circ f$．同様に $1_{T'} = f \circ f'$ だから，f, f' は全単射．よって (T, i)，(T', i') は同型である．

(存在)

$$T^0(V) = \mathbb{K}, \quad T^1(V) = V, \quad T^m(V) = V^{\otimes m}$$

とし，これらの直和 $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V)$ に対する積を

$$T^k(V) \times T^m(V) \to T^{k+m}(V), \quad (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \tag{5.1.1}$$

を $T(V)$ に拡張したものとすると，次数付き結合代数となる．i は包含写像だから，

$$\bar{f}^k\colon T^k(V) \longrightarrow A, \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto f(v_1) \cdots f(v_k)$$

が well-defined．これを，$T(V) \longrightarrow A$ に拡張したものを $\bar{f}$ とすると，(5.1.1) より代数の準同型であり，$f = \bar{f} \circ i$ を満たす．

■

定義 5.1.2: 対称代数

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間を V とする．

- 単位的 $\mathbb{K}$-可換結合代数 $S(V)$
- 包含写像 $i : V \to S(V)$

の組 $(S(V), i)$ が．**対称代数** (symmetric algebra) であるとは，以下の性質を満たすことをいう．

(対称代数の普遍性) 任意の単位的 $\mathbb{K}$-可換結合代数 A および任意の線型写像 $f\colon V \longrightarrow A$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-代数の準同型 $\bar{f}\colon S(V) \longrightarrow A$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & \forall A \\
S(V) \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

命題 5.1.2: 対称代数の一意性

対称代数は，単位的可換結合代数の同型を除いて一意的に存在する．

証明 **(一意性)** テンソル代数の証明と全く同様．

(存在) テンソル代数 $T(V)$ の

$$x \otimes y - y \otimes x \quad (x, y \in V)$$

で生成される（両側）イデアルを I とし，

$$S(V) \coloneqq T(V)/I = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i(V) \quad \left(S^i(V) = T^i(V)/(I \cap T^i(V))\right)$$

とする．テンソル代数から対称代数への標準的射影を $p_{\mathrm{S}} \colon T(V) \to S(V)$ とすると，

$$I = \bigoplus_{k=0}^{\infty}(I \cap T^k(V)) = \bigoplus_{k=2}^{\infty}(I \cap T^k(V)) \subset T^2(V)$$

より，

$$p_{\mathrm{S}}|_{T^0V \oplus T^1V} = p_{\mathrm{S}}|_{\mathbb{K} \oplus V}$$

は単射となる．特に，$i_{\mathrm{S}} \coloneqq p|_V \colon V \longrightarrow S(V)$ は包含写像である．

あとは，$S(V)$ が対称代数の普遍性を満たすことを示せばよい．以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i_{\mathrm{T}}"'] & \forall A \\
T(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\exists! f_{\mathrm{T}}"] \arrow[d, "p_{\mathrm{S}}"'] & \\
S(\mathfrak{g}) \arrow[uur, dashed, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

テンソル代数の普遍性より，$f_{\mathrm{T}} \colon T(\mathfrak{g}) \to A$ が一意的に存在する．A の可換性より，$I \subset \operatorname{Ker} f_{\mathrm{T}}$ だから，準同型定理よりこれは可換図式である．特に $\bar{f}$ は唯一である．

■

命題 5.1.3:

体 $\mathbb{K}$ 上の n 次元線型空間 V の基底を $(x_1, \dots, x_n)$ とすると，$S(V)$ は 1 と $x_{i(1)} \cdots x_{i(t)}$，$t \in \mathbb{N}$，$1 \leq i(1) \leq \cdots \leq i(t) \leq n$ を基底とする $\mathbb{K}$ 上の n 変数多項式代数と自然同型を持つ．

証明 対称代数の可換性より従う． ■

ここで，体 $\mathbb{K}$ の標数を 0 とする．$T^m(V)$ 上の対称群 $\mathfrak{S}_m$ の作用をテンソル $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$ の各 v_i の添字の入れ替えとする．$\mathfrak{S}_m$ の作用の下で不変なベクトルを m **次の（同次）対称テンソル**と呼ぶ．

有限次元の場合，V の基底に $(x_1, \dots, x_n)$ 対し，$x_{i(1)} \otimes \cdots \otimes x_{i(m)}$ $(1 \leq i(j) \leq n)$ は $T^m(V)$ の基底をなす．

また，任意の列 $1 \leq i(1) \leq \cdots \leq i(m) \leq n$ に対し，対称テンソルを

$$\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} x_{i(s(1))} \otimes \cdots \otimes x_{i(s(m))}$$

と定義すると，これの $S^m(V)$ への像は非零であり，$S^m(V)$ の基底をなすから，$T^m \setminus (I \cap T^m)$ の基底をなす．一方で，この対称テンソルは明らかに m 次対称テンソルのなす空間（$\tilde{S}^m(V)$ と呼ぶ）を張る．よって，標準的射影 p は $\tilde{S}^m(V)$ から $S^m(V)$ への同型，$\tilde{S}(V)$ から $S(V)$ への同型を定める．

5.1.2 普遍包絡代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の構成

定義 5.1.3: 普遍包絡代数

体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とする．

- 単位的 $\mathbb{K}$-結合代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$
- 以下を満たす Lie 代数準同型 $i\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

$$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \tag{5.1.2}$$

の組 $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), i)$ が**普遍包絡代数** (universal enveloping algebra) であるとは，以下の性質を満たすことをいう．

(普遍包絡代数の普遍性) 任意の単位的 $\mathbb{K}$-結合代数 A および (5.1.2) を満たす任意の線型写像 $f\colon V \longrightarrow A$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-代数の準同型 $\overline{f}\colon \mathfrak{U}(V) \longrightarrow A$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & \forall A \\ \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"] & \end{tikzcd}$$

命題 5.1.4: 普遍包絡代数の一意性

普遍包絡代数は，単位的結合代数の同型を除いて一意的に存在する．

証明 **(一意性)** 普遍包絡代数の証明と全く同様．

(存在) $\mathfrak{g}$ 上のテンソル代数 $T(\mathfrak{g})$ について，J を

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \quad (x, y \in \mathfrak{g}) \tag{5.1.3}$$

で生成される両側イデアルとする．ここで，

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$$

と定義し，$p_{\mathrm{U}}\colon T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ を標準的射影とする．$p_{\mathrm{U}}|_{T^0(\mathfrak{g})} = p_{\mathrm{U}}|_{\mathbb{K}}$ は単射．あとで示す系 5.1.3 より $p_{\mathrm{U}}|_{T^1(\mathfrak{g})} = p_{\mathrm{U}}|_{\mathfrak{g}}$ も単射．よって，$(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), i = p_{\mathrm{U}}|_{\mathfrak{g}})$ は，(5.1.2) を満たす単位的 $\mathbb{K}$-結合代数である．あとは普遍包絡代数の普遍性を成立させれば良いが，その証明は対称代数の普遍性の証明と全く同様である．

■

定義 5.1.4: $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-加群

$i_{\mathrm{U}} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ は単射だ（と後で示す）から，$\mathfrak{g}$-加群 V に対し，

$$i(x_1) \cdots i(x_n) \blacktriangleright v \mapsto x_1 \blacktriangleright (\cdots (x_n \blacktriangleright v) \dots)$$

を $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \times V \longrightarrow V$ に線型に拡張したものが定まる．**$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-加群**とは，これを作用とする代数上の加群のことである．

定義 5.1.5: フィルトレーション

全順序集合 I で添字付けされた集合族 $F = \{F_i\}_{i \in I}$ が

$$i \leq J \quad \Longrightarrow \quad F_i \subset F_j$$

を満たすとき，F を**フィルトレーション**（filtration）と呼ぶ.

定義 5.1.6: filtered 代数

体 $\mathbb{K}$ 上の代数 $(A, \cdot)$ について，あるフィルトレーション $\{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$（または $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$）が存在し，

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} F_i, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad F_n \cdots F_m \subset F_{n+m}$$

を満たすとき，A を **filtered 代数**と呼ぶ.

命題 5.1.5: filtered 結合代数が誘導する次数付き結合代数

filtered 結合代数 A について，そのフィルトレーション $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ とする．商代数

$$\mathrm{gr}\, A \coloneqq \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{gr}_i\, A \quad \left(\mathrm{gr}_0\, A \coloneqq A_0, \quad \mathrm{gr}_m\, A \coloneqq A_m / A_{m-1} \ (m \geq 1) \right)$$

と定義し，その積を

$$\mathrm{gr}_m\, A \times \mathrm{gr}_n\, A \longrightarrow \mathrm{gr}_{m+n}\, A, \quad (x + A_{n-1})(y + A_{m-1}) \mapsto xy + A_{n+m-1}$$

を $\mathrm{gr}\, A \times \mathrm{gr}\, A \longrightarrow \mathrm{gr}\, A$ に拡張したものとすると，$\mathrm{gr}\, A$ は次数付き結合代数となる.

任意の次数付き代数 $G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} G^i$ に対し，

$$G_i \coloneqq \bigoplus_{j=0}^{i} G^j \tag{5.1.4}$$

で定まる列 $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ はフィルトレーションであるから，G は filtered 代数.
特に，$G^{i+1} \simeq G_{i+1}/G_i$ だから，$G \simeq \mathrm{gr}\, G$.

5.1.3 PBW 定理とその系

テンソル代数 $T(\mathfrak{g})$，対称代数 $S(\mathfrak{g})$ のフィルトレーションを (5.1.4) のように定義し，それぞれ $\{T_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，$\{S_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ とする．
また，普遍包絡代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ は $U_m = p_{\mathrm{U}}(T_m)$ とすると，$\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ をフィルトレーションとする filtered 結合代数だから，（単位的）次数付き結合代数 $\mathrm{gr}\,\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ が命題 5.1.5 のように定義できる．
$p_{\mathrm{G}} \colon \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{gr}\,\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ を，標準的射影 $U_m \to \mathrm{gr}_m U$ を拡張したものとする．$p_{\mathrm{U}}(T^m) = p_{\mathrm{U}}(T_m - T_{m-1}) = U_m - U_{m-1} \subset U_m$ なので，全射

$$f_{\mathrm{G},m} \coloneqq p_{\mathrm{G}} \circ p_{\mathrm{U}}|_{T^m}$$

が定義できる．これを $T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g})$ に拡張したものを f_{G} とする．

補題 5.1.1:

$f_{\mathrm{G}} \colon T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g})$ は代数的準同型．特に，テンソル代数 T のイデアル I に対し $f_{\mathrm{G}}(I) = 0$ なので，準同型 $\omega : S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}\,\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ を誘導する．

<u>証明</u> 標準的射影の合成なので，結合代数を保つから，f_{G} は代数準同型．また，$p_{\mathrm{U}}(I) \subset p_{\mathrm{U}}(T_2) = U_2$ や，普遍包絡代数の構成 (5.1.3) に注意すると，

$$f_{\mathrm{G}}(I) = p_{\mathrm{U}}(I)/U_1 = p_{\mathrm{U}}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])/U_1 \subset p_{\mathrm{U}}(\mathfrak{g})/U_1 = U_1/U_1 = \{0\}$$

i.e. $I \subset \mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{G}}$．同型定理より，$\omega$ は準同型． ■

次の定理（または系 5.1.4）は Pincaré-Birkhoff-Witt 定理と呼ばれる．

定理 5.1.1: Pincaré-Birkhoff-Witt 定理 (PBW 定理)

対称代数から $\mathrm{gr}\,U$ への準同型 $\omega : S \to \mathrm{gr}\,U$ は代数の同型写像．

全単射性を含めた証明は次節だが，結合代数 $\mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g})$ が可換代数であることを確認しよう．$m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とすると，$p_{\mathrm{U}}(T^m(\mathfrak{g}))$ の元 $x_1 \cdots x_m$ に対し，

$$x_1 \cdots x_m = x_1 \cdots x_{i+1} x_i \cdots x_m + x_1 \cdots [x_i, x_{i+1}] \cdots x_m$$

である．ところで右辺第二項について，$x_1 \cdots [x_i, x_{i+1}] \cdots x_m \in U_m$ だから，確かに $\mathrm{gr}\,U$ は可換結合代数となっている．

系 5.1.2:

W を $T^m(\mathfrak{g})$ の部分空間とする．標準的射影 $p_{\mathrm{S}} : T^m(\mathfrak{g}) \to S^m(\mathfrak{g})$ に対し，$p_{\mathrm{S}}|_W$ が同型のとき，

$$U_m(\mathfrak{g})/p_{\mathrm{U}}(W) = U_{m-1}(\mathfrak{g})$$

<u>証明</u> 以下の図式は，ω は PBW 定理より同型，f_{G} は系 5.1.1 より準同型，他は標準的射影なので，可換図式である

$$
\begin{tikzcd}
& U^m(\mathfrak{g}) \arrow[dr, "p_{\mathrm{G}}"] & \\
T^m(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "p_{\mathrm{U}}"] \arrow[rr, "f_{\mathrm{G}}"] \arrow[dr, "p_{\mathrm{S}}"'] & & \operatorname{gr}_m \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \\
& S^m(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}
$$

PBW 定理と仮定より，下側の写像 $\omega \circ p_{\mathrm{S}}|_W$ は同型．よって，上側の写像の $p_{\mathrm{U}}(W)$ は同型．p_{G} も同型になるから，$p_{\mathrm{U}}(W) = U_m(\mathfrak{g})/U_{m-1}(\mathfrak{g})$ の補空間．■

系 5.1.3: i_{U} は包含写像

Lie 代数から普遍包絡代数への準同型 $i_{\mathrm{U}} := p_{\mathrm{U}}|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ は単射（よって，i_{U} は包含写像）．

証明 系 5.1.2 の $W = T^1 = \mathfrak{g}$ としたものである．■

以下では，$\mathfrak{g}$ の基底の濃度を加算無限以下とする．

系 5.1.4: PBW 基底

$(x_1, x_2, \ldots)$ を $\mathfrak{g}$ の順序付き基底とする．

$$\{1\} \cup \left\{ x_{i(1)} \cdots x_{i(m)} := p_{\mathrm{U}}(x_{i(1)} \otimes \cdots \otimes x_{i(m)}) \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i(1) \leq i(2) \leq \cdots \leq i(m) \right\}$$

は $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の基底をなす．この基底を単に **PBW 基底**と呼ぶ．

証明 $W \subset T^m$ を $x_{i(1)} \otimes \cdots \otimes x_{i(m)}$ $(i(1) \leq \ldots \leq i(m))$ で張られる部分空間とする．$p_{\mathrm{S}}|_{S^m}$ は同型．系 5.1.2 より，U_m において，$\pi(W)$ は U_{m-1} の補空間となる．■

系 5.1.5:

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の部分代数とし，$(h_1, h_2, \ldots)$ を $\mathfrak{h}$ の順序付き基底，$(h_1, \ldots, x_1, \ldots)$ を $\mathfrak{g}$ の順序付き基底とする．単射 $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ に誘導される準同型 $\mathfrak{U}(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ は単射であり，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ は自由 $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$-加群であり，その自由基底は

$$\{1\} \cup \left\{ x_{i(1)} \cdots x_{i(m)} = p_{\mathrm{U}}(x_{i(1)} \otimes \cdots \otimes x_{i(m)}),\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i(1) \leq i(2) \leq \cdots \leq i(m) \right\}$$

証明 系 5.1.4 より従う．■

系 5.1.6:

体 $\mathbb{K}$ の標数を 0 とする. 標準的射影の合成 $S^m(\mathfrak{g}) \to \tilde{S}^m(\mathfrak{g}) \to U_m(\mathfrak{g})$ は $S^m(\mathfrak{g})$ から $U_m(\mathfrak{g})/U_{m-1}(\mathfrak{g})$ への（線型）同型.

証明 系 5.1.2 の $W = \tilde{S}^m(\mathfrak{g})$ とすればよい．■

5.1.4 PBW 定理の証明

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の順序付けされた基底を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ とする．命題 5.1.3 より，$S(\mathfrak{g})$ は変数 z_λ $(\lambda\in\Omega)$ による多項式代数と見なせる．長さ m の列 $\Sigma=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ に対し，

$$z_\Lambda \coloneqq z_{\lambda_1}\cdots z_{\lambda_m}\in S^m,\quad x_\Lambda \coloneqq x_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes x_{\lambda_m}\in T^m$$

とする．ただし，空集合 $\emptyset$ の長さは 0 で

$$z_\emptyset = x_\emptyset = 1$$

とする．また，Σ **が上昇列**であるとは，Ω の順序 $\leq$ に対して $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_m$ を満たすことを言い，また

$$\lambda\leq\Sigma \quad\overset{\text{def}}{\iff}\quad \lambda\leq\mu,\ (\forall\mu)$$

とする．

補題 5.1.2:

各 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，以下を満たす唯一の線型写像 $f_m\colon L\otimes S_m\to S$ が存在する．

(A_m) $\quad f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)=z_\lambda z_\Sigma \quad (\forall\lambda\leq\Sigma,\ z_\Sigma\in S_m)$

(B_m) $\quad f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)-z_\lambda z_\Sigma\in S_k \quad (\forall k\leq m,\ z_\Sigma\in S_k)$

(C_m) $\quad f_m(x_\lambda\otimes f_m(x_\lambda\otimes z_\Xi))=f_m(x_\mu\otimes f_m(x_\lambda\otimes z_\Xi))+f_m([x_\lambda,x_\mu]\otimes z_\Xi) \quad (\forall z_\Xi\in S_{m-1})$

特に，$f_m|_{\mathfrak{g}\otimes S_{m-1}}=f_{m-1}$．

証明

$$???$$

より，(C_m) は (B_m) から示される．また，f_m が (A_m)，(B_m)，(C_m) を満たすとき，$f_m|_{\mathfrak{g}\otimes S_{m-1}}$ は，(A_{m-1})，(B_{m-1})，(C_{m-1}) を満たすから，唯一性より f_{m-1} に等しい．
f_m の存在については，m についての帰納法で示す．$m=0$ については，

$$f_0(x_\lambda\otimes 1)=z_\lambda\in S_1$$

より，(A_0)，(B_0)，(C_0) が成り立つ．

(A_{m-1})，(B_{m-1})，(C_{m-1}) を満たす f_{m-1} が唯一存在するとき，$f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)$ を定義する．$z_\Sigma\in S_m$ は対称代数の元だから，$z_\Sigma=z_{\Sigma'}$ となる上昇列 Σ' が存在するので，元から上昇列である場合を考えれば十分．
$\lambda\leq\Sigma$ のときは，(A_m) により定義する必要がある．
$\lambda\leq\Sigma$ でないとき，$\Sigma=(\sigma_1,\Sigma')$ とすると，$\lambda>\sigma_1$．(A_{m-1}) より $z_\Sigma=z_{\sigma_1}z_{\Sigma'}=f(x_{\sigma_1}\otimes z_{\Sigma'})$．また，$(B_m)$ と (B_{m-1}) を比較すると

$$f_m(x_\lambda\otimes z_{\Sigma'})+S_{m-1}=f_{m-1}(x_\lambda\otimes z_{\Sigma'})+S_{m-1}=z_\lambda z_{\Sigma'}$$

(C_m) を満たす必要があるから，

$$\begin{aligned} f_m(x_\lambda\otimes f_m(x_{\sigma_1}\otimes z_{\Sigma'})) &= z_{\sigma_1}f_m(x_\lambda\otimes z_{\Sigma'})+f_m([x_\lambda,x_\mu]\otimes z_{\Sigma'}) \\ &= z_\lambda z_\Sigma+f_{m-1}(x_{\sigma_1}\otimes y)+f_m([x_\lambda,x_\mu]\otimes z_{\Sigma'}) \end{aligned}$$

■

補題 5.1.3:

以下を満たす Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(S(\mathfrak{g}))$ が存在する．

(a) $\quad \forall \lambda \in \Sigma, \quad \rho(x_\lambda) z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$

(b) $\quad$ 長さ m の Σ に対し，$\rho(x_\lambda) z_\Sigma + S_m = z_\lambda z_\Sigma + S_m$

<u>証明</u> 補題 5.1.2 の f_m を拡張したものとして $f\colon \mathfrak{g} \times S \to S$ が定義され，(A_m), (B_m), (C_m) $(\forall m \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ を満たす．この f により，S は $\mathfrak{g}$-加群となり（特に (C_m) より），条件 (a), (b) は (A_m), (B_m) より従う． ■

補題 5.1.4:

$t \in T_m \cap J$（$J = \operatorname{Ker} p_{\mathrm{U}}$，$p_{\mathrm{U}}\colon T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ は標準的射影）とすると，t の m 次成分 t_m に対し，$t_m \in I$.

<u>証明</u> t_m は $x_{\Sigma(i)}$ $(1 \le i \le r\ \Sigma(i)の長さは m)$ の線型結合で書ける．補題 5.1.3 で定義した表現 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(S)$ は普遍包絡代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の普遍性より，$\rho\colon T(\mathfrak{g}) \to \operatorname{End} S(\mathfrak{g})$ に拡張され，$J \subset \operatorname{Ker} \rho$ を満たす．i.e. $\rho(t) = 0$.
一方補題 5.1.3（の拡張）より，$\rho(t) \blacktriangleright 1$ は $z_{\Sigma(i)}$ の線型結合で書ける．i.e. $t \in I$. ■

<u>証明</u> PBW の証明: 示すべきは

$$t \in T^m,\ p_{\mathrm{U}}(t) \in U_{m-1} \quad \Longrightarrow \quad t \in I$$

である．まず，

$$t \in T^m,\ p_{\mathrm{U}}(t) \in U_{m-1} \quad \Longrightarrow \quad \exists t' \in T_{m-1},\ p_{\mathrm{U}}(t) = p_{\mathrm{U}}(t')$$

となるから，$t - t' \in (T^m \oplus T_{m-1}) \cap J = T_m \cap J$ となる．補題 5.1.3 より，$t \in I$. ■

5.1.5 自由 Lie 代数

定義 5.1.7: 自由 Lie 代数

集合 X で生成される体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が X 上**自由** (free) であるとは，以下を満たすこと．

(自由 Lie 代数の普遍性) 任意の $\mathbb{K}$-上の Lie 代数 $\mathfrak{M}$ および任意の写像 $f\colon X \longrightarrow \mathfrak{M}$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-代数の準同型 $\overline{f}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{M}$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & \forall \mathfrak{M} \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>証明</u> **(一意性)** テンソル代数の証明と全く同様．
(存在) まず，X で生成される自由ベクトル空間を $\mathbb{K}^{\oplus X}$ とし，
そのテンソル代数 $T(\mathbb{K}^{\oplus X})$ を考え，
(テンソル積を Lie 括弧とする Lie 代数と見て)X で生成される $T(\mathbb{K}^{\oplus X})$ の部分代数を $\mathfrak{g}$ とする??

あとは自由 Lie 代数の普遍性を成立させれば良い．が，その証明は対称代数の普遍性の証明と同様で，$X \to \mathbb{K}^{\oplus X} \to T(\mathbb{K}^{\oplus X}) \to \mathfrak{g}$ と縦に一つ伸び，$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ より結合代数の準同型がとれて?.

■

定義 5.1.8: 自由 Lie 代数上の $\mathfrak{g}$-加群

X 上自由な Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，X で生成される自由ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus X}$ は以下の作用により $\mathfrak{g}$-加群となる:
各 $x \in X$ を Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の元に割り当て???，X を $\mathfrak{g}$ に拡大する．

定義 5.1.9: Lie 代数の生成系と関係式

X 上の自由 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，R をイデアルとし，$p \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/R$ を標準的射影とする．
$\mathfrak{g}/R$ を生成系 $p(X)$ と関係式 R（$\forall f \in R,\ r = 0$）をもつ Lie 代数と呼ぶ.

5.2　生成系と関係式

この節では標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とし，無限次元を許す．
この節の目的は，任意のルート系に対し，半単純 Lie 代数が一意的に存在することを示すことである．

5.2.1　$\mathfrak{g}$ が満たす関係式

命題 5.2.1: 半単純 Lie 代数が満たす関係式

$\mathfrak{g}$ を有限次元半単純 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ を極大トーラスとし，部分 Lie 代数の生成系 $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$，$y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ を固定する．$h_i = [x_i, y_i] \in [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}]$ とし，Φ を $\mathfrak{g}$ のルート系，Δ を底とする．
$\mathfrak{g}$ は $\left\{x_i,\ y_i,\ h_i \;\middle|\; 1 \leq i \leq l\right\}$ で生成され，（少なくとも）以下の関係式を満たす．

(S1) $[h_i, h_j] = 0 \quad (0 \leq i, j \leq l)$
(S2) $[x_i, y_j] = h_i \delta_{ij}$
(S3) $[h_i, x_j] = [\![\alpha_j, \alpha_i]\!] x_j$，$[h_i, y_j] = -[\![\alpha_j, \alpha_i]\!] y_j$
(S_{ij}^+) $(\operatorname{ad} x_i)^{-[\![\alpha_j, \alpha_i]\!]+1}(x_j) = 0 \quad (i \neq j)$
(S_{ij}^-) $(\operatorname{ad} y_i)^{-[\![\alpha_j, \alpha_i]\!]+1}(y_j) = 0 \quad (i \neq j)$

<u>証明</u> (S1)　$h_i \in [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] \subset \mathfrak{h}$ であり，トーラスは可換なので，$[h_i, h_j] = 0$.
(S2)　$i = j$ の場合は定義そのもの．$i \neq j$ の場合は補題 3.2.1 より $\alpha_i - \alpha_j \notin \Phi$ なので，0 となる．
(S3)　$[h_i, x_j] = \operatorname{ad}(h_i)(x_j) = \alpha_j(h_i) x_j = [\![\alpha_i, \alpha_j]\!] x_j$．$y_i$ は $-\alpha_j(h_i)$ より成立．
(S_{ij}^+)　命題 2.5.1 より，$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$\operatorname{ad} {x_i}^m(x_j) \in \mathfrak{g}_{\alpha_j + m\alpha_i}$$

また，$\alpha_i - \alpha_j \notin \Phi$ より，α_i-string through α_j は $\{\alpha_j, \ldots, \alpha_j - [\![\alpha_j, \alpha_i]\!]\}$．i.e. $m = -[\![\alpha_j, \alpha_i]\!] + 1$ で

は 0 となる．

(S_{ij}^-)　$\operatorname{ad} y_i{}^m(y_j) \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j - m\alpha_i}$，以下 (S_{ij}^+) の証明と同様．

■

まずは，半単純 Lie 代数の関係式がこれだけであることを示す．

5.2.2 (S1)-(S3) による結果

無限次元を許すため，一旦 $(S_{ij}^{\pm})$ を除外して考える．

ルート系 Φ とその底 Δ を固定する．Cartan 整数を $c_{ij} = [\![\alpha_i, \alpha_j]\!]$ と略記する．

まず，$3l$ 個の生成子 $\{\tilde{x}_i,\ \tilde{y}_i,\ \tilde{h}_i\}$ で生成される自由 Lie 代数を $\tilde{\mathfrak{g}}$ とする．

$$[\tilde{h}_i, \tilde{h}_j], \quad [\tilde{h}_i, \tilde{h}_j] - \delta_{ij}\tilde{h}_i, \quad [\tilde{h}_i, \tilde{x}_j] - c_{ji}\tilde{x}_j, \quad [\tilde{h}_i, \tilde{y}_j] + c_{ji}\tilde{y}_j \tag{5.2.1}$$

で生成される $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルを $\tilde{K}$ とする．$\mathfrak{g}_o = \tilde{\mathfrak{g}}/\tilde{K}$ とし，$\{\tilde{x}_i,\ \tilde{y}_i,\ \tilde{h}_i\}$ を標準的射影した $\{x_i, y_i, h_i\}$ を $\mathfrak{g}_o$ の生成系とする．一般に，$\dim \mathfrak{g}_o = \infty$．

$\mathfrak{g}_o$ を具体的に調べるために，適切な表現を構成する．自由 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現 $\mathbb{K}^{\oplus X}$ は何の問題もなく構成され，生成子は $3l$ 個あった．

ある l 次元 $\mathbb{K}$-線型空間の基底を $(v_1, \ldots, v_l)$ とし，そのテンソル代数（を代数というより線型空間と見て）を V とする．以下，テンソル積の記号 $\otimes$ を省略すると，V の基底は $v_{i_1} \cdots v_{i_t}$（ただし，$t = 0$ のとき 1）．ここで V 上の準同型を以下で定義する．

$$\begin{cases} \tilde{h}_j \blacktriangleright 1 = 0 \\ \tilde{h}_j \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = -(c_{i_1 j} + \cdots + c_{i_t j})(v_{i_1} \cdots v_{i_t}) \end{cases} \tag{5.2.2}$$
$$\begin{cases} \tilde{y}_j \blacktriangleright 1 = v_j \\ \tilde{y}_j \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = -v_j v_{i_1} \cdots v_{i_t} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \tilde{x}_j \blacktriangleright 1 = 0 \\ \tilde{x}_j \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = v_{i_1} \tilde{x}_j \blacktriangleright (v_{i_2} \cdots v_{i_t}) - \delta_{i_1 j}(c_{i_2 j} + \cdots + c_{i_t j})(v_{i_2} \cdots v_{i_t}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \displaystyle\sum_{k=1}^{t} -\delta_{i_k j}(c_{i_1 j} + \cdots + c_{i_t j} - c_{i_k j})(v_{i_1} \cdots v_{i_{k-1}} v_{i_{k+1}} \cdots v_{i_t}) \end{cases}$$

この作用を $\tilde{\mathfrak{g}}$ に拡大した表現を $\tilde{\phi}\colon \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(V)$ とする．

x_j の作用について，$(c_{i_1 i} + \cdots c_{i_t i} - c_{ji})\delta_{i_k j} = (c_{i_1 i} + \cdots c_{i_t i} - c_{i_k i})\delta_{i_k j}$ は $v_{i_1} \cdots v_{i_{k-1}} v_{i_{k+1}} \cdots v_{i_t}$ の $\tilde{h}_i$ の固有値だから，$\tilde{x}_j \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t})$ は $\tilde{h}_j$ の固有値 $-(c_{i_1 i} + \cdots c_{i_t i} - c_{ji})$ の $\tilde{h}_i$ の固有ベクトルとなる．

命題 5.2.2: $\mathfrak{g}_o$ 加群の構成

$\tilde{K} \subset \operatorname{Ker} \tilde{\phi}$．i.e.（準同型定理より）$\tilde{\phi}$ は $\mathfrak{g}_o$-加群が定義できる．

証明 $\tilde{K}$ の生成系 (5.2.1) が $\operatorname{Ker} \tilde{\phi}$ の元になることを見れば良い．

V の基底は，$\{\tilde{h}_i\}$ を同時対角化しているから，$[\tilde{h}_i, \tilde{h}_j] \in \tilde{K}_o$．残りは，

$$\begin{aligned}[\tilde{x}_i, \tilde{y}_j] \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) &= \big[v_j(\tilde{x}_i \blacktriangleright v_{i_1} \cdots v_{i_t}) - \delta_{ji}(c_{i_1} + \cdots + c_{i_t}))(v_{i_1} \cdots v_{i_t})\big] - \tilde{y}_j \blacktriangleright \tilde{x}_i \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) \\ &= \delta_{ij}\tilde{h}_i(v_{i_1} \cdots v_{i_t})\end{aligned}$$

$$[\tilde{h}_i, \tilde{x}_j] \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = c_{ji}(v_j v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = c_{ji} \tilde{x}_j \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t})$$

$$[\tilde{h}_i, \tilde{y}_j] \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = -c_{ji}(v_j v_{i_1} \cdots v_{i_t}) = -c_{ji} \tilde{y}_j \blacktriangleright (v_{i_1} \cdots v_{i_t})$$

より，$[\tilde{h}_i, \tilde{h}_j] - \delta_{ij}\tilde{h}_i$，$[\tilde{h}_i, \tilde{y}_j] + c_{ji}\tilde{y}_j \in \operatorname{Ker}\tilde{\phi}$. ■

定理 5.2.1:

ルート系を Φ，その底を $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$，$\{x_i, y_i, h_i | 1 \leq i \leq l\}$ で生成され，関係式 (S1)-(S3) を満たす Lie 代数を $\mathfrak{g}_o$，$\{x_i\}$，$\{y_i\}$，$\{h_i\}$ で生成される $\mathfrak{g}_o$ の部分 Lie 代数をそれぞれ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{h}$ とする．
このとき $\{h_i | 1 \leq i \leq l\}$ は $\mathfrak{h}$ の基底で，$\mathfrak{h}$ は可換．また，$\mathfrak{g} = \mathfrak{y} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{x}$.

<u>証明</u> (5.2.2) の拡張で得られた表現 $\tilde{\phi}\colon \mathfrak{d} \longrightarrow x \in \mathfrak{gl}(V)$ に対し，$\mathfrak{d}_o$ 加群と見たもの（命題??より存在）を $\phi\colon \mathfrak{d}_o \longrightarrow x \in \mathfrak{gl}(V)$ とする．
また，$\{\tilde{x}_i\}$，$\{\tilde{y}_i\}$，$\{\tilde{h}_i\}$ で生成される $\mathfrak{g}_o$ の部分 Lie 代数をそれぞれ $\tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{y}}, \tilde{\mathfrak{h}}$ とする．

Step1: $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \operatorname{Ker}\tilde{\phi} = 0$

$$\tilde{\phi}\left(\sum_{j=1}^{l} a_j \tilde{h}_j\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{l} a_j c_{ij} \ (1 \leq i \leq l)$$

だが，Cartan 行列 (c_{ij}) は正則なので，$a_j = 0 \ (\forall j)$.

Step2: (Step1) より標準的射影 $\tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}_o$ の $\tilde{\mathfrak{h}}$ への制限は $\mathfrak{h}$ への同型写像

Step3: 標準的射影 $\tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}_o$ の $\tilde{\mathfrak{h}}$ の部分空間 $\tilde{\mathfrak{y}} + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{x}}$ への制限は $\mathfrak{g}$ への同型写像

関係式 (S1)-(S3) より，$\mathbb{F}y_i + \mathbb{F}h_i + \mathbb{F}x_i$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の準同型な像．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ は単純 Lie 代数で，**(Step 2)** より $h_i \neq 0$ なので，$\mathbb{F}y_i \oplus \mathbb{F}h_i \oplus \mathbb{F}x_i \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

aaaaaaa

Step4: $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{d}_o$ の l 次元可換部分代数．

関係式 (S1) と **Step2** より従う．

Step5:

Step6:

Step7:

Step8:

Step:

Step:

Step:

Step:

Step:

. ■

5.2.3 Serre の定理

補題 5.2.1:

$\mathfrak{g}_o$ に対し，

$$\operatorname{ad} x_k(y_ij) = 0 \quad (1 \le k \le l,\ i \ne j)$$

<u>証明</u> $k \neq i$ **の場合**

$k = i$ **の場合**

■

定義 5.2.1: 局所冪零

（無限次元）ベクトル空間 V に対し，$x \in \operatorname{End} V$ が

$$\forall v \in V,\ \exists m \in \mathbb{N}, \quad x^m(v) = 0$$

を満たす時，x を**局所冪零**と言う．

$\forall v \in V$ は，x の有限次元不変部分空間 W(例えば $\mathrm{Span}\{v, x(v), \ldots, x^{m-1}(v)\}$) に含まれる．$x$ は W 上冪零だから，$\exp(x|_W)$ が定義される．
また，別の有限次元不変部分空間 W' を持つ時，$\exp(x|_W)$ と $\exp(x|_{W'})$ は $W \cap W'$ で一致するから，$\exp x \in \operatorname{End} V$ が well-defined．局所冪零

定理 5.2.2: Serre の定理

Φ をルート系，$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ とし，$\mathfrak{g}$ を $3l$ 個の元 $\{x_i, y_i, h_i | 1 \le i \le l\}$ で生成され，関係式 (S1)-(S3), ($\mathrm{S}_{ij}^{\pm}$) を持つとする．
このとき，$\mathfrak{g}$ は（有限次元）半単純 Lie 代数で，極大トーラス $\mathfrak{h}$ は h_i で張られ，等しいルート系 Φ を持つ．

<u>証明</u>

Step1:

Step2:

Step3:

Step4:

Step5:

Step6:

Step7:

Step8:

Step9:

Step10:

Step11:

Step12:

Step13:

Step14:

■

5.2.4 半単純 Lie 代数とルート系の一対一対応

定理 5.2.3: ルート系による半単純リー代数の構成

(1) 任意のルート系 Φ にたいし，Φ を同じルート系にもつ半単純 Lie 代数が存在する．

(2) $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}'$ を半単純 Lie 代数とし，それぞれの極大トーラスを $\mathfrak{h}$，$\mathfrak{h}'$，ルート系を Φ，Φ' とする．ルート系の同型 $\Phi \longrightarrow \Phi'$ が与えられ，底を $\Delta \mapsto \Delta'$ と送るとし，$\pi\colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}'$ を対応する同型とする（14 節らしい）．
さらに，各単純ルート $\alpha \in \Delta$，$\alpha' \in \Delta'$ に対し，$x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$，$x'_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'_{\alpha'} \setminus \{0\}$ を選ぶ．
このとき，π の拡大として唯一の同型 $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ が得られ，$\pi(x_\alpha) = x'_{\alpha'}$ を満たす．

5.3 単純 Lie 代数

体 $\mathbb{K}$ を標数 0 の代数閉体とする．

5.3.1 簡約 Lie 代数と半単純性判定

ここでは，標数を任意とする．
Lie 代数が半単純であることを Killing 形式が非退化以外で確認する方法を示す．

定義 5.3.1: 簡約 Lie 代数

Lie 代数の根基 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ と中心 $Z(\mathfrak{g})$ が一致するとき，**簡約** (reductive) Lie 代数という．

命題 5.3.1: 簡約 Lie 代数の性質

(1) $\mathfrak{g}$ が簡約 Lie 代数 $\quad\Longrightarrow\quad$ $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$ で，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ は半単純．

(2) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が，非零な忠実な有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群 V をもち，$\dim V \notin (\operatorname{char}\mathbb{K})\mathbb{N}$
$\quad\Longrightarrow\quad$ $\mathfrak{g}$ は簡約 Lie 代数で，$\dim Z(\mathfrak{g}) \leq 1$.
さらに $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ でもあるならば，$\mathfrak{g}$ は半単純.

証明 **(1)** $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は定義より半単純.
系 2.2.3，$\mathfrak{g}'$ の定義，より $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}',\mathfrak{g}'] = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.
$\operatorname{ad}\mathfrak{g} \simeq \operatorname{ad}\mathfrak{g}'$ は代数閉体上の Schur の補題より完全可約だから，$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$ となる．

(2) Lie の定理より，$\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は V の共通の固有ベクトル v をもち，適当な $\lambda \in (\operatorname{rad}\mathfrak{g})^*$ で，

$$s \blacktriangleright v = \lambda(s)v \quad (s \in \operatorname{rad}\mathfrak{g})$$

と書ける．V は既約だから，$\{v\} \cup \{x \blacktriangleright v | x \in \mathfrak{g}\}$ の部分集合が V の基底を張る．

また，$\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}$ はイデアルだから，$[\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathrm{rad}\,\mathfrak{g}$ より，

$$s \blacktriangleright (x \blacktriangleright v) = \lambda(s)(x \blacktriangleright v) + \lambda([s, x])v \quad (s \in \mathrm{rad}\,\mathfrak{g},\ x \in \mathfrak{g})$$

となる．跡の巡回性より，$\mathrm{Tr}([\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subset \mathrm{Tr}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$．よって，$\mathrm{Tr}([s, x]) = \lambda([s, x]) \times \dim V = 0$.
仮定より，$\dim V \notin (\mathrm{char}\,\mathbb{K})\mathbb{N}$ なので，$\lambda[s, x] = 0$ となり $\forall s \in \mathrm{rad}\,\mathfrak{g}$ の表現行列は対角行列.
今，V は忠実な表現だから，$\mathrm{rad}\,\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$ かつ，$\dim(\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}) \leq 1$.
最後に，$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ のとき，$\mathfrak{sl}(V)$ のスカラー倍は 0 のみ（$\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$ としていた）なので，$\mathrm{rad}\,\mathfrak{g} = 0$.
i.e. $\mathfrak{g}$ は半単純.

■

特に (2) の仮定を満たすのは，$\mathbb{C}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ で既約な場合などが挙げられる．

第 6 章

表現定理

この章では，$\mathfrak{g}$ は標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の極大トーラス，Φ をルート系，$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ を Φ の底，$\mathscr{W}$ を Weyl 群とする．

6.1 表現のウエイトと極大ベクトル

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ で考えたウエイトを一般化する．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の場合，極大トーラス $\mathfrak{h}$ は 1 次元線型空間だったので，ウエイトは固有値として定義された．$\mathfrak{h}$ が一般の次元の場合は，ルートのように $\mathfrak{h}^*$ の元として定義する．ルートと異なる点は，表現が随伴表現とは限らないことだけである．

6.1.1 ウエイト空間

定義 6.1.1: 表現のウエイト，ウエイト空間，ウエイトの集合

V を $\mathfrak{g}$-加群とし，極大トーラス $\mathfrak{h}$ を一つ固定する．$\lambda \in h^*$ に対し，

$$V_\lambda := \left\{ v \in V \,\middle|\, h \blacktriangleright v = \lambda(h)v \,(\forall h \in \mathfrak{h}) \right\}$$

が定義される．この内 $V_\lambda \neq 0$ のものを，**ウエイト空間** (weight space) と呼び，λ を V の**ウエイト** (weight)（より正確には $\mathfrak{h}$ の V 上のウエイト）と呼ぶ．
また V の**ウエイトの集合**を

$$\Pi(V) := \left\{ \mu \in \mathfrak{h}^* \,\middle|\, V_\mu \neq 0 \right\}$$

と定義する．

補題 6.1.1:

(1) $V' := \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ はベクトル空間の直和で，V の部分 $\mathfrak{g}$-加群．
(2) V が有限次元の場合，$V = V'$．
(3) $\mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright V_\lambda = V_{\lambda+\alpha}$，$(\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ \forall \alpha \in \Phi)$.

証明　(1) ウエイト $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}$ に対し，$v \in V_\lambda \cap V'_\lambda \setminus \{0\}$ とする．任意の h に対し，

$$h \blacktriangleright v = \lambda(h)v = \lambda'(h)v \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda(h) - \lambda'(h))v = 0$$

であるから，$v \neq 0$ より $\lambda = \lambda'$ となる．よって，直和となる．

(2) $\mathfrak{g}$ は半単純なので，系 2.3.5 より $\mathfrak{h}^*$ の元を同時対角化できる．

(3) $x \in \mathfrak{g}_\alpha$，$h \in \mathfrak{h}$，$v \in V_\lambda$ とすると，

$$h \blacktriangleright (x \blacktriangleright v) = x \blacktriangleright (h \blacktriangleright v) + [h, x] \blacktriangleright v = (\lambda(h) + \alpha(h))(x \blacktriangleright v)$$

より，$\mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright V_\lambda = V_{\lambda+\alpha}$ となる．

■

6.1.2　最高ウエイト加群

極大ベクトルも同様に一般化する．

定義 6.1.2: ウエイトの極大ベクトル

$\mathfrak{g}$-加群 V に対し，ルートの底 Δ を固定する．V のそのウエイト λ の固有空間の元 $v^+ \neq 0$ が，

$$\mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright v^+ = 0 \quad (\forall \alpha \succ 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright v^+ = 0 \quad (\forall \alpha \in \Delta)$$

を満たすとき，v^+ を**極大ベクトル** (maximal vector) と呼ぶ．

$\Longleftarrow$ は，命題 2.5.4 の $[g_\alpha, g_\beta] = g_{\alpha+\beta}$ より言える．
無限次元では存在は保証されない．一方有限次元では Borel 部分代数（極大可解部分代数，第 4 章）$\mathfrak{b}(\Delta) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ ($\mathfrak{n}^+ = \oplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha$) を考えると，Lie の定理と g_α の冪零性から，$\mathfrak{g}_\alpha$ の作用で 0 になるような $\mathfrak{b}(\Delta)$ の共通の固有ベクトルが存在する．
極大ベクトルで生成される $\mathfrak{g}$-加群を考える．

定義 6.1.3: 最高ウエイト加群

ウエイト λ の極大ベクトル v^+ と，$\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ に対し，

$$V = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright v^+$$

を満たすとき，λ を V の**最高ウエイト** (highest weight) と呼び，V は（ウエイト λ の）**最高ウエイト加群**（または標準巡回 (stnadard cyclic) 加群）と呼ぶ．

最高ウエイト加群の構造は単純．命題 2.5.3 より，正ルート α に対し，$x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ を選ぶと，$y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在し，$[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha \in \mathfrak{h}$ となる．
ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ で定義された半順序同様に，Lie 代数のウエイトの**半順序** $\prec \subset \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ を

$$\mu \prec \lambda \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists! \{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_{\geq 0},\ \lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$$

と定義する．

補題 6.1.2:

加群 M の部分加群 N に対し，

$$N \text{ が極大} \iff \text{商加群 } M/N \text{ は既約}$$

<u>証明</u> $\Leftrightarrow$ のどちらも対偶を示す．

$(\Rightarrow)$ 商加群の非自明部分加群 K が存在したとすると，$N \subsetneq K+N \subsetneq M$ より，N は極大でない．

$(\Leftarrow)$$N \subsetneq K \subsetneq M$ を満たす部分加群 K が存在したとすると，M/K は M/N の非自明部分加群である． ■

定理 6.1.1:

V を最高ウエイト $\mathfrak{g}$-加群，λ を最高ウエイト，$v^+ \in V_\lambda$ を極大ベクトル，$\Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ を正ルートの集合とする．

(1) $V = \mathrm{Span}\{y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \blacktriangleright v^+ \ (i_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})\}$．特に，ウエイト空間の直和である．
(2) V の任意のウエイトについて，$\mu \prec \lambda$（最高ウエイトと呼ばれる所以）．
(3) $\forall \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対し，$\dim V_\mu < \infty$．また，$\dim V_\lambda = 1$．
(4) 任意の V の部分加群はウエイト空間の直和．
(5) V は直既約 $\mathfrak{g}$-加群であり，唯一の極大部分加群と対応する既約な商 $\mathfrak{g}$-加群をもつ．
(6) 全ての非零な準同型な V の像もウエイト λ の最高ウエイト加群．

<u>証明</u> **(1)** $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \prec 0} \mathfrak{g}_\alpha$，$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\Delta)$ を Borel 部分代数とする．普遍包絡代数上の加群の定義と PBW 定理（の系 5.1.5）より，

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright v^+ = \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)\mathfrak{U}(\mathfrak{b}) \blacktriangleright v^+ = \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-) \blacktriangleright (\mathbb{K}v^+) \quad (\because \mathfrak{b} \text{ の共通の固有ベクトル})$$

$\mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)$ の基底は $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}$ だったから，V はこのベクトルの集合で張られる．

(2) 補題 6.1.1 より，

$$v := y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} v^+ \tag{6.1.1}$$

のウエイトは $\mu = \lambda - \sum_j i_j\beta_j$ であり，$\beta_j \in \Phi^+$ は単純ルートの和だったから，$\mu \prec \lambda$．

(3) $\sum_j i_j\beta_j = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$ を満たす $(i_j,\ \beta_j)$ の組み合わせは高々有限個だから，$\dim V_\mu < \infty$．特に，ウエイト λ を持つ (6.1.1) の形のベクトルは v^+ しかないので，$\dim V_\mu = 1$．

(4) W を V の部分加群とする，$\forall w \in W \subset V$ は異なるウエイト空間 V_{μ_i} の元 v_i の和で書ける．$\forall v_i \in W$ を背理法で示す．

W は線型空間なので，$w = v_1 + \cdots + v_n \in W$, $(\forall v_i \notin W)$ を（背理法の仮定として）仮定して良い．$n = 1$ はあり得ないので，$n > 1$ とする．ここで，

$$\exists h \in \mathfrak{h}, \quad h \blacktriangleright w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(h)v_i \in W \ \ \mu_1(h) \neq \mu_2(h)$$

とでき，

$$(h - \mu_1(h)1) \blacktriangleright w = \sum_{i=2}^{n} (\mu_i(h) - \mu_1(h))v_i \in W \setminus \{0\}$$

となる．これを繰り返すと，$v_n \in W$ となり矛盾する．

(5) V の部分加群が V_λ を含むと，(1) より V 自身となる．(4) と合わせて，V の非自明な部分 $\mathfrak{g}$-加群は V_λ 以外のウエイト空間の直和でかけるから，これら全ての部分加群の和 W も部分 $\mathfrak{g}$-加群である．よって V は，唯一の極大部分加群 W と唯一の既約な商 $\mathfrak{g}$-加群（補題 6.1.2）をもつ．全ての非自明部分加群は W に含まれ，V_λ を含まないから，V は部分加群の和で表せない．i.e. 直既約 $\mathfrak{g}$-加群である．

(6) (1) の生成系を実際に準同型で送ったものなので，最高ウエイト加群．

■

系 6.1.2: $\mathfrak{g}$-加群の極大ベクトルの唯一性

既約な最高ウエイト $\mathfrak{g}$-加群 V の，（最高ウエイト λ の）v^+ は高々スカラー倍の違いを除いて唯一．

<u>証明</u> w^+ をウエイト λ' の極大ベクトルとすると，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright w^+$ は V の部分加群である．V は既約だったので，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright w^+ = V$．定理 6.1.1(2) より，$\lambda = \lambda'$．よって定理 6.1.1(3) より，$w^+$ は v^+ のスカラー倍． ■

6.1.3 存在と唯一性

各ウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，（同型を除いて）唯一の既約な最高ウエイト $\mathfrak{g}$-加群が存在する事を示す（無限次元でも成立）．唯一性の方の証明は，第 4 章 14.2 の定理の証明と似ている上に単純になっているらしい．

定理 6.1.3: 唯一性

V, W を最高ウエイト λ の最高ウエイト加群とする．V, W が共に既約ならば同型．

<u>証明</u> $\mathfrak{g}$-加群 $X = V \oplus W$ を考える．v^+, w^+ をそれぞれ V, W のウエイト λ の極大ベクトルとすると，

$$X = V \oplus W = (\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright v^+) \oplus (\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright w^+) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright (v^+, w^+)$$

より $x^+ = (v^+, w^+)$ は X のウエイト λ の極大ベクトルとなる．x^+ で生成される X の（最高ウエイト）部分加群を Y とし，$p\colon\ Y \to V$, $p'\colon\ Y \to W$ をそれぞれ X の第一，第二引数を取ってくる射影に誘導される写像とすると，

$$\begin{aligned} p(x^+) = v^+, &\quad p'(x^+) = w^+ \\ \operatorname{Im} p = V, &\quad \operatorname{Im} p' = W \end{aligned}$$

より，p, p' は共に $\mathfrak{g}$-加群の全射準同型．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p''"] \arrow[d, "p"'] & W \\ V \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

よって加群の同型定理と定理 6.1.1(5) より，V, W は最高ウエイト加群 Y の既約な商加群として同型． ■

存在について，まず，**Verma 加群**と呼ばれる最高ウエイト加群 $M(\lambda)$ を 2 通りの方法で構成する．

まずは誘導加群の方法．Borel 部分代数を $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\Delta)$ とすると，$\mathfrak{b}$-加群としての最高ウエイト加群は極大ベクトル v^+ で生成される一次元部分加群を含む．よってまずは $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を固定し，v^+ を基底に持つ一次元ベクトル空間 $\mathbb{K}_\lambda$ に対し，$\mathbb{K}_\lambda$ 上の $\mathfrak{b}$ の作用を

$$\begin{aligned} h \blacktriangleright v^+ &= \lambda(h)v^+ && (h \in \mathfrak{h}) \\ x_\alpha \blacktriangleright v^+ &= 0 && (x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+) \end{aligned}$$

と定義する．$\mathbb{K}_\lambda$ は $\mathfrak{b}$-加群となる．それと同時に $\mathbb{K}_\lambda$ は $\mathfrak{U}(\mathfrak{b})$-加群でもあるので，テンソル積

$$M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{K}_\lambda$$

を定義すると，自然な左作用

$$x \blacktriangleright (y \otimes v) = (xy) \otimes v, \quad (x, y \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}),\ v \in \mathbb{K}_\lambda)$$

により $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-加群となる．
次に $M(\lambda)$ がウエイト λ の最高ウエイト加群であることを示す．$1 \otimes v^+$ は $M(\lambda)$ を生成する．また，PBW 定理の系 5.1.5 より，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{b})$ は自由 $\mathfrak{U}(\mathfrak{b})$-加群であったから，$1 \otimes v^+$ は非零である．よって，$1 \otimes v^+$ はウエイト λ の極大ベクトルである．よって，$M(\lambda)$ を $\mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)$-加群と見ることができ，

$$M(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{K} \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)$$

となる．特に右側の同型に対応して，$1 \otimes v^+ \simeq a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)$.

次に生成系と関係式の方法で構成し，同型であることを示す．
正ルートの集合 Φ^+ および，$h_\alpha - \lambda(h_\alpha)1$ $(\alpha \in \Phi)$ で生成される左イデアルを $I(\lambda)$ とする．

$$I(\lambda) \blacktriangleright v^+ = 0$$

より，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-加群の準同型定理から，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda) \to M(\lambda)$ は $1 + I(\lambda) \mapsto 1 \otimes v^+$ となる．再び，PBW 定理の系 5.1.5 より，$\mathfrak{U}(\mathfrak{b}) + I(\lambda) \mapsto \mathbb{K}(1 \otimes v^+)$ となる．よって，この標準的射影は一対一対応であり，

$$U(\mathfrak{g})/I(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{K} \simeq M(\lambda)$$

定理 6.1.4: 既約最高ウエイト加群の存在

$\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，ウエイト λ の既約な最高ウエイト加群 $L(\lambda)$ が存在する．

証明 上で構成された $M(\lambda)$ は，ウエイト λ の最高ウエイト加群で，唯一の極大部分加群 $Y(\lambda)$ をもつ（定理 6.1.1(4)）．よって，

$$L(\lambda) = M(\lambda)/Y(\lambda)$$

はウエイト λ の既約最高ウエイト加群（定理 6.1.1(5)）． ■

ウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の既約最高ウエイト加群 $L(\lambda)$ は一意的に定まるから，$L(\lambda)$ のウエイトの集合を $\Pi(\lambda) := \Pi(V)$ と書く．

定理 6.1.5: 有限次元既約加群の構造

V を有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群とすると，

$$\exists \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad V \simeq L(\lambda)$$

証明 有限次元には，ウエイト λ の極大ベクトル v^+ の存在が保証されていた．$L(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright v^+$ は既約 $\mathfrak{g}$-加群 V の部分加群で，非零なので $V \simeq L(\lambda)$. ■

定義 6.1.4: 基本表現

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，基本ウエイト λ_i に対する表現 $\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow L(\lambda_i)$ を $\mathfrak{g}$ の**基本表現**（fundamental representation）と呼ぶ．

6.2 有限次元加群

既約（最高ウエイト）$\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda)$ が有限次元であるためのウエイト λ の条件を調べる．

6.2.1 有限次元である必要条件

各単純ルート α_i に対し，

$$\mathfrak{s}_i := \mathfrak{g}_{\alpha_i} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \oplus [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$$

とする ($\simeq$ は定理 2.5.3)．$L(\lambda)$ は有限次元 $\mathfrak{s}_i$-加群でもあり，$\mathfrak{g}$ の極大ベクトル v^+ は $\mathfrak{s}_i$ の極大ベクトルでもある．特に，$\mathfrak{s}_i$ の極大トーラス $\mathfrak{h}_i = [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}]$ に対し，$h_i \in \mathfrak{h}_i$ の作用は，固有値 $\lambda(h_i)$ で完全に決まる．その固有値が非負整数になることは既に知っている．

定理 6.2.1: ウエイトの整性の必要性

最高ウエイト λ の有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群を $L(\lambda)$，単純ルートを α_i，$h_i \in \mathfrak{h}_{\alpha_i} = [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, -\mathfrak{g}_{\alpha_i}]$ とすると，$\lambda(\mathfrak{h}_i)$ は非負整数．

証明 定理 2.4.1. ■

この定理の系 2.4.2 より，最高ウエイトでない任意の V のウエイト μ でも成り立つ:

$$\mu(h_i) = [\![\mu, \alpha_i]\!] \in \mathbb{Z}, \quad (1 \leq i \leq l)$$

これは，ルート系の整ウエイトに対応している．これを Lie 代数の**整ウエイト**と呼ぶのは自然だろう．優，強い優ウエイト[*1]，基本優ウエイトも同様に定義され，当然，ルート系の整ウエイトに対する定理は全て成り立つ．

6.2.2 有限次元である十分条件

[*1] ルート系で定義した優ウエイトについては，優かつ整と呼ぶ方が親切かもしれないが，ここでは単に優と呼ぶことにする．

定理 6.2.2: ウエイトの優性の十分性

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を優ウエイトとする．このとき，
既約 $\mathfrak{g}$-加群 $V = L(\lambda)$ は有限次元．また，V のウエイトの集合 $\Pi(\lambda)$ は，Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用によって置換され，$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$, $\forall \sigma \in \mathscr{W}$ を満たす．

系 6.2.3:

$\lambda \mapsto L(\lambda)$ は，優ウエイト Λ^* と有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群（の同型の類）の一対一対応を誘導する．

証明 優ウエイトは整ウエイトなので，有限次元であるための必要条件を満たす．定理 6.1.5 より一対一対応．■

十分条件を証明しよう．

補題 6.2.1:

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数を $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$，単純ルートを $\alpha_1, \dots, \alpha_l$，$x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} \setminus \{0\}$，$y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \setminus \{0\}, h_i = [x_i, y_i] \in \mathfrak{h}$ とすると，任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$1 \leq i, j \leq l$ に対し以下が成り立つ．

(1) $[h_j,\ y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$
(2) $[x_j,\ y_i^{k+1}] = -(k+1)y_i^k(k - h_i)\delta_{ij}$

ただし，δ_{ij} は Kronecker のデルタ．

証明 **(a)** k についての数学的帰納法．$k = 0$ は半単純 Lie 代数の関係式より明らか．ある k で成り立つとき，

$$[h_j, y_i^{k+1}] = [h_j, y_i]y_i^k + y_i[h_j, y_i^k] = -\alpha_i(h_j)y_i^{k+2} - (k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+2} = -(k+2)\alpha_i(h_j)y_i^{k+2}$$

より任意の k で成り立つ．

(b) $i \neq j$ の場合は，補題 3.2.1 より $\alpha_j - \alpha_i$ がルートでないことから従う．
$i = j$ のとき，$k = 0$ は y_i, h_i の選び方より明らか．ある k で成り立つとき，

$$[x_i, y_i^{k+1}] = [x_i, y_i]y_i^k + y_i^k[x_i, y_i] = h_i y_i^k - (k+1)y_i^{k+1}(k - h_i) = -(k+2)y_i^{k+1}(k - h_i)$$

より任意の k で成り立つ．

■

十分条件の証明のポイントは，V のウエイトが $\mathscr{W}$ で置換されることから $\Pi(\lambda)$ が有限個であることを示すことである（Serre の定理の証明同様）．

証明 g-加群 V を表現と見たい場合は ϕ とする．V のウエイト λ の極大ベクトルを v^+ とし，$m_i = \lambda(h_i)$ とする（仮定より λ は優ウエイトなので非負整数）．

Step 1: $w_i := (y_i^{m_i+1} \blacktriangleright v^+) = 0$

$x_i \blacktriangleright v^+ = 0$ と補題 6.2.1(1) に注意すると，

$$x_i \blacktriangleright w_i = y_i^{m_i+1} \blacktriangleright (x_j \blacktriangleright v^+) - (m_i+1)y_i^{m_i} \blacktriangleright (m_i - m_i)v^+ = 0$$

となる．また，補題 3.2.1 より $\alpha_j - \alpha_i$ はルートでないから $x_j \blacktriangleright w_i = 0\ (1 \leq j \leq l)$．もし $w \neq 0$ とすると，最高ウエイト $\lambda - (m_i + 1)\alpha_i \neq \lambda$ が存在することになり．既約最高ウエイト加群の最高ウエイトの唯一性に反する．

Step 2: V **に非零な有限次元** $\mathfrak{s}_i$**-加群が含まれる**

部分空間 $V_i = \{v^+,\ y_i \blacktriangleright v^+,\ \dots,\ y_i^{m_i} \blacktriangleright v^+\}$ を考える．**(Step 1)** と合わせると y_i の作用について不変．補題 6.2.1(1) より x_i, h_i の作用についても不変．よって，$\mathfrak{s}_i$-加群として，V_i は V の部分加群．

Step 3: V **は有限次元部分** $\mathfrak{s}_i$**-加群の和**

$V' = \sum_{i=1}^{l} V_i$ とする．ここで，W を V の任意の有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群とすると，$x_i \blacktriangleright W$, $y_i \blacktriangleright W$ も有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群．命題??より，任意のルート $\alpha \in \Phi$，$x_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ に対し，$x_\alpha \blacktriangleright W$ は有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群となり，W の部分空間．よって，V' は $\mathfrak{g}$-加群．

V は既約で，**(Step 2)** より $V' \subset V$ は非零だったから，$V = V'$．

Step 4: $1 \leq i \leq l$ **に対し，**$\phi(x_i)$, $\phi(y_i)$ **は** V **の局所冪零自己準同型**

補題 6.2.1，**(Step 1)** より，x_i, y_i の作用は局所冪零．Jordan 分解の保存より，$\phi(x_i)$, $\phi(y_i)$ も局所冪零．

Step 5: (Step 4) より $s_i = \exp\phi(x_i)\exp\phi(-y_i)\exp\phi(x_i)$ **は well-defined**　局所冪零の定義の後の文章参照のこと

Step 6: μ **を** V **のウエイトとすると，**$s_i(V_\mu) = V_{\sigma_i\mu}$ $(\sigma_i : \alpha_i$**に関する鏡映**$)$

(Step 3) より V_μ は有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群 $V' = V$ に含まれる．$s_i|_{V'}$ は存在しない $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の既約表現の分類の自己同型 τ で，$s_i(V_\mu) = V_{\sigma_i\mu}$ が従う．

Step 7: ウエイトの集合 $\Pi(\lambda)$ **は** $\mathscr{W}$ **の作用で不変．また，**$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ $(\forall\mu \in \Pi(\lambda),\ \forall\sigma \in \mathscr{W})$

Weyl 群 $\mathscr{W}$ は単純ルートに関する鏡映で生成されたから，**(Step 6)** より従う．

Step 8: $\Pi(\lambda)$ **は有限集合．**

補題 3.5.2 より，$\mu \prec \lambda$ を満たす優ウエイト μ の集合は有限なので，$\mathscr{W}$ で写した集合も有限．定理 6.1.1(2) より，$\Pi(\lambda)$ はこの部分集合だから，有限集合．

Step 9: V **は有限次元．**

定理 6.1.1(3) より V_μ $(\mu \in \Pi(\lambda))$ は有限次元．$\mu \in \Pi(\lambda)$ 上の和は有限和なので，定理 6.1.1(1) より V は有限次元．

■

6.2.3　ウエイト string とウエイト図

ここでも優ウエイト $\lambda \in \Lambda^+$ に対する有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群 $V = L(\lambda)$ を考える．
補題 6.1.1 より，部分加群 $W = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} V_{\mu+i\alpha} \subset V$ は S_α-不変．
$(\mu + \alpha\mathbb{Z}) \cap \Pi(\lambda)$ なる整ウエイトの集合を $\boldsymbol{\alpha}$**-string through** $\boldsymbol{\mu}$ という．$\Pi(\lambda)$ は有限集合であったから，

$$r := \max\left\{\, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; \mu - i\alpha \in \Pi(\lambda) \,\right\},$$
$$q := \max\left\{\, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; \mu + i\alpha \in \Pi(\lambda) \,\right\}$$

が定義されるので，命題 3.1.1 と同様のものが成り立つ．

命題 6.2.1: α-string through μ の性質

$\alpha \neq \pm\mu$ を充たす任意の $\alpha \in \Phi$, $\mu \in \Pi(\lambda)$ に対して

$$r \coloneqq \max\left\{\, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \mu - i\alpha \in \Pi(\lambda) \,\right\},$$
$$q \coloneqq \max\left\{\, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \mu + i\alpha \in \Pi(\lambda) \,\right\}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) α-string through μ は $\mathbb{E}$ の部分集合

$$\left\{\, \mu + i\alpha \in \mathbb{E} \,\middle|\, -r \leq \lambda \leq q \,\right\} \tag{6.2.1}$$

に等しい．i.e.

$$i \in \mathbb{Z} \text{ かつ } \mu + i\alpha \in \Pi(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad -r \leq i \leq q$$

である．

(2) $\sigma_\alpha(\mu + i\alpha) = \mu - i\alpha$．i.e. α-string through μ は鏡映 σ_α の作用の下で不変である．

(3) $r - q = [\![\mu, \alpha]\!]$．特に α-string through μ の長さは 4 以下である．

(4) 優ウエイト λ に対し，$\Pi(\lambda)$ は飽和集合．

(5) 任意のウエイト μ について

$$\mu \in \Pi(\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma(\mu) \prec \lambda \quad (\forall \sigma \in \mathscr{W})$$

__証明__ (1)-(3): 命題 3.1.1 の証明の Φ を $\Pi(\lambda)$ に，β を μ に直したもの．
(4): 以上から $\Pi(\lambda)$ は飽和集合の定義そのものを満たすと言える．
(5): 補題 3.5.1 と補題 3.5.6 を組み合わせると成り立つ． ■

ルートと $\Pi(\lambda)$ の元を書いた図を**ウエイト図** (weight diagram) と呼ぶ．あとで定義する重複度も書き込みたいので，具体例は次節に回す．

6.2.4 $L(\lambda)$ の生成系と関係式

$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to M(\lambda) \to L(\lambda)$ という準同型を λ が優ウエイトの場合にさらに考察する．
$M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda)$ であり，$I(\lambda)$ は $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の左イデアルで，$M(\lambda)$ の極大ベクトル v^+ に対し，$I(\lambda) \blacktriangleright v^+ = 0$ となるものであった．
同様に $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の左イデアルで，$L(\lambda)$ の極大ベクトルに作用すると 0 となるようなものを $J(\lambda)$ とする．
$I(\lambda) \subset J(\lambda)$ より，準同型

$$M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda) \longrightarrow L(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/J(\lambda)$$

を誘導する．また，定理 6.2.2 の証明 **(Step 1)** より，$y_i^{m_i+1} \in J(\lambda)$ である．

補題 6.2.2:

A を標数 0 の体 $\mathbb{K}$ 上の結合代数，$\operatorname{ad} y(z) = yz - zy$ $(y, z \in A)$ とすると，
$\forall y, z \in A$，$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し，以下が成り立つ．

$$(\operatorname{ad} y^k)(z) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (\operatorname{ad} y)^i(z) y^{k-i}$$

証明 $(\operatorname{ad} y^1)(z) = (\operatorname{ad} y)^1(z)$．ある k で成り立つとき，以下より $k+1$ でも成り立つ．

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} y^{k+1})(z) &= \bigl(\operatorname{ad} y(z) y^k + \operatorname{ad} y^k(\operatorname{ad} y(z))\bigr) + \operatorname{ad} y^k(z) y = \sum_{i=1}^{k+1}\left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right)(\operatorname{ad} y)^i(z) y^{k+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}(\operatorname{ad} y)^i(z) y^{k+1-i}\end{aligned}$$

■

定理 6.2.4: $J(\lambda)$ の生成系

$\lambda \in \Lambda^+$，$m_i = [\![\lambda, \alpha_i]\!]$ $(1 \leq i \leq l)$ とすると，$J(\lambda)$ は $I(\lambda)$ と $y_i^{m_i+1}$ $(1 \leq i \leq l)$ で生成される．

証明 $I(\lambda)$ と $y_i^{m_i+1}$ $(1 \leq i \leq l)$ で生成されるイデアルを $J'(\lambda)$ とする．まず，$L'(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/J'(\lambda)$ が有限次元であることを示す．
$I(\lambda) \subset J'(\lambda)$ より，$L'(\lambda)$ は $M(\lambda)$ の極大ベクトルに関する最高ウエイト加群．定理 6.2.2 の証明 **(Step 3)**「有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群の和」を示せば，**(Step 4)** 以降はそのまま使えて $L'(\lambda)$ は有限次元となる．その **(Step 3)** の証明の中でも，x_i，y_i が $L'(\lambda)$ 上局所冪零であることを示せば，有限次元となる．
x_i^k はウエイトを $k\alpha_i$ 増やすので，ある k で最高ウエイトを越えるため局所冪零．y_i^k については，まず定理 6.1.1(1) より，

$$V'(\lambda) = \operatorname{Span}\bigl\{y_{i_1} \cdots y_{i_t} \bigm| 0 \leq i_j \leq l,\ t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\bigr\}$$

である．ここで，補題 6.2.2 を $A = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ に対して考えると α-string の長さは高々 4 だから，和は $i = 3$ で止まる．つまり，$[y^{k+3}, z] = (\text{多項式}) \times y_i^k$．よって，

$$y_i^k y_{i_1} \cdots y_{i_t} \in J'(\lambda) \quad\Longrightarrow\quad y_i^{k+3} y_{i_0} y_{i_1} \cdots y_{i_t} \in J'(\lambda)$$

となる．$J'(\lambda)$ の定義より $y_i^{m_i+1} \in J'(\lambda)$ だから，単項式の長さ t に関する帰納法より，y_i は局所冪零．

よって，$L'(\lambda)$ は有限次元最高ウエイト加群（または 0）なので，定理 6.1.1(5) より直既約で，完全可約性に関する Weyl の定理より既約（または 0）．一方定義より $J'(\lambda) \subset J(\lambda)$ なので，$L(\lambda) \subset L'(\lambda)$（より 0 でない）．同型でないと，$L'(\lambda)$ の既約性に矛盾するから，

$$L(\lambda) \simeq L'(\lambda) \quad\Longleftrightarrow\quad J(\lambda) \simeq J'(\lambda)$$

■

6.3 重複度公式

この節では有限次元加群を考える．

定義 6.3.1: ウエイトの重複度

$\mu \in \mathfrak{h}^*$ を整ウエイト，$\lambda \in \Lambda^+$ を優ウエイトとする．有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda)$ に対し，ウエイト μ のウエイト空間の次元

$$m_\lambda(\mu) \coloneqq \dim L(\lambda)_\mu$$

のことを $L(\lambda)$ における μ の**重複度** (multiplicity) と呼ぶ（$L(\lambda)$ のウエイトでなければ 0 とする）．

目標は，ウエイトの重複度 $m_\lambda(\mu)$ に対する再帰的公式である，Freudenthal の公式を示すこと．

6.3.1 普遍 Casimir 演算子

完全可約性に関する Weyl の定理の証明で出てきた，半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 ϕ に対して定義された Casimir 演算子 $c_\phi = c_\phi(\beta)$ を思い出そう．これを普遍包絡代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の表現 ϕ に対する演算子と見ると，

$$\begin{aligned} c_\phi &\coloneqq \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\phi(e^\mu) = \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu e^\mu) \\ &= \phi(c_\mathfrak{g}(\beta)) \quad \left(c_\mathfrak{g}(\beta) \coloneqq \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} e_\mu e^\mu \right) \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

と書ける．$c_\mathfrak{g}(\beta)$ は陽に ϕ に依存していない[*2]．そこで ϕ として $\mathfrak{g}$ の随伴表現を考える．その跡形式を Killing 形式 κ と呼んでいた．半単純 Lie 代数の Killing 形式は非退化であったから，κ に関する双対基底（ここでも補題 2.3.4 のように，$\mathfrak{g}^*$ の基底ではなく $\mathfrak{g}$ の基底）を構成できる．
命題 2.5.1 より，α，$\beta \in \mathfrak{h}^*$ に対し，$\alpha \neq -\beta$ であれば $\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_\beta$ は直交する．よって，$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ 及び $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ それぞれで Killing 形式を考えれば良い．
まず，$\{x_\alpha \in \mathfrak{g}\ (\forall \alpha \in \Phi)\}$ と単純ルート α_i に対する $\{h_i = [x_{\alpha_i}, x_{-\alpha_i}]\ (1 \le i \le l)\}$ で $\mathfrak{g}$ の基底を張る．
κ に関する双対をそれぞれ x^α，h^i とすると，命題 2.5.3 より $x^\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ で，

$$[x_\alpha, x^\alpha] = t_\alpha = \frac{(\alpha, \alpha)}{2} h_\alpha$$

となる．このときの (6.3.1) で定義した $c_\mathfrak{g}(\beta) = c_\mathfrak{g}(\kappa)$ に注目する．

[*2] $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(\phi(x)\phi(y))$ としていたので陰に依存している

定義 6.3.2: 普遍 Casimir 演算子

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数を $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$，極大トーラス $\mathfrak{h}$ の基底を $\{h_i\}_{i=1}^{l}$，$x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$，$h_i, x_\alpha$ を Killing 形式 κ に関して双対をとったものをそれぞれ h^i, x^α とする．

$$c_{\mathfrak{g}} := \sum_{i=1}^{l} h_i h^i + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha x^\alpha \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$$

を（Killing 形式に関する）**普遍 Casimir 演算子** (universal Casimir operator) と呼ぶ.

縮約をとっているので，$c_{\mathfrak{g}}$ は基底によらない．命題 2.3.2 より $c_\phi(\kappa) = \phi(c_{\mathfrak{g}})$ と $\phi(\mathfrak{g})$ は可換なので，ϕ が既約なら $\phi(c_{\mathfrak{g}})$ はスカラーとして作用する．
c_ϕ と $\phi(c_{\mathfrak{g}})$ の関係を調べる．そのために ϕ の跡形式 $\beta(x,y) = \mathrm{Tr}(\phi(x)\phi(y))$ と κ の関係を調べる．

補題 6.3.1: 単純 Lie 代数の非退化対称結合双線型形式の同型性

$\mathfrak{g}$ を単純 Lie 代数とし，$f(x,y)$，$g(x,y)$ を $\mathfrak{g}$ 上の非退化で対称な双線型形式とし，$\beta = f, g$ について

$$\beta(x, [y,z]) = \beta([x,y], z) \tag{6.3.2}$$

を満たすとすると，

$$\exists a \in \mathbb{K}, \quad f = ag$$

<u>証明</u> 各非退化双線型形式 f, g で定まる同型 $\pi_f, \pi_g \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$，$x \mapsto s_f, s_g$ を

$$s_f(y) = f(x,y), \quad s_g(y) = g(x,y)$$

で定義する．$\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{gl}(\mathbb{K})$ を返す $\mathfrak{g}$-加群と見れる．$\mathbb{K}$ は 1 次元線型空間なので，(6.3.2) より，$\{s_f\}, \{s_g\}$ は $\mathfrak{g}$-加群として同型.
よって，$\mathfrak{g}$-加群 $\pi_g^{-1} \circ \pi_f \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ 上の同型写像．$\mathfrak{g}$ は単純なので，既約 $\mathfrak{g}$-加群となり，代数閉体上の Schur の補題より $\pi_f^{-1}\pi_g$ はスカラー倍．i.e.

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \exists a \in \mathbb{K}, \quad \pi_g^{-1} \circ \pi_f(x) = ax \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \mathfrak{g},\ f(x,y) = g(ax,y)$$

となり，g の双線型性より $f = ag$. ■

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の非零の忠実な表現を ϕ とする．$\mathrm{Ker}\,\phi \subsetneq \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルとなる．
$\mathfrak{g}$ が単純のとき，$\mathrm{Ker}\,\phi = \{0\}$ だから，$\beta(x,y) := \mathrm{Tr}(\phi(x)\phi(y))$ は非退化で (6.3.2) を満たす．$\phi = \mathrm{ad}$ の場合の Killing 形式 κ も含まれるから，補題 6.3.1 より，$\kappa = a\beta$ $(a \in \mathbb{K} \setminus \{0\})$ と書ける．β に関する双対ベクトルは，κ に関する双対ベクトルの $1/a$ 倍となるから，(6.3.1) より，

$$c_\phi(\kappa) = \phi(c_{\mathfrak{g}}) = \phi(c_{\mathfrak{g}}(a\beta)) = \frac{1}{a}\phi(c_{\mathfrak{g}}(\beta)) = \frac{1}{a}c_\phi$$

次に，$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数のとき．$\mathfrak{g}$ は単純 Lie 代数 g_i $(1 \le i \le t)$ の直和

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{g}_i$$

で書ける．基底は各 $\mathfrak{g}_i$ の基底の和集合にとれるので，$\mathfrak{g}$ の普遍 Casimir 演算子は，$\mathfrak{g}_i$ の普遍 Casimir 演算子 $c_{\mathfrak{g}_i}$ の和で

$$c_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{t} c_{\mathfrak{g}_i}$$

と書ける．定理 2.2.2 より，各 $\mathfrak{g}_i$ の Killing 形式は $\kappa|_{\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i}$ に等しい．よって，

$$\phi(c_{\mathfrak{g}_i}) = \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{a_i} c_{\phi|_{\mathfrak{g}_i}} \quad (a_i \in \mathbb{K})$$

と書ける．次に，この a_i の値の求め方を示す．

6.3.2 Freudenthal の公式

V のウエイト $\mu \in \Pi(\lambda)$ に対するウエイト空間 V_μ に対し，$\phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha)$ は $V_\mu \longrightarrow V_{\mu-\alpha} \longrightarrow V_\mu$ より V_μ 上の線型変換なので，$\phi(c_{\mathfrak{g}})|_{V_\mu}$ は V_μ 上の線型変換と見ることができる．ここで，V_μ 上の跡を調べる．

補題 6.3.2: ウエイト空間上の既約表現の跡形式

優ウエイト $\lambda \in \Lambda^+$ の既約な $\mathfrak{g}$-加群を $V = L(\lambda)$（表現と見たものを ϕ と書く），V のウエイトを $\mu \in \Lambda$，その重複度を $m(\mu)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(c_{\mathfrak{g}}) &= (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha) \\ &= (\mu, \mu + 2\delta)m(\mu) + 2 \sum_{\alpha \succ 0} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)\end{aligned}$$

を満たす．

証明 $\mu \in \Lambda \setminus \Pi(\lambda)$ の場合は $V_\mu = 0$ より成立．以下，$\mu \in \Pi(\lambda)$ を考える．
上述のように，$\mathfrak{h}$ の基底 $\{h_i\}_{i=1}^{l}$，$\mathfrak{g}_\alpha$ の基底 $\{x_\alpha\}$ を固定し，Killing 形式 κ に関する双対基底を取る．
$\mu \in \Pi(\lambda)$ として，V_μ 上の $x_\alpha x^\alpha$，$h_i h^i$ の作用を直接見て，その和を調べる．

$(x_\alpha x^\alpha)$ $\mu + \alpha \notin \Pi(\lambda)$ とすると，α-string through μ は $\{\mu,\ \mu - \alpha,\ \ldots,\ \mu - r\alpha\}$ $(r = [\![\mu, \alpha]\!])$ となる．完全可約性に関する Weyl の定理より，ウエイト空間の直和

$$W := V_\mu \oplus \cdots \oplus V_{\mu - r\alpha}$$

はある既約 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群の直和で表せる．$w_0 \in V_\mu$ を $\mathfrak{s}_\alpha$-加群としての極大ベクトルとすると，

$$w_i := \begin{cases} 0 & (i = -1) \\ \dfrac{(\alpha, \alpha)^i}{2^i} y^i \blacktriangleright w_0 & (i \geq 0) \end{cases}$$

に対し，$x^\alpha = \frac{(\alpha,\alpha)}{2} y_\alpha$，$t_\alpha = \frac{(\alpha,\alpha)}{2} h_\alpha$ と補題 2.4.2 より，

(1) $t_\alpha \blacktriangleright w_i = (r - 2i)\frac{(\alpha,\alpha)}{2} w_i$

(2) $x^\alpha \blacktriangleright w_i = w_{i+1}$

(3) $x_\alpha \blacktriangleright w_i = i(r-i+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2}w_{i-1}$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i \geq 0$

を満たす．特に，$w_m \in V_{\mu-m\alpha}$．よって，

$$x_\alpha x^\alpha \blacktriangleright w_i = (r-i)(i+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2}w_i \tag{6.3.3}$$

鏡映 $\sigma_\alpha \in \mathscr{W}$ に対し，$\sigma_\alpha(\mu - i\alpha) = \mu + (r-i)\alpha$ と定理 6.2.2 より，

$$m(\mu - i\alpha) = m(\mu - (r-i)\alpha) \quad (0 \leq i \leq r)$$

となる．最高ウエイト $r - 2i = (\mu - i\alpha)(h_\alpha)$ をもつベクトルの数を n_i $(0 \leq i \leq r/2)$ とすると，

$$m(\mu - i\alpha) = \sum_{j=0}^{i} n_i \quad \Longrightarrow \quad n_i = m(\mu - i\alpha) - m(\mu - (i-1)\alpha)$$

となる．$0 \leq j \leq i \leq r$ とする．最高ウエイト $r-2j$ のウエイト空間は，(6.3.3) の $r \mapsto r-2j$, $i \mapsto j-i$ より，

$$\phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha)w_{i-j} = (r-j-i)(i-j+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2}w_{i-j}$$

よって $0 \leq i \leq r/2$ に対しては，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{V_{\mu-i\alpha}}\,\phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha) &= \sum_{j=0}^{i} n_j(r-j-i)(i-j+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{i} (m(\mu-j\alpha) - m(\mu-(j-1)\alpha))(r-j-i)(i-j+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{i} m(\mu-j\alpha)((r-j-i)(i-j+1) - (r-j-i-1)(i-j))\frac{(\alpha,\alpha)}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{i} m(\mu-j\alpha)(r-2j)\frac{(\alpha,\alpha)}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{i} m(\mu-j\alpha)((\mu,\alpha) - j(\alpha,\alpha)) \quad \left(r = [\![\mu,\alpha]\!] = 2\frac{(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{i} m(\mu-j\alpha)(\mu-j\alpha,\alpha) \quad \left(0 \leq i \leq \frac{r}{2}\right)
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

となる．$r/2 \leq i \leq r$ の場合は和が $r-i$ までになるだけ．ただし，$\phi(x^\alpha)w_{i-(r-i)} = 0$ だから，

$$\mathrm{Tr}_{V_{\mu-i\alpha}}\,\phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha) = \sum_{j=0}^{r-i-1} m(\mu-j\alpha)(\mu-j\alpha,\alpha) \quad \left(\frac{r}{2} < i \leq r\right) \tag{6.3.5}$$

となる．ここで，$m(\mu - j\alpha) = m(\mu-(r-j)\alpha)$ より，

$$\begin{aligned}
m(\mu-j\alpha)(\mu-j\alpha,\alpha) + m(\mu-(r-j)\alpha)(\mu-(r-j)\alpha,\alpha) &= m(\mu-j\alpha)(2\mu-r\alpha,\alpha) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

なので，(6.3.4) を $i \geq r/2$ で考えた際の $r-i,\dots,i$ の項の部分和は 0[*3]となり，(6.3.5) に等しい．i.e. (6.3.4) は任意の $i = 0,\dots,r$ で成り立つ．

[*3] $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ より，$j = r/2$ の項も 0.

任意の $\nu \in \Pi(\lambda)$ は，$\nu + j\alpha = \mu$ の形にできる．$m(\nu + (j+i)\alpha) = 0$ $(i > 0)$ より，

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha) \quad (\mu \in \Pi(\lambda))$$

$(h_i h^i)$ $\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化だったから，

$$\exists t_\mu \in \mathfrak{h},\ \forall h \in \mathfrak{h}, \quad \mu(h) = \kappa(t_\mu, h)$$

を満たす．特に，$t_\mu = \kappa(t_\mu, h^i)h_i = \mu(h^i)h_i$ である．よって，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l} \mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(h_i)\phi(h^i) &= m(\mu)\sum_{i=1}^{l} \mu(h_i)\mu(h^i) = m(\mu)\sum_{i,j=1}^{l} \mu(h^j)\kappa(h_j, h_i)\mu(h^i) \\ &= m(\mu)\kappa(t_\mu, t_\mu) = m(\mu)(\mu, \mu)\end{aligned}$$

以上より，

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(c_\mathfrak{g}) = (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

ここで，(6.3.6) の $j \in \mathbb{Z}_{\geq r/2}$ の和をとると，

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha) = 0$$

となるから，$\alpha \prec 0$ に対する $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の和を $i < 0$ で書き直すと，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(c_\mathfrak{g}) &= (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{\alpha\succ 0} m(\mu)(\mu, \alpha) + 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha) \\ &= (\mu, \mu + 2\delta)m(\mu) + 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)\end{aligned}$$

となる（$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\succ 0}\alpha$）． ■

定理 6.3.1: Freudenthal の公式

最高ウエイト $\lambda \in \Lambda^+$ の非零で忠実な既約 $\mathfrak{g}$-加群を $L(\lambda)$，整ウエイト $\mu \in \Lambda$ の重複度を $m(\lambda)$ とすると，以下を満たす．

$$\big((\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta)\big)m(\mu) = 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

証明 補題 6.3.2 の証明の続き．まず，命題 2.3.2 より $\phi(c_\mathfrak{g})$ はスカラー倍だったから，

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(c_\mathfrak{g}) = \phi(c_\mathfrak{g})m(\mu)$$

となる．ここで，

$$(\mu, \mu + 2\delta) = (\mu + \delta, \mu + \delta) - (\delta, \delta)$$

であり，$\mu = \lambda$ のときのこれは $\phi(c_\mathfrak{g})$（の固有値）に等しいから，Freudenthal の公式が成り立つ． ■

λ が最高ウエイトで，$m(\lambda) = 1$ だったから，この公式から $m(\mu)$ を一意的に求めることが可能．

6.3.3　具体例

6.3.4　代数的指標

定義 6.3.3: 群環

G を群，R を環とする．G で生成される自由 R-加群 $R[G]$ に対し，その積を R-係数の畳み込み

$$\left(\sum_{g\in G} a(g)g\right)\left(\sum_{h\in G} b(h)h\right) := \sum_{g,h\in G} a(g)b(h)(gh) = \sum_{g\in G} a*b(g)g \quad \left(a*b(g) := \sum_{h\in G} a(h)b(h^{-1}g)\right)$$

で定めた（G の和は実際は有限和なので well-defined）R 上の代数を**群環** (group ring) と呼ぶ．

ウエイト格子 $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ は基本ウエイトで生成される $\mathbb{Z}$-加群だったので，スカラー倍の構造を忘れば加法群となる．よって，$\{e^\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ で生成される群環 $Z[\Lambda]$ が定義される（生成系を別の文字にしたのは，$Z[\Lambda]$ の和 $+$ と Λ の積 $+$ を区別するため．$e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$）．
また $Z[\Lambda]$ 上の Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用を

$$\sigma e^\lambda = e^{\sigma\lambda} \ (\sigma \in \mathscr{W})$$

で定義する．一般の有限次元 $\mathfrak{g}$-加群 V は，補題 6.1.1 よりウエイト空間の直和で書けるから，V のウエイトの集合 $\Pi(V)$ は有限集合．これに注意して指標を定義する．

定義 6.3.4: 代数的指標

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のウエイト格子を $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$，有限次元 $\mathfrak{g}$-加群を V，ウエイト $\mu \in \Pi(V)$ の重複度を $m_\lambda(\mu)$ とする．群環 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ の元

$$\mathrm{ch}_V := \sum_{\mu\in\Pi(V)} m_\lambda(\mu)e^\mu = \sum_{\mu\in\Lambda} m_\lambda(\mu)e^\mu$$

を**代数的指標** (algebraic character) や**形式的指標** (formal character)，または単に**指標**と呼ぶ．
特に既約加群 $L(\lambda)$ に対しては，$\mathrm{ch}_{L(\lambda)} = \mathrm{ch}_\lambda$ とも書く．

補題 6.3.3: 既約最高ウエイト加群の指標の $\mathscr{W}$-不変性

ch_λ は Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用の下で不変．

<u>証明</u>　定理??より，$m_\lambda(\mu) = m_\lambda(\mathscr{W}\mu)$ なので $\mathscr{W}$-不変．■

有限次元加群 V について，完全可約性に関する Weyl の定理より，直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^t L(\lambda_i)$ に対し，

$$\mathrm{ch}_V = \sum_{i=1}^t \mathrm{ch}_{\lambda_i}$$

と書ける．よって $\{\mathrm{ch}_\lambda\}$ が線型独立であれば，加群の直和と代数的指標の和が一対一に対応する．
また補題 6.3.3 より，ch_V も $\mathscr{W}$ の作用の下で不変．
よって線型独立性と，$\mathscr{W}$-不変性が有限次元加群の代数的指標となる必要十分条件であることを示そう．

命題 6.3.1: 有限次元加群の代数的指標，代数的指標の和

不変式 $\mathbb{Z}[\Lambda]^{\mathscr{W}}$ は $\{\mathrm{ch}_\lambda \,|\lambda \in \Lambda^+\}$ で生成される．
i.e. $f \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ が Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用の下で不変とすると，f は ch_λ $(\lambda \in \Lambda^+)$ の $\mathbb{Z}$-係数線型結合で一意的に書ける．特に，

$$\mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\mu \in \mathscr{W}\lambda} e^\mu$$

証明（存在）$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) e^\lambda$ $(c(\lambda) \in \mathbb{Z})$ と書くと，$\mathscr{W}$ の作用で不変だから，

$$f = \sum_{\lambda \in \Pi} c(\lambda) \sum_{\mu \in \mathscr{W}\lambda} e^\mu \quad \left(\Pi = \{\lambda \in \Lambda^+ \mid c(\lambda) \neq 0\}\right)$$

と書ける．$M_f = \bigcup_{\lambda \in \Pi} \{\mu \in \Lambda^+ | \mu \prec \lambda\}$ とすると，補題 3.5.2 より有限集合．
ここで，$\lambda \in M_f$ が極大のとき，補題 6.3.3 より，$f' = f - c(\lambda)\,\mathrm{ch}_\lambda$ も $\mathscr{W}$ の作用の下で不変．$L(\lambda)$ のウエイトの集合 $\Pi(\lambda)$ は飽和集合だから，$\mu \prec \lambda$ なる優ウエイトを全て含み，かつ $\lambda \notin M_{f'}$ より，$M_{f'} \subsetneq M_f$．
よって，$|M_f|$ についての帰納法で，$|M'_f| = 0$ になるまでこれを繰り返せば，$\mathscr{W}$-不変性より $f' = 0$ になる．特に $|M_f| = 1$ の場合，

$$f = c(\lambda) \sum_{\mu \in \mathscr{W}\lambda} e^\mu$$

であり，$f = \mathrm{ch}_\lambda$ のとき，最高ウエイト加群のウエイト空間の重複度は 1 だから，$c(\lambda) = 1$．
（一意性）$f = \sum_{\lambda \in \Pi} c(\lambda)\,\mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\lambda' \in \Pi'} c'(\lambda')\,\mathrm{ch}_{\lambda'}$ $\left(0 \notin c(\Pi), c'(\Pi')\right)$ と書けたとする．
$\lambda \in \Pi$ のうち，極大なものを λ_0 とすると，$\lambda_0 \prec \lambda'_0$ を満たす $\lambda'_0 \in \Pi'$ が存在する．すると，$\lambda'_0 \prec \lambda$ となる $\lambda \in \Pi$ が存在するが，それは λ_0 しかないから，

$$\lambda_0 \prec \lambda'_0 \prec \lambda_0 \iff \lambda_0 = \lambda'_0$$

次に，$f - c(\lambda_0)\,\mathrm{ch}_{\lambda_0}$ を考えると，同様の議論から，$c(\lambda_0) - c'(\lambda'_0) = 0$ となる．これを繰り返せば，$\Pi = \Pi', c = c'$ が言えるので，f の展開は一意．

■

次に代数的指標の積の性質を確認しよう．

命題 6.3.2: 代数的指標の積

V, W を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とすると，

$$\mathrm{ch}_{V \otimes W} = \mathrm{ch}_V\,\mathrm{ch}_W$$

証明 $\mathfrak{g}$-加群のテンソル積の定義より，ウエイト空間どうしのテンソル積 $V_\mu \otimes W_\nu$ はウエイト $\mu + \nu$ のウエイト空間．つまり，

$$m_{V \otimes W}(\mu + \nu) = \sum_{\pi + \pi' = \mu + \nu} m_V(\pi) m_W(\pi')$$

となる．右辺は $\mathrm{ch}_V\,\mathrm{ch}_W$ の $e^{\mu+\nu}$ の係数に等しい． ■

特に，V, W の最高ウエイトをそれぞれ λ_V, λ_W とすると，$\mathfrak{g}$-加群 $V \otimes W$ の既約分解には，$L(\lambda_V + \lambda_W)$ が含まれる．

6.4 指標

6.4.1 不変式論

定義 6.4.1: 多項式函数環

体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間 V に対し，V^* に対する対称代数

$$\mathbb{K}[V] \coloneqq S(V^*)$$

を V 上の**多項式函数環** (ring of polynomial functions) と呼ぶ．

V を有限次元とし，V^* の基底を $(f^1, \dots, f^n)$ と取ると，$\mathbb{K}[V]$ は n 変数多項式代数 $\mathbb{K}[f^1, \dots, f^n]$ と同型である．
ウエイト格子 Λ は $\mathfrak{h}^*$ を張るから，$\lambda \in \Lambda$ の多項式は $\mathbb{K}[\mathfrak{h}]$ を張る．

定義 6.4.2: 誘導される多項式函数環の加群

群を G，体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間を V とする．V が G-加群のとき，V^* 上の G-加群が

$$(g \blacktriangleright f)(v) \coloneqq f(g^{-1} \blacktriangleright v) \quad (\forall v \in V,\ g \in G,\ f \in V^*)$$

により定義される．
また，V^* が G-加群の（または誘導された）とき，多項式函数環 $\mathbb{K}[V]$ 上の G-加群が

$$g \blacktriangleright (f_1 \cdots f_n) \coloneqq (g \blacktriangleright f_1) \cdots (g \blacktriangleright f_n)$$

を線型に拡張としたものとして定義される．

定義 6.4.3: 不変式

G を群，体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間を V とする．$\mathbb{K}[V]$ が（定義 6.4.2 により誘導された）G-加群のとき，この作用で不変な集合

$$\mathbb{K}[V]^G \coloneqq \left\{ f \in \mathbb{K}[V] \;\middle|\; G \blacktriangleright f = f \right\}$$

は $\mathbb{K}$-可換結合代数をなす．これを V 上の **G-不変多項式** (G-invariant polynomials on V) あるいは単に**不変式** (invariants) と呼ぶ．

$\mathbb{K}[V]^G$ が G の作用で閉じていることを具体的に示すと以下（$g \in G, \lambda \in \mathbb{K},\ f_1, f_2 \in \mathbb{K}[V]^G$）：

$$\begin{aligned} g \blacktriangleright (f_1 + f_2) &= g \blacktriangleright f_1 + g \blacktriangleright f_2 = f_1 + f_2 \\ g \blacktriangleright (\lambda f_1) &= \lambda (g \blacktriangleright f_1) = \lambda f_1 \\ g \blacktriangleright (f_1 f_2) &= (g \blacktriangleright f_1)(g \blacktriangleright f_2) = f_1 f_2 \end{aligned}$$

Weyl 群 $\mathscr{W}$ は $\mathfrak{h}^*$ に作用するから，$\mathscr{W}$-不変式 $\mathbb{K}[\mathfrak{h}]^{\mathscr{W}}$ が定義される．また，$\mathfrak{g}$ の内部自己同型 $\operatorname{Inn} \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ に作用するから，$\operatorname{Inn} \mathfrak{g}$-不変式 $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn} \mathfrak{g}}$ が定義される．

定義 6.4.4: 余不変式

G を群，体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間を V とする．多項式代数 $\mathbb{K}[V]$ が（定義 6.4.2 により誘導された）G-加群のとき，軌道空間

$$\mathbb{K}[V]_G := \mathbb{K}[V]/G$$

は $\mathbb{K}$-可換結合代数をなす．これを V 上の G-**余不変多項式** (G-coinvariant polynomials on V) あるいは単に**余不変式** (coinvariants) と呼ぶ．

定理 6.4.1: 有限群上の不変式と余不変式の同型性

有限群上の不変式と余不変式は同型．

<u>証明</u>

$$p_G \colon \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[V], \quad x \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}(g \blacktriangleright x)$$

は不変式 $\mathbb{K}[V]^G$ への（代数の）射影．よって，$\mathbb{K}[V]^G$ はある商代数と同型だが，

$$p_G(x) = p_G(y) \iff \exists g \in G,\ x = g \blacktriangleright y \quad (x, y \in \mathbb{K}[V])$$

より $\mathbb{K}[V]^G$ と $\mathbb{K}[V]_G$ は同型． ■

ϕ を $\mathfrak{g}$ の表現とする．$\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}}$ の元として，**跡多項式** (trace polynomial)

$$t \colon x \mapsto \operatorname{Tr}\bigl(\phi(x)^k\bigr) \quad (x \in \mathfrak{g})$$

があることを見よう．まず $\operatorname{tr} \circ \phi$ は線型なので，$\operatorname{tr} \circ \phi \in \mathfrak{g}^*$．

テンソル積と Hom の同型より $\operatorname{End}(V) \simeq V^* \otimes V$ なので，$\operatorname{Tr}\colon \operatorname{End}(V) \longrightarrow \mathbb{K}$ は

$$V^* \otimes V \longrightarrow \operatorname{End}(V), \quad h \otimes v \mapsto (w \mapsto h(w)v)$$

$\operatorname{Tr}(h \otimes v) = h(v)$．

より，$t \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]$ となる．

内部自己同型 τ_α $(\alpha \in \Phi)$ に対し，$\tau_\alpha|_{\mathfrak{h}} = \sigma_\alpha \in \mathscr{W}$ であり，σ_α は $\mathscr{W}$ を生成した．

よって射影 $\mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ を多項式函数へ拡張したものを $p\colon \mathbb{K}[\mathfrak{g}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathfrak{h}]$ とすると，p は不変式の代数準同型

$$\theta \colon \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathbb{K}[\mathfrak{h}]^{\mathscr{W}}$$

を誘導する．

定理 6.4.2: Chevalley の制限定理

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ をその極大トーラス，$\mathscr{W}$ を Weyl 群とする．不変式の代数準同型

$$\theta \colon \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathbb{K}[\mathfrak{h}]^{\mathscr{W}}$$

は同型．

<u>証明</u> (Steinberg)

全射性　$p_{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}}(\lambda^k)$ $(\lambda \in \Lambda^+,\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を考えれば良い．基本ウエイト

単射性　省略

■

跡多項式の集合を $T \subset \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}}$ とする．Chevalley の制限定理の証明より，$\theta|_T$ は全単射となる．つまり，次の定理が成り立つ．

定理 6.4.3: $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}}$ の構造

$\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}}$ は跡多項式で生成される．

6.4.2　最高ウエイト加群と指標

普遍包絡代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の中心を $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$ とする．$\mathfrak{g}$ の自己同型 $\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の自己同型に一意的に拡張される．

定理 6.4.4:

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ をその普遍包絡代数，$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ をその中心とすると，

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$$

<u>証明</u>　$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ は中心だから，

$$0 = [x, \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})] = \mathrm{ad}\,x(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})) \quad \Longrightarrow \quad \exp \mathrm{ad}\,x(z) = z \quad (\forall z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$$

つまり，任意の $\sigma \in \mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}$ に対し $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ は σ-不変だから，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}} \supset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.
逆の包含を示す．$x_\alpha \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ を固定する．$(\mathrm{ad}\,x_\alpha)^t \neq 0$，$(\mathrm{ad}\,x_\alpha)^{t+1} = 0$ とする．
今，体 $\mathbb{K}$ は無限集合だったから，異なるスカラー $a_1, \ldots, a_{t+1}$ を選べる．このとき，仮定より $\exp \mathrm{ad}\,a_i x_\alpha = \exp(a_i \,\mathrm{ad}\,x_\alpha)$ も x を固定する．ここで，Vandermonde 行列式について，

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \frac{a_1^2}{2!} & \cdots & \frac{a_1^t}{t!} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{t+1} & \frac{a_{t+1}^2}{2!} & \cdots & \frac{a_{t+1}^t}{t!} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{t+1} \frac{1}{k!} \prod_{1 \leq i < j \leq t+1} (a_j - a_i) \neq 0$$

だから，$\mathrm{Span}\{\exp(a_i \,\mathrm{ad}\,x_\alpha)\} = \mathrm{Span}\{1, \mathrm{ad}\,x_\alpha, \ldots (\mathrm{ad}\,x_\alpha)^t\}$．よって，

$$\exists b_i \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{ad}\,x_\alpha = \sum_{i=1}^{t+1} b_i \exp(a_i \,\mathrm{ad}\,x_\alpha) = \sum_{i=1}^{t+1} b_i \exp(\mathrm{ad}(a_i x_\alpha)) = \sum_{i=0}^{t+1} b_i$$

と書ける．$\mathrm{ad}\,x_\alpha$ が冪零だから $\sum_{i=1}^{t+1} b_i = 0$ となり，$\mathrm{ad}\,x_\alpha(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}}) = 0$．ところで，$x_\alpha$ は $\mathfrak{g}$ を生成するから，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. ■

ここで，任意のウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対する Verma 加群 $M(\lambda)$ を考える．$h \in \mathfrak{h}$ とすると，ウエイト λ の極大

ベクトル v^+ に対し，

$$h \blacktriangleright z \blacktriangleright v^+ = z \blacktriangleright h \blacktriangleright v^+ = \lambda(h) z \blacktriangleright v^+ \quad (z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$$
$$\mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright z \blacktriangleright v^+ = z \blacktriangleright \mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright v^+ = 0 \quad (\alpha \in \Phi^+)$$

となるから，$z \blacktriangleright v^+$ は最高ウエイト λ の極大ベクトル．定理 6.1.1 より最高ウエイトの重複度 $m(\lambda)$ は 1 だから，$z \blacktriangleright v^+ = \chi_\lambda(z) v^+$ と書ける．

定義 6.4.5: 指標

最高ウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の Verma 加群に対し，極大ベクトルに作用したときの固有値を返す $\mathbb{K}$-代数の準同型

$$\chi_\lambda \colon \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad z \mapsto \chi_\lambda(z)$$

を λ の**指標** (character) と呼ぶ．

$\forall x \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ に対し，$x \blacktriangleright v^+$ は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ の固有ベクトル．$M(\lambda)$ は最高ウエイト加群だったから，$M(\lambda)$ の全体が $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ の作用で不変．よって，任意の $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ の作用で不変で，同じ指標 χ_λ をもつ．

命題 6.4.1:

整ウエイト $\lambda \in \Lambda$，単純ルート $\alpha \in \Delta$，整数 $m = [\![\lambda, \alpha]\!]$ に対し，$m \geq 0$ のとき，
$y_\alpha^{m+1} + I(\lambda)$ ($M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda)$) はウエイト $\lambda - (m+1)\alpha$ の極大ベクトル．

証明 $h_\alpha - [\![\lambda, \alpha]\!] \in I(\lambda)$ なので，補題 6.2.1 より従う． ■

ウエイト $\lambda - ([\![\lambda, \mu]\!] + 1)\alpha$ の極大ベクトルで生成される最高ウエイト加群は $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群．指標の定義の直後の議論よりこの命題 6.4.1 の系として以下が成り立つ．

系 6.4.5:

$[\![\lambda, \alpha]\!] \geq 0$ のとき，$\mu = \lambda - ([\![\lambda, \alpha]\!] + 1)\alpha$ とすると，$\chi_\mu = \chi_\lambda$．

極大トーラス $\mathfrak{h}$ と Weyl 群 $\mathscr{W}$ に対し，軌道空間 $\mathfrak{h}^*/\mathscr{W}$ は同値類であった．よって，$(\mathfrak{h}^* + \delta)/\mathscr{W}$ も同値類となる．

系 6.4.6:

任意の整ウエイト $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し，

$$\mathscr{W}(\mu + \delta) = \mathscr{W}(\lambda + \delta) \quad \Longrightarrow \quad \chi_\lambda = \chi_\mu$$

証明 $\mathscr{W} = \langle \sigma_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle$ だから，$\mu = \sigma_\alpha(\lambda + \delta) - \delta$ の場合を示せば良い．系 3.2.3 と σ_α の定義より，

$$\mu = \sigma_\alpha \lambda - \alpha = \lambda - ([\![\lambda, \alpha]\!] + 1)\alpha$$

となる．λ は整ウエイトだから，$[\![\lambda, \alpha]\!] \in \mathbb{Z}$．
$[\![\lambda, \alpha]\!] = -1$ のとき，$\lambda = \mu$ なので $\chi_\lambda = \chi_\mu$ は明らか．

そうでないとき，$[\![\mu,\alpha]\!]+1=-([\![\lambda,\alpha]\!]+1)$ だから，$[\![\lambda,\alpha]\!],[\![\mu,\alpha]\!]$ のいずれかは非負．よっていずれかが系 6.4.5 の仮定を満たすから，$\chi_\lambda=\chi_\mu$ は等しい． ■

$\mathfrak{g}$ の基底を $\{x_\alpha, y_\alpha, |\alpha\prec 0\}$（$x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$）と $\{h_i|1\le i\le l\}$（ルート系の底 $\Delta=\{\alpha_i,\dots,\alpha_l\}$ に対し $h_i=h_{\alpha_i}$）ととる．$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$，$\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ の PBW 基底は $\{y_\alpha\},\{h_i\}$，$\{x_\alpha\}$ の順に全順序となるようにとる．また，$p\colon\mathfrak{U}(\mathfrak{g})\longrightarrow\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ を射映とする．
極大トーラス $\mathfrak{h}$ は可換だったから，$\mathfrak{U}(\mathfrak{h})=S(\mathfrak{h})$ なので，以下では特に $S(\mathfrak{h})$ と書く．

既約最高ウエイト加群 $L(\lambda)$ の極大ベクトル v^+ に対する $z\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ の作用を考える．
単項式 $\prod_{\alpha\succ 0}y_\alpha^{i_\alpha}\prod_{i=1}^{l}h_\alpha^{k_\alpha}\prod_{\alpha\succ 0}x_\alpha^{j_\alpha}$ はある α に対して $j_\alpha>0$ ならば，v^+ に作用すると 0．逆に全ての α に対して $j_\alpha=0$ の場合はウェイト $\lambda-i_\alpha\alpha$ のベクトルに送る．つまり，指標 χ_λ に関与するのは，$S(\mathfrak{h})$ の線型結合部分のみであり，

$$\chi_\lambda=\lambda\circ p|_{\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})\cap S(\mathfrak{h})}$$

となる（$\lambda\colon\mathfrak{U}(\mathfrak{h})\longrightarrow\mathbb{K}$ は $\lambda\colon\mathfrak{h}\longrightarrow\mathbb{K}$ の標準的拡大）．χ_λ,λ は代数準同型だから，$p|_{\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})\cap S(\mathfrak{h})}$ は代数準同型となる．

$\mathfrak{h}$ の同型 $h_i\mapsto h_i-1$ $(\forall i=1,\dots,k)$ を $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})\simeq S(\mathfrak{h})$ に線型に拡張したものを η とすると，可換 Lie 代数の同型．δ は基本ウエイトの和だったから，$\delta(h_i)=1$．δ も同様に $S(\mathfrak{h})$ に拡大すると，

$$(\lambda+\delta)\circ\eta(h_i)=(\lambda+\delta)(h_i-1)=(\lambda(h_i)+1)-(\lambda+\delta)1=\lambda(h_i)$$
$$\therefore(\lambda+\delta)\circ\eta=\lambda$$

となる．$\psi=\eta\circ p|_{\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})\cap S(\mathfrak{h})}$ とすると，(??) と合わせて，

$$\chi_\lambda=(\lambda+\delta)\circ\psi$$

補題 6.4.1:

任意のウエイト $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$ に対し，

$$\chi_\lambda=\chi_\mu\quad\Longrightarrow\quad\mathscr{W}\lambda=\mathscr{W}\mu$$

証明 先程定義した ψ は λ に（汎函数として）依存しないので，系 6.4.6 より，整ウエイト $\lambda\in\Lambda$ に対し $\chi_\lambda=(\mathscr{W}\lambda)\circ\psi$ となる．つまり，ψ は $\mathscr{W}$ 不変で Λ は $S(\mathfrak{h})$ を生成するから，$\operatorname{Im}\psi\subset S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}\subset S(\mathfrak{h})$．
逆にこのとき，$\forall\lambda\in\mathfrak{h}^*$ で $\chi_\lambda=\chi_{\mathscr{W}\lambda}$．つまり，系 6.4.6 が $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$ でも成り立つことになる． ■

補題 6.4.2:

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathfrak{h}^*$ について，$\mathscr{W}\lambda_1\neq\mathscr{W}\lambda_2$ とすると，

$$\exists x\in S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}(=\mathbb{K}[\mathfrak{h}^*]),\quad\lambda_1(x)\neq\lambda_2(x)$$

証明 $\lambda_1(y)\neq 0$ を満たす $y\in\mathfrak{h}$ を選ぶ．$\mathscr{W}$ は有限群なので，

$$y\prod_{\mu\in(\mathscr{W}\lambda\setminus\lambda_1)\cup\mathscr{W}\lambda_2}(y-\mu(y))\in S(\mathfrak{h})$$

が定義でき，さらに $\mathscr{W}$ の作用の和をとったもの x が定義できる．すると $x\in S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ かつ，

$$\lambda_1(x)\neq 0=\lambda_2(x)$$

■

定理 6.4.7: Harish-Chandra 同型

$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対し，

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{W}\lambda = \mathscr{W}\mu$$

証明 補題 6.4.1 を示したから，その逆（つまり $\Longleftarrow$）を示せば良い．

補題 6.4.2 を示したから，$\chi_\lambda = (\lambda+\delta)\circ\psi$ より $\operatorname{Im}\psi \subset S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ を示せば良い．

命題??の意味での結合代数の次数付けについて $S \simeq \operatorname{gr} S$ となること，PBW 定理，さらに群作用の不変性が Ker が 0 の準同型で保存されること，定理 6.4.4 に注意して以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{gr} S(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \operatorname{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} & \\
S(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[u, "p_G"] & \mathfrak{U}(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}} = S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \arrow[rr, "\theta"'] & & \mathbb{K}[\mathfrak{h}]^{\mathscr{W}}
\end{tikzcd}$$

ただし，$S(\cdot)$ と $\mathbb{K}[\cdot]$ の同型性は Killing 形式による双対による．

π が準同型であれば簡単だが，単なる線型写像ではあっても代数の準同型ではない[*4]．しかし，π を除いて，$S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ を $S(\mathfrak{h})$ にすれば可換図式であり，標準的射映（の拡張）p_G と，$\operatorname{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}}$ から $S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ まで反時計回りに移す写像は全て準同型で，その合成は ψ に等しい[*5]．群作用の不変性が Ker が 0 の準同型で保存されるから，$\operatorname{Im}\psi \subset S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}} \subset S(\mathfrak{h})$[*6]． ■

6.5 指標の諸公式

この節では有限次元 $\mathfrak{g}$-加群の指標や重複度に関する公式を示す．

6.5.1 いくつかの $\mathfrak{h}^*$ の函数

$\lambda \in \Lambda^+$ に対する $L(\lambda)$ の代数的指標 $\operatorname{ch}_\lambda$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群でもあった．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対する（任意の）最高ウエイト加群（の直和加群）上に代数的指標を一般化しよう．

最高ウエイト加群の直和の代数的指標の展開係数 $f(g)$ は，定理 6.1.1(2)(3) より

$$\mathfrak{X} := \left\{ f\colon \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathbb{K} \;\middle|\; \operatorname{supp} f = \bigcup_{\text{有限和}} \{\lambda - \sum_{\alpha\succ 0} k_\alpha\alpha, k_\alpha \in \mathbb{Z}\} \right\}$$

[*4] $\operatorname{gr}\mathfrak{U}$ を考えていることから，$\mathfrak{U}$ の最高次係数は変わらないことはわかる．準同型でないのは低次項は変わることがあるため．

[*5] [Hum72] ではここを逆向きに追っている．

[*6] つまり，$S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ のままでも可換図式となる．

なる集合に含まれる．$\forall f, g \in \mathfrak{X}$ に対し，最高ウエイト加群の直和分解の際の最高ウエイトの（有限）集合を Λ_f, Λ_g とする．$\forall \mu \in \operatorname{supp} g$ に対し，

$$\{\nu \in \mathfrak{h}^* | f(\nu) g(\mu - \nu) \neq 0\}$$

は $\mathfrak{X}$ の定義より離散集合．かつ，

$$\exists \lambda_f \in \Lambda_f,\ \lambda_g \in \Lambda_g, \quad \lambda - \lambda_g \prec \nu \prec \lambda_f$$

より全ての (λ_f, λ_g) の合併を考えるとコンパクト集合．よって有限集合だから，代数的指標の積が，任意の最高ウエイト加群のとしても well-defined.

ここで，生成子 e^λ は特性函数

$$e^\lambda(\lambda) = 1, \quad e^\lambda(\mathfrak{h}^* \setminus \{\lambda\}) = 0$$

と同一視できる．また $\mathfrak{X}$ に対する Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用は定義 6.4.2 のように自然に誘導される．特に，$\sigma(e^\lambda) = e^{\sigma\lambda}$.

$p(\lambda)$ を $-\lambda = \sum_{\alpha \prec 0} k_\alpha \alpha$ を満たす非負整数の集合 $\{k_\alpha\}$ の数とする．当然 λ がルート格子上に無い場合は，$p(\lambda) = 0$.

Kostant 函数

定理 6.5.1: Kostant の重複度公式

優ウエイト $\lambda \in \Lambda^+$ に対し，既約最高ウエイト加群 $L(\lambda)$ のウエイト μ の重複度は以下

$$m_\lambda(\mu) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} sn(\sigma) p(\mu + \delta - \sigma(\lambda + \delta))$$

定理 6.5.2: Weyl の指標公式

優ウエイト $\lambda \in \Lambda^+$ に対し，以下が成り立つ：

$$\left(\sum_{\sigma \in \mathscr{W}} sn(\sigma) \varepsilon_{\sigma\delta} \right) * \mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} sn(\sigma) \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$$

定理 6.5.3: Steinberg の公式

優ウエイト $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda^+$ に対し，$L(\lambda') \otimes L(\lambda'')$ の直和分解した際の $L(\lambda)$ の個数は以下：

$$\sum_{\sigma, \sigma' \in \mathscr{W}} sn(\sigma\tau) p(\lambda + 2\delta - \sigma(\lambda' + \delta) - \sigma'(\lambda'' + \delta))$$

第 7 章

Hopf 代数

この章からしばらくの間，量子群の表現論についてまとめる．参考文献は主に [神保 90] である．

付録 A

ベクトル空間の話

[Hum72] が前提としていそうな線型代数の知識をまとめておく．$\mathbb{K}$ を任意の体とする．また，選択公理を認める．

A.1 Hom ベクトル空間

定義 A.1.1: Hom ベクトル空間

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．このとき

- 台集合を

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{W}\right) \coloneqq \left\{\, f\colon V \longrightarrow W \;\middle|\; \mathbb{K}\text{-線型写像} \,\right\}$$

  とする．
- 加法とスカラー乗法を，$\forall f,\ f_1,\ f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V,\ W\right),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ について

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &\colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto f_1(v) + f_2(v) \\ \lambda f &\colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto \lambda\bigl(f(v)\bigr) \end{aligned}$$

  と定める．

ことで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間のことを $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{W}\right)$ と書く．

特に $\mathbb{K}$ 自身を $\mathbb{K}$-ベクトル空間と見做したとき，

$$\boldsymbol{V^*} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V, \mathbb{K}\right)$$

と書いて**双対ベクトル空間** (dual vector space) と呼ぶ．

特に有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間の場合は，双対ベクトル空間の基底が次のように構成される：

命題 A.1.1: 双対ベクトル空間の基底

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V とその基底 $\{e_\mu\}$ を与える．このとき $\dim V$ 個の線型写像 $\varepsilon^\mu \in V^*$ を

$$\varepsilon^\mu(e_\nu) := \delta^\mu_\nu$$

により定義すると，$\{\varepsilon^\mu\}$ は V^* の基底になる．

A.2 ベクトル空間のテンソル積

A.2.1 普遍性による定義

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\,W,\,Z$ を与える．このとき写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ が**双線型** (bilinear) であるとは，2 つの引数についてそれぞれ[*1] $\mathbb{K}$-線型であることを言う．i.e. $\forall v,\, v_1,\, v_2 \in V,\ \forall w,\, w_1,\, w_2 \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
f(v_1 + v_2,\, w) &= f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\
f(v,\, w_1 + w_2) &= f(v,\, w_1) + f(v,\, w_2) \\
f(\lambda v,\, w) &= \lambda f(v,\, w) \\
f(v,\, \lambda w) &= \lambda f(v,\, w)
\end{aligned}$$

が成り立つこと．同様に $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\,\dots,\,V_n,\,W$ に関して，写像 $f\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ が**多重線型** (multillinear) であるとは，全ての引数についてそれぞれ $\mathbb{K}$-線型であることを言う．

定義 A.2.1: ベクトル空間のテンソル積

$\mathbb{K}$ を任意の体とし，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\,W$ を与える．

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{V \otimes W}$
- 双線型写像 $\boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{V \otimes W}$

の 2 つ組 $(V \otimes W,\, \Phi)$ が $V,\,W$ の**テンソル積** (tensor product) であるとは，以下の性質を充たすことをいう：

(テンソル積の普遍性)

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 Z および任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ に対して，以下の図式を可換にする線型写像 $\overline{f}\colon \boldsymbol{V \otimes W} \longrightarrow Z$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \forall Z \\
\boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists !\, \overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

[*1] つまり，直積ベクトル空間 $V \times W$ から Z への線型写像ではない．

テンソル積をとる操作は結合的かつ対称である．i.e. $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ および $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ が成り立つ．従って以降では 3 つ以上のベクトル空間のテンソル積を括弧を省略して書く．

命題 A.2.1: テンソル積の一意性

テンソル積は，存在すればベクトル空間の同型を除いて一意である．

証明 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と双線型写像の組 $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T})$ および $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Phi'}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T'})$ がどちらも V, W のテンソル積であるとする．このときテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \\ \boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi'}"'] & T \\ \boldsymbol{T'} \arrow[ur, dashed, "\exists! u'"] & \end{tikzcd}$$

が成り立つので，これらの図式を併せた $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{T} & \\ V \times W \arrow[u, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \arrow[ul, dashed, "\exists! u'"'] \\ \boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] & \end{tikzcd}$$

が存在する．然るに $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_T"] & \end{tikzcd}$$

も成り立ち，テンソル積の普遍性より赤点線で書いた線型写像は一意でなくてはならないので，

$$u' \circ u = \mathrm{id}_T$$

がわかる．同様の議論から

$$u \circ u' = \mathrm{id}_{T'}$$

も従うので，線型写像 $u\colon \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{T'}$, $u'\colon \boldsymbol{T'} \longrightarrow \boldsymbol{T}$ は互いに逆写像，i.e. 同型写像である． ■

命題 A.2.1 からテンソル積の一意性が言えたが，そもそもテンソル積が存在しなければ意味がない．そこで，体 $\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を素材にしてテンソル積 $(V \otimes W, \Phi\colon V \times W \longrightarrow V \otimes W)$ を具体的に構成してみよう．

$\mathbb{K} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ なので，任意の集合 S に対してベクトル空間の直和

$$\mathbb{K}^{\oplus S} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$$

を考えることができる．$\mathbb{K}^{\oplus S}$ の元 f とは，命題 A.3.4 からわかるように有限個の元 $x_1, \dots, x_n \in S$ を除いた全ての $x \in S$ に対して値 $0 \in \mathbb{K}$ を返すような $\mathbb{K}$ 値関数 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{K}$ のことである

ところで，$\forall x \in S$ に対して次のような関数 $\delta_x \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ が存在する：

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

この δ_x を x そのものと同一視してしまうことで，先述の $f \in \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ は

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \lambda_i \coloneqq f(x_i) \in \mathbb{K}$$

の形に一意的に書ける．[*2] この意味で，$\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ は $V \times W$ の元の**形式的な** $\mathbb{K}$ **係数線形結合**全体がなす $\mathbb{K}$ ベクトル空間と言うことができ，集合 $V \times W$ 上の**自由ベクトル空間**と呼ばれる．自由加群の特別な場合と言っても良い．自由ベクトル空間は次の普遍性によって特徴づけられる：

補題 A.2.1: 自由ベクトル空間の普遍性

任意の集合 S および任意の $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．包含写像

$$\iota\colon S \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus S},\ x \longmapsto \delta_x$$

を考える．このとき，任意の写像 $f\colon S \longrightarrow Z$ に対して線型写像 $u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が一意的に存在して，図式 A.2 を可換にする：

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\ \mathbb{K}^{\oplus S} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] & \end{tikzcd}$$

図 A.2: 自由ベクトル空間の普遍性

証明 写像

$$u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

は右辺が有限和なので well-defined であり，$\forall x \in S$ に対して $u\bigl(\iota(x)\bigr) = f(x)$ を充たす．

別の線型写像 $g\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が $g \circ \iota = f$ を充たすとする．このとき $\forall x \in S$ に対して $g(\delta_x) = f(x)$ であるから，$\forall v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ に対して

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = u(v)$$

[*2] というのも，このように書けば $\forall y \in S$ に対して

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}(y) = \begin{cases} f(x_i), & y = x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が言えるので．特に，この式の中辺は $\mathbb{K}$ の元の有限和なので意味を持つ．

が言える．よって $g = u$ である． ■

さて，自由加群の普遍性の図式とテンソル積の普遍性の図式はとても似ているので，$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ の候補として $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ を考えてみる．しかしそのままでは $\iota\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ が双線型写像になってくれる保証はない．そこで，

$$
\begin{aligned}
\iota(\lambda v,\, w) &\sim \lambda\iota(v,\, w),\\
\iota(v,\, \lambda w) &\sim \lambda\iota(v,\, w),\\
\iota(v_1 + v_2,\, w) &\sim \iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w),\\
\iota(v,\, w_1 + w_2) &\sim \iota(v,\, w_1) + \iota(v,\, w_2)
\end{aligned}
$$

を充たすような上手い同値関係による商ベクトル空間を構成する．

命題 A.2.2: テンソル積の構成

$\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ の部分集合

$$
\begin{aligned}
S_1 &:= \bigl\{\iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\bigr\},\\
S_2 &:= \bigl\{\iota(v,\, \lambda w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\bigr\},\\
S_3 &:= \bigl\{\iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w) \bigm| \forall v_1,\, \forall v_2 \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\bigr\},\\
S_4 &:= \bigl\{\iota(v,\, w_1 + w_2) - \iota(v,\, w_1) - \iota(v,\, w_2) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w_1,\, w_2 \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\bigr\}
\end{aligned}
$$

の和集合 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ が生成する $\mathbb{K}$ ベクトル空間[a]を $\mathcal{R}$ と書き，商ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R}$ の商写像を

$$
\pi\colon \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R},\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\iota(v_i,\, w_i) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\iota(v_i,\, w_i)\right) + \mathcal{R}
$$

と書き，$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} := \pi\bigl(\iota(v,\, w)\bigr)$ とおく．このとき，

- $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})}/\boldsymbol{\mathcal{R}}$
- 写像 $\boldsymbol{\Phi} = \pi \circ \iota\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})}/\boldsymbol{\mathcal{R}},\; (v,\, w) \longmapsto v \otimes w$

の組は $V,\, W$ のテンソル積である．

[a] これらの元の形式的な $\mathbb{K}$ 係数線型結合全体が成すベクトル空間のこと．

証明 まず，$\boldsymbol{\Phi}$ が双線型写像であることを示す．商ベクトル空間の和とスカラー乗法の定義から

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda v,\, w) &= \iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\lambda\iota(v,\, w) + \iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w)\bigr) + \mathcal{R}\\
&= \lambda\iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \lambda\bigl(\iota(v,\, w) + \mathcal{R}\bigr) = \lambda\Phi(v,\, w)\\
\Phi(v_1 + v_2,\, w) &= \iota(v_1 + v_2,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w) + \iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R}\\
&= \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \mathcal{R}\bigr) + \bigl(\iota(v_2,\, w) + \mathcal{R}\bigr)\\
&= \Phi(v_1,\, w) + \Phi(v_2,\, w)
\end{aligned}
$$

が言える．第 2 引数に関しても同様であり，$\boldsymbol{\Phi}$ は双線型写像である．

次に，上述の構成がテンソル積の普遍性を充たすことを示す．$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ を与える．自由ベクトル空間の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"] &
\end{tikzcd}$$

が存在する．f が双線型なので，

$$\begin{aligned}
\overline{f}\big(\iota(\lambda v,\, w)\big) &= f(\lambda v,\, w) = \lambda f(v,\, w) \\
&= \lambda \overline{f}\big(\iota(v,\, w)\big) = \overline{f}\big(\lambda\iota(v,\, w)\big), \\
\overline{f}\big(\iota(v_1 + v_2,\, w)\big) &= f(v_1 + v_2,\, w) = f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\
&= \overline{f}\big(\iota(v_1,\, w)\big) + \overline{f}\big(\iota(v_2,\, w)\big) = \overline{f}\big(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\big)
\end{aligned}$$

が成り立つ．第 2 引数についても同様なので，$\mathcal{R} \subset \mathrm{Ker}\,\overline{f}$ である．よって準同型定理から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R} \arrow[uur, dashed, "\exists! u"'] &
\end{tikzcd}$$

が存在する．この図式の外周部はテンソル積の普遍性の図式である． ■

A.2.2 多重線型写像とテンソル積

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間[*3] $V_1, \ldots, V_n, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，集合

$$\boldsymbol{L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W)} \coloneqq \left\{ F\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W \;\middle|\; F \text{ は多重線型写像} \right\}$$

を考える．$L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W)$ の上の加法とスカラー乗法を $\forall v_i \in V_i,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
(F + G)(v_1,\, \ldots,\, v_n) &\coloneqq F(v_1,\, \ldots,\, v_n) + G(v_1,\, \ldots,\, v_n), \\
(\lambda F)(v_1,\, \ldots,\, v_n) &\coloneqq \lambda\big(F(v_1,\, \ldots,\, v_n)\big)
\end{aligned}$$

と定義すると $L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W)$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間になる．特に，Hom の定義から $\mathbb{K}$-ベクトル空間の等式として

$$L(V;\, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V,\, W)$$

が成り立つ．テンソル積の普遍性はこの等式を多重線型写像について一般化するものである．

[*3] 有限次元でなくても良い．

命題 A.2.3: 多重線型写像とテンソル積

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1, \dots, V_n, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間として

$$L(V_1, \dots, V_n; W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> テンソル積の普遍性から，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\alpha \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W) \longrightarrow L(V_1, \dots, V_n; W),\ f \longmapsto f \circ \Phi$$

は全単射，i.e. $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である． ■

A.2.3 有限次元ベクトル空間のテンソル積

命題 A.2.4: 有限次元テンソル積の基底

<u>有限次元</u> $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V, W（$\dim V =: n,\ \dim W =: m$）を与える．$V, W$ の基底をそれぞれ $\{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}$ と書く．このとき，集合

$$\mathcal{E} := \left\{ e_\mu \otimes f_\nu \,\middle|\, 1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le m \right\}$$

は $V \otimes W$ の基底である．従って $\dim V \otimes W = nm$ である．

<u>証明</u> テンソル積の構成から，$\forall t \in V \otimes W$ は有限個の $(v_i, w_i) \in V \times W$ $(i = 1, \dots l)$ を使って

$$t = \left(\sum_{i=1}^{l} t_i \iota(v_i, w_i) \right) = \sum_{i=1}^{l} t_i v_i \otimes w_i$$

と書ける．$v_i = {v_i}^\mu e_\mu,\ w_i = {w_i}^\mu f_\mu$ のように展開することで，

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{l} t_i ({v_i}^\mu e_\mu) \otimes ({w_i}^\nu f_\nu) \\ &= \sum_{i=1}^{l} t_i {v_i}^\mu {w_i}^\nu e_\mu \otimes f_\nu \end{aligned}$$

と書ける．ただし添字 μ, ν に関しては Einstein の規約を適用した．従って $\mathcal{E}$ は $V \otimes W$ を生成する．

$\mathcal{E}$ の元が線型独立であることを示す．

$$t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu = 0$$

を仮定する．$\{e_\mu\}, \{f_\mu\}$ の双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\}, \{\eta^\nu\}$ と書き，全ての添字の組み合わせ $(\mu, \nu) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ に対して双線型写像

$$\tau^{\mu\nu} \colon V \times W \longrightarrow \mathbb{R},\ (v, w) \longmapsto \varepsilon^\mu(v) \eta^\nu(w)$$

を定める．$\tau^{\mu\nu}$ は双線型なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\tau^{\mu\nu}"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & \mathbb{R} \\
\boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\tau}^{\mu\nu}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．このことは，

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{\tau}^{\mu\nu}(t^{\rho\sigma} e_\rho \otimes f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma}(\overline{\tau}^{\mu\nu} \circ \pi \circ \iota)(e_\rho,\, f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma} \tau^{\mu\nu}(e_\rho,\, f_\sigma) = t^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

を意味する．従って $\mathcal{E}$ の元は線型独立である． ■

これでもまだ直接の計算には向かない．より具体的な構成を探そう．$\forall \omega_i \in V_i^*$ に対して，$\boldsymbol{\omega_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\omega_n}$ と書かれる $L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, \mathbb{K})$ の元を

$$
\boldsymbol{\omega_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\omega_n} \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K},\ (v_1,\, \ldots,\, v_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \omega_i(v_i)
$$

によって定義する．ただし右辺の総積記号は $\mathbb{K}$ の積についてとる．

命題 A.2.5:

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$（$\dim V =: n,\, \dim W =: m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．このとき，集合

$$
\mathcal{B} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}
$$

は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底である．従って $\dim L(V,\, W;\, \mathbb{K}) = nm$ である．

<u>証明</u> $\forall F \in L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を 1 つとり，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu)$ に対して

$$
F_{\mu\nu} := F(e_\mu,\, f_\nu)
$$

とおく．$\forall (v,\, w) \in V \times W$ を $v = v^\mu e_\mu,\ w = w^\nu f_\nu$ と展開すると，

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu (v,\, w) &= F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu(v) \eta^\nu(w) \\
&= F_{\mu\nu} v^\mu w^\nu
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一方，双線型性から

$$
F(v,\, w) = v^\mu w^\nu F(e_\mu,\, f_\nu) = F_{\mu\nu} v^\mu w^\nu
$$

も成り立つので $F = F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu$ が言えた．i.e. 集合 $\mathcal{B}$ は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を生成する．

次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$$
F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu = 0
$$

を仮定する．全ての添字の組み合わせについて，$(e_\mu,\, f_\nu)$ に左辺を作用させることで，$F_{\mu\nu} = 0$ が従う．i.e. $\mathcal{B}$ の元は互いに線型独立である． ■

命題 A.2.6: テンソル積の構成その 2

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V, W に対して

$$L(V, W; \mathbb{K}) \cong V^* \otimes W^*$$

命題 A.2.3 より，これは

$$L(V, W; \mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, \mathbb{K}) = (V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

と同値である．

<u>証明</u> 写像

$$\begin{aligned}\Phi\colon V^* \times W^* &\longrightarrow L(V, W; \mathbb{K}),\\ (\omega, \eta) &\longmapsto \bigl((v, w) \longmapsto \omega(v)\eta(w)\bigr)\end{aligned}$$

は双線型写像なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^* \times W^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & L(V, W;, \mathbb{K}) \\ \boldsymbol{V^* \otimes W^*} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．V, W（$\dim V = n, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\}, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\}, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 A.2.4 より $V^* \otimes W^*$ の基底として

$$\mathcal{E} := \left\{ \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \mid 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \right\}$$

がとれ，命題 A.2.5 より $L(V, W; \mathbb{K})$ の基底として

$$\mathcal{B} := \left\{ \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \mid 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \right\}$$

がとれる（記号が同じだが，違う定義である）．このとき，$\forall (v, w) \in V \times W$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu)(v, w) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu, \eta^\nu)(v, w) = \Phi(\varepsilon^\mu, \eta^\nu)(v, w) = \varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w) = \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v, w)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 A.2.2，右辺は命題 A.2.5 で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

命題 A.2.7: テンソル積と Hom の同型

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V, W に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \cong V^* \otimes W$$

<u>証明</u> 写像

$$\begin{aligned}\Phi\colon V^* \times W &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W),\\ (\omega, w) &\longmapsto (v \longmapsto \omega(v)w)\end{aligned}$$

は双線型なので，テンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
V^* \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi \circ \iota"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \\
\boldsymbol{V^* \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 A.2.4 より $V^* \otimes W$ の基底として

$$\mathcal{E} := \left\{ \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \right\}$$

がとれる．一方，$\forall \omega \in V^*,\, \forall w \in W$ に対して

$$\omega \otimes w := \Phi(\omega,\, w) \colon V \longrightarrow W,\; v \longmapsto \omega(v)w \tag{A.2.1}$$

とおくと $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ の基底として

$$\mathcal{B} := \left\{ \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \right\}$$

がとれる[*4]（記号が同じだが，$\mathcal{E}$ とは違う定義である）．このとき，$\forall v \in V$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes f_\nu)(v) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \Phi(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \varepsilon^\mu(v) f_\nu = \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 A.2.2，右辺は (A.2.1) で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

系 A.2.1:

任意の<u>有限次元</u> $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\, \dots,\, V_n,\, W$ に対して

$$L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W) \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W$$

<u>**証明**</u> 命題 A.2.3 および命題 A.2.6, A.2.7 から

$$\begin{aligned}
L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,\, W) \\
&\cong (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* \otimes W \\
&\cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W
\end{aligned}$$

を得る． ■

[*4] $\forall F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ をとる．${F_\mu}^\nu := \eta^\nu\big(F(e_\mu)\big)$ とおく．このとき $\forall v = v^\mu e_\mu \in V$ に対して

$${F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v) = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu(v) f_\nu = {F_\mu}^\nu v^\mu f_\nu$$

一方で，線形性および双対基底の定義から

$$F(v) = v^\mu F(e_\mu) = v^\mu \eta^\nu\big(F(e_\mu)\big) f_\nu = v^\mu {F_\mu}^\nu f_\nu$$

が成り立つので $F = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu$ が言えた．i.e. $\mathcal{B}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ を生成する．
　次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$${F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu = 0$$

を仮定する．$1 \le \forall \mu \le \dim V$ について右辺を e_μ に作用させることで ${F_\mu}^\nu f_\nu = 0$ が従うが，f_ν の線型独立性から ${F_\mu}^\nu = 0$ である．

系 A.2.2: Tensor-Hom adjunction

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W,\ Z$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W,\ Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\bigl(V,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\ Z)\bigr)$$

証明 命題 A.2.6, A.2.7 およびテンソル積の結合則より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W,\ Z) &\cong (V \otimes W)^* \otimes Z \\
&\cong V^* \otimes W^* \otimes Z \\
&\cong V^* \otimes (W^* \otimes Z) \\
&\cong V^* \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\ Z) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\bigl(V,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\ Z)\bigr)
\end{aligned}$$

■

系 A.2.2 は，有限次元ベクトル空間の圏が閉圏 (closed category) であることを意味する．

A.3 ベクトル空間の直積・直和

A.3.1 普遍性による定義

A を集合とする．集合 I を**添字集合** (index set) とする A の元の**族** (family) とは，写像 $a\colon I \longrightarrow A$ のことを言う．$\forall i \in I$ に対して $\boldsymbol{a_i} \coloneqq a(i)$ と略記し，写像 $a\colon I \longrightarrow A$ 自身のことを $\boldsymbol{(a_i)_{i\in I}}$ や $\boldsymbol{\{a_i\}_{i\in I}}$ と略記する．集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の**直積** (Cartesian product) とは，写像の集合

$$\prod_{i\in I} \boldsymbol{A_i} \coloneqq \left\{ a\colon I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I,\ a(i) \in A_i \right\}$$

のこと．集合族の直積について定まる自然な全射

$$\pi_i\colon \prod_{j\in I} A_j \longrightarrow A_i,\ a \longmapsto a(i)$$

のことを**標準的射影** (canonical projection) と呼ぶ．族としての略記を使うと，直積は

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ (a_i)_{i\in I} \;\middle|\; \forall i \in I,\ a_i \in A_i \right\}$$

と書くことができる．選択公理を認めたので空でない集合族の直積は空でない．

定義 A.3.1: 直積・直和-普遍性による定義

添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\left\{V_i\right\}_{i\in I}$ を与える．

(1)
- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{P}$
- $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\left\{\boldsymbol{\pi_i}\colon \boldsymbol{P} \longrightarrow V_i\right\}_{i\in I}$

の 2 つ組が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ の**直積** (product) であるとは，以下の性質を充たすことを言う：

(ベクトル空間の直積の普遍性)

$\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{f_i\colon W \longrightarrow V_i\}_{i\in I}$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-線型写像 $f\colon W \longrightarrow \boldsymbol{P}$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \forall W \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \boldsymbol{P} \arrow[r, "\boldsymbol{\pi_i}"'] & V_i \end{tikzcd}$$

(2)
- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{S}$
- $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{\boldsymbol{\iota_i}\colon V_i \longrightarrow \boldsymbol{S}\}_{i\in I}$

の 2 つ組が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ の**直和** (direct sum) であるとは，以下の性質を充たすことを言う：

(ベクトル空間の直和の普遍性)

$\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{f_i\colon V_i \longrightarrow W\}_{i\in I}$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-線型写像 $f\colon \boldsymbol{S} \longrightarrow W$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \forall W & \\ \boldsymbol{S} \arrow[u, dashed, "\exists! f"] & V_i \arrow[l, "\boldsymbol{\iota_i}"] \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

命題 A.3.1:

ベクトル空間の直和・直積は，存在すれば同型を除いて一意である．

<u>証明</u> テンソル積の場合と全く同様． ■

命題 A.3.2: ベクトル空間の直和・直積の構成

添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える．

(1)
- 集合族の直積 $\prod_{i\in I} V_i$ の上に加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned}(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} &\coloneqq (v_i + w_i)_{i\in I}\\ \lambda(v_i)_{i\in I} &\coloneqq (\lambda v_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

と定義することで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\prod_{i\in I} V_i$
- $\forall i \in I$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像[a]

$$\pi_i\colon \prod_{j\in I} V_j \longrightarrow V_i,\ (v_j)_{j\in I} \longmapsto v_i$$

の 2 つ組は $\{V_i\}_{i\in I}$ の直積である．

(2) • 集合族の直積 $\prod_{i\in I} V_i$ の部分集合

$$\bigoplus_{i\in I} V_i \coloneqq \left\{ (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; \substack{\text{有限個の添字を除いた全ての } j\in I \\ \text{について } v_j=0\in V_j} \right\}$$

の上に加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned}(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} &\coloneqq (v_i + w_i)_{i\in I} \\ \lambda(v_i)_{i\in I} &\coloneqq (\lambda v_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

と定義することで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\bigoplus_{i\in I} V_i$

• $\forall i \in I$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像[b]

$$\iota_i\colon V_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in I} V_j,\; v \longmapsto (y_j)_{j\in I}$$

$$\text{w/}\quad y_j = \begin{cases} v, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

の 2 つ組は $\{V_i\}_{i\in I}$ の直和である．

---

[a] 集合 $\prod_{i\in I} V_i$ に入れたベクトル空間の構造の定義から，自動的に π_i は $\mathbb{K}$-線型写像になる．
[b] 集合 $\bigoplus_{i\in I} V_i$ に入れたベクトル空間の構造の定義から，自動的に ι_i は $\mathbb{K}$-線型写像になる．

! 構成から明らかに，添字集合 I が有限集合ならベクトル空間の直積と直和は同型である．

証明 (1) f **の存在**

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{ f_\lambda\colon N \to M_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．このとき写像 f を

$$f\colon W \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i,\; w \longmapsto \bigl(f_i(w)\bigr)_{i\in I}$$

と定義すると，f は $\prod_{i\in I} V_i$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造の定義から自動的に $\mathbb{K}$-線型写像になり，$\forall i \in I$ および $\forall w \in W$ に対して

$$(\pi_i \circ f)(w) = f_i(w)$$

が成り立つ．i.e. 直積の普遍性の可換図式が成り立つ．

f **の一意性**

直積の普遍性の可換図式を充たす別の $\mathbb{K}$-線型写像 $g\colon W \to \prod_{i\in I} V_i$ が存在したとする．このとき $\forall i \in I$ および $\forall w \in W$ に対して

$$\pi_i\bigl(g(w)\bigr) = f_i(w) = \pi_i\bigl(f(w)\bigr)$$

が成り立つので $f = g$ が言える．i.e. f は一意である．

(2) f **の存在**

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{ f_i\colon M_i \to N \}_{i\in I}$ が与えられたとき，写像 f を

$$f\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W,\ (v_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} f_i(v_i)$$

と定義する．右辺は有限和なので意味を持ち，f は $\bigoplus_{i\in I} V_i$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造の定義から自動的に $\mathbb{K}$-線型写像になる．このとき $\forall i \in I$ および $\forall v \in V_i$ に対して

$$f\big(\iota_i(v)\big) = f_i(v) + \sum_{j\in I\setminus\{i\}} f_j(0) = f_i(v)$$

が成り立つ．i.e. 直和の普遍性の可換図式が成り立つ．

f の一意性

直和の普遍性の可換図式を充たす別の $\mathbb{K}$-線型写像 $g\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ が存在したとする．このとき $\forall (v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$ に対して

$$g\big((v_i)_{i\in I}\big) = g\left(\sum_{i\in I} \iota_i(v_i)\right) = \sum_{i\in I} g\big(\iota_i(v_i)\big) = \sum_{i\in I} f_i(v_i) = f\big((v_i)_{i\in I}\big)$$

が成り立つので $f = g$ が言える．i.e. f は一意である．

■

命題 A.3.3: Hom と直積・直和の交換

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W，添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える．このとき以下の 2 つの $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型が成り立つ：

(1)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\ \prod_{i\in I} V_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\ V_i\right)$$

(2)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i\in I} V_i,\ W\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V_i,\ W\right)$$

<u>証明</u>　(1) 直積の普遍性より，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\ \prod_{i\in I} V_i\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\ V_i\right),\ f \longmapsto (\pi_i \circ f)_{i\in I}$$

は全単射である．

(2) 直和の普遍性より，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\beta\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i\in I} V_i,\ W\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V_i,\ W\right),\ f \longmapsto (f \circ \iota_i)_{i\in I}$$

は全単射である．

■

!

命題 A.3.3 の同型は，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における（圏論的）極限，余極限に関する同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, \lim_{i\in I} V_i\right) \cong \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, V_i\right)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\operatorname*{colim}_{i\in I} V_i,\, W\right) \cong \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V_i,\, W\right)$$

の一例である．

A.3.2 部分ベクトル空間の直和

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の部分ベクトル空間の族 $\{W_i\}_{i\in I}$ の和空間とは，V の部分 $\mathbb{K}$-ベクトル空間

$$\sum_{i\in I} \boldsymbol{W_i} := \left\{ \sum_{i\in I} w_i \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall i\in I,\ w_i\in W_i \text{ かつ，有限個の添字を除いた} \\ \text{全ての } j\in I \text{ について } w_j=0\in W_j \end{array} \right\}$$

のこと．集合 $\bigcup_{i\in I} W_i$ が生成する（張る）部分 $\mathbb{K}$-ベクトル空間と言っても良い．

命題 A.3.4: 部分ベクトル空間の直和

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の部分ベクトル空間の族 $\{W_i\}_{i\in I}$ が

$$\forall i \in I,\ W_i \cap \left(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} W_j \right) = 0 \tag{A.3.1}$$

を充たすとする．このとき

- 和空間 $\sum_{i\in I} W_i$
- $\forall i \in I$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像

$$\iota_i \colon W_i \longrightarrow \sum_{j\in I} W_j,\ w \longmapsto w$$

の 2 つ組は $\{W_i\}_{i\in I}$ の直和である．

証明 $\forall w \in \sum_{i\in I} W_i$ を 1 つとる．まず，条件 (A.3.1) が充たされているならば $w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n}$ $(1 \leq \forall k \leq n,\ v_{i_k} \in W_{i_k})$ と書く方法が一意的に定まることを示す．$w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n} = w'_{j_1} + \cdots + w'_{j_m}$ が成り立つと仮定する．$A := \{i_1, \ldots, i_n\} \cup \{j_1, \ldots, j_m\} \subset I$ とおき，$\forall r \in A \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}$ に対しては $w_r = 0$，$\forall s \in A \setminus \{j_1, \ldots, j_m\}$ に対しては $w'_s = 0$ とおくことで

$$w = \sum_{r\in A} w_r = \sum_{r\in A} w'_r \in \sum_{i\in I} W_i$$

と書ける[*5]．このとき $\forall r \in A$ について

$$w_r - w'_r = \sum_{s\in A\setminus\{r\}} (w'_s - w_s) \in W_r \cap \left(\sum_{s\in A\setminus\{r\}} W_s \right)$$

[*5] $\sharp A \leq n + m < \infty$ なので左辺は有限和である．

が言えるが，条件 (A.3.1) より左辺は 0 である．i.e. $\forall r \in A$ に対して $w_r = w'_r$ が言えた．

次に直和の普遍性を示す．任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W および $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\left\{ f_i \colon V_i \longrightarrow W \right\}_{i\in I}$ を与える．このとき $\mathbb{K}$-線型写像

$$f \colon \sum_{i\in I} W_i \longrightarrow W,\ \sum_{i\in I} w_i \longmapsto \sum_{i\in I} f_i(w_i)$$

は先程の議論から well-defined であり[*6]，かつ $\forall i \in I,\ \forall w \in W_i$ に対して

$$f(w) = f_i(w) = f_i \circ \iota_i(w)$$

を充たす．i.e. $\forall i \in I$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
\forall W & \\
\sum_{i\in I} W_i \arrow[u, dashed, "\exists! f"] & W_i \arrow[l, "\iota_i"] \arrow[ul, "f_i"']
\end{tikzcd}$$

は可換である．別の $\mathbb{K}$-線型写像 $g \colon \sum_{i\in I} W_i \longrightarrow W$ がこの図式を可換にするならば，線型性から $\forall w = \sum_{i\in I} w_i \in \sum_{i\in I} W_i$ に対して

$$g(w) = g\left(\sum_{i\in I} w_i \right) = \sum_{i\in I} g(w_i) = \sum_{i\in I} g \circ \iota_i(w_i) = \sum_{i\in I} f_i(w_i) = f(w)$$

が言える．i.e. $g = f$ であり，f は一意である． ■

系 A.3.1: 内部直和

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の部分ベクトル空間の族 $\left\{ W_i \right\}_{i\in I}$ が

$$\forall i \in I,\ W_i \cap \left(\sum_{j \in I \setminus \{i\}} W_j \right) = 0$$

を充たすとする．このとき

$$\sum_{i\in I} W_i \cong \bigoplus_{i\in I} W_i$$

が成り立つ．ただし右辺は命題 A.3.2 で構成したベクトル空間の直和である．

! 結局同型ではあるのだが，系 A.3.1 において $\sum_{i\in I} W_I$ と $\bigoplus_{i\in I} W_i$ を区別するときは，前者を**内部直和** (internal direct sum)，後者を**外部直和** (external direct sum) と呼ぶ．

証明 命題 A.3.1 より従う． ■

[*6] 右辺は有限和なので意味を持つ．

A.4　階数・退化次数の定理

A.4.1　有限次元の場合

V, W を**有限次元** $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．V, W の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$ をとり，

$$T(\mathbf{e}_\mu) = T^\nu{}_\mu \mathbf{f}_\nu$$

のように左辺を展開したときに得られる行列

$$\begin{bmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}{}_1 & \cdots & T^{\dim W}{}_{\dim V} \end{bmatrix}$$

は基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$ に関する T の**表現表列**と呼ばれる．$\forall \boldsymbol{v} = v^\nu \mathbf{e}_\nu \in V$ に対して

$$T(\boldsymbol{v}) = T(v^\nu \mathbf{e}_\nu) = v^\nu T(\mathbf{e}_\nu) = v^\nu T^\mu{}_\nu \mathbf{f}_\mu$$

と書けるので，成分表示だけを見ると T はその表現行列を左から掛けることに相当する：

$$\begin{bmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}{}_1 & \cdots & T^{\dim W}{}_{\dim V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^{\dim V} \end{bmatrix}$$

定義 A.4.1: 線型写像の階数

$\operatorname{Im} T$ の次元のことを T の**階数** (rank) と呼び，$\mathbf{rank}\,\boldsymbol{T}$ と書く．

命題 A.4.1: 表現行列の標準形

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき V, W の基底であって，T の表現行列を

$$\begin{bmatrix} I_{\operatorname{rank} T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の形にするものが存在する．

証明 $\operatorname{Im} T$ の基底 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}\}$ および $\operatorname{Ker} T$ の基底 $\{\mathbf{k}_1, \dots \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}\}$ を勝手にとる．像の定義から，$1 \leq \forall \mu \leq \operatorname{rank} T$ に対して $\mathbf{e}_\mu \in V$ が存在して $\mathbf{f}_\mu = T(\mathbf{e}_\mu)$ を充たす．

まず $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ が V の基底を成すことを示す．

線型独立性

$$\sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} a^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

を仮定する．左辺に T を作用させることで

$$\sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} a^\mu \mathbf{f}_\mu = 0$$

がわかるが，$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}$ は $\operatorname{Im} T$ の基底なので線型独立であり，$1 \le \forall \mu \le \operatorname{rank} T$ に対して $a_\mu = 0$ が言える．故に仮定から

$$\sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

であるが，$\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ は $\operatorname{Ker} T$ の基底なので線型独立であり，$1 \le \forall \nu \le \dim(\operatorname{Ker} T)$ に対して $b_\nu = 0$ が言える．i.e. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ は線型独立である．

$\boldsymbol{V}$ を生成すること　$\forall \boldsymbol{v} \in V$ を 1 つとる．このとき $T(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} T$ なので

$$T(\boldsymbol{v}) = \sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} v^\mu \mathbf{f}_\mu$$

と展開できる．ここで $\boldsymbol{w} := \sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} v^\mu \mathbf{e}_\mu \in V$ とおくと，$T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{w})$ が成り立つが，T が線型写像であることから $T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = 0 \iff \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} T$ が言えて

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

と展開できる．従って

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} v^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

であり，$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ は V を生成する．

$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}$ と線型独立な $\dim W - \operatorname{rank} T$ 個のベクトル $\tilde{\mathbf{f}}_{\operatorname{rank} T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}$ をとると，

- V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}\}$
- W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}, \tilde{\mathbf{f}}_{\operatorname{rank} T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}\}$

に関する T の表現行列は

$$\begin{bmatrix} I_{\operatorname{rank} T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

になる．■

系 A.4.1: 階数・退化次数の定理（有限次元）

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)$$

が成り立つ．

証明 命題 A.4.1 の証明より従う． ■

系 A.4.1 から便利な補題がいくつか従う：

補題 A.4.1: 有限次元ベクトル空間に関する小定理集

$V,\ W$ を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{rank}\, T \leq \dim V$. 特に $\mathrm{rank}\, T = \dim V \iff T$ は単射
(2) $\mathrm{rank}\, T \leq \dim W$. 特に $\mathrm{rank}\, T = \dim W \iff T$ は全射
(3) $\dim V = \dim W$ かつ T が単射 $\implies$ T は同型写像
(4) $\dim V = \dim W$ かつ T が全射 $\implies$ T は同型写像

証明 (1) 系 A.4.1 より

$$\dim V = \mathrm{rank}\, T + \dim(\mathrm{Ker}\, T) \geq \mathrm{rank}\, T$$

が成り立つ．特に命題??から T が単射 $\iff \mathrm{Ker}\, T = 0 \iff \dim(\mathrm{Ker}\, T) = 0 \iff \mathrm{rank}\, T = \dim V$ が従う．

(2) rank の定義より $\mathrm{rank}\, T \leq \dim W$ は明らか．特に次元の等しい有限次元ベクトル空間は同型なので，T が全射 $\iff \mathrm{Im}\, T \cong W \iff \dim(\mathrm{Im}\, T) = \mathrm{rank}\, T = \dim W$ が言える．

(3) $\dim V = \dim W$ かつ T が単射とする．T が単射なので (1) より $\mathrm{rank}\, T = \dim V = \dim W$ が従い，(2) より T は全射でもある．

(4) $\dim V = \dim W$ かつ T が全射とする．T が全射なので (2) より $\mathrm{rank}\, T = \dim W = \dim V$ が従い，(1) より T は単射でもある．

■

A.4.2 分裂補題と射影的加群

実は，系 A.4.1 は有限次元でなくとも成り立つ．それどころか，左 R 加群の場合の分裂補題に一般化される．

補題 A.4.2: 分裂補題

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0 \tag{A.4.1}$$

が与えられたとする．このとき，以下の二つは同値である：

(1) 左 R 加群の準同型 $i_2\colon M_2 \longrightarrow M$ であって $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$ を充たすものが存在する
(2) 左 R 加群の準同型 $p_1\colon M \longrightarrow M_1$ であって $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$ を充たすものが存在する

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)**　写像

$$p_1' \colon M \longrightarrow M,\ x \longmapsto x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr)$$

を定義すると，

$$p_2\bigl(p_1'(x)\bigr) = p_2(x) - ((p_2 \circ i_2) \circ p_2)(x) = p_2(x) - p_2(x) = 0$$

が成り立つ．従って，(A.4.1) が完全列であることを使うと $p_1'(x) \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ である．さらに i_1 が単射であることから

$$\exists! y \in M_1,\ p_1'(x) = i_1(y)$$

が成り立つ．ここで写像

$$p_1 \colon M \longrightarrow M_1,\ x \longmapsto y$$

を定義するとこれは準同型写像であり，$\forall x \in M_1$ に対して

$$p_1'\bigl(i_1(x)\bigr) = i_1(x) - (i_2 \circ (p_2 \circ i_1))(x) = i_1(x)$$

が成り立つ[*7]ことから

$$(p_1 \circ i_1)(x) = x$$

とわかる．i.e. $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$

(1) $\Longleftarrow$ (2)　(A.4.1) は完全列であるから $M_2 = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Im} p_2$ である．従って $\forall x \in M_2 = \operatorname{Im} p_2$ に対して，$x = p_2(y)$ を充たす $y \in M$ が存在する．ここで写像

$$i_2 \colon M_2 \longrightarrow M,\ x \longmapsto y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)$$

は well-defined である．$x = p_2(y')$ を充たす勝手な元 $y' \in M$ をとってきたとき，$p_2(y - y') = 0$ より $y - y' \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ だから，i_1 の単射性から

$$\exists! z \in M_1, \quad y - y' = i_1(z)$$

が成り立ち，このとき

$$\Bigl(y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)\Bigr) - \Bigl(y' - i_1\bigl(p_1(y')\bigr)\Bigr) = i_1(z) - (i_1 \circ (p_1 \circ i_1))(z) = i_1(z) - i_1(z) = 0$$

とわかるからである．i_2 は準同型写像であり，$\forall x \in M_2$ に対して

$$(p_2 \circ i_2)(x) = p_2(y) - ((p_2 \circ i_1) \circ p_1)(y) = p_2(y) = x$$

なので $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$．

■

[*7] (A.4.1) が完全列であるため，$p_2 \circ i_1 = 0$

系 A.4.2:

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が補題 A.4.2 の条件を充たすならば

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

<u>証明</u> 補題 A.4.2 の条件 (1) が満たされているとする．このとき補題 A.4.2 証明から $\forall x \in M$ に対して

$$i_1\bigl(p_1(x)\bigr) = p_1'(x) = x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr) \iff i_1\bigl(p_1(x)\bigr) + i_2\bigl(p_2(x)\bigr) = x$$

また，完全列の定義から $p_2\bigl(i_1(x)\bigr) = 0$ であるから $\forall x \in M_2$ に対して

$$p_1'\bigl(i_2(x)\bigr) = i_2(x) - ((i_2 \circ p_2) \circ i_2)(x) = 0 = i_1(0)$$

であり，結局 $p_1\bigl(i_2(x)\bigr) = 0$ とわかる．

ここで準同型写像

$$\begin{aligned} f &\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M,\ (x,\, y) \longmapsto i_1(x) + i_2(y), \\ g &\colon M \longrightarrow M_1 \oplus M_2,\ x \longmapsto \bigl(p_1(x),\, p_2(x)\bigr) \end{aligned}$$

を定めると

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,\, y) &= \bigl(p_1(i_1(x)) + p_1(i_2(y)),\, p_2(i_1(x)) + p_2(i_2(x))\bigr) = (x,\, y), \\ (f \circ g)(x) &= i_1(p_1(x)) + i_2(p_2(x)) = x \end{aligned}$$

なので $f,\, g$ は同型写像. ■

定義 A.4.2: 分裂

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が**分裂** (split) するとは，補題 A.4.2 の条件を充たすことをいう．

定義 A.4.3: 射影的加群

左 R 加群 P が**射影的加群** (projective module) であるとは，任意の左 R 加群の**全射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P \longrightarrow N$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon P \longrightarrow M$ であって $f \circ h = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 A.3).

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \\ M \arrow[r, two heads, "f"] & N \end{tikzcd}$$

図 A.3: 射影的加群

命題 A.4.2:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，N が射影的加群ならば分裂する．

<u>**証明**</u> 射影的加群の定義において $P = N$ とすることで，左 R 加群の準同型写像 $s\colon N \longrightarrow M$ であって $g \circ s = 1_N$ を充たすものが存在する． ■

命題 A.4.3: 射影的加群の直和

左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して以下の 2 つは同値：

(1) $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が射影的加群

(2) $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ が射影的加群

<u>**証明**</u> 標準的包含を $\iota_\lambda\colon P_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ と書く．

(1)$\Longrightarrow$(2) 仮定より，$\forall\lambda \in \lambda$ に対して，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$ に対して，準同型写像 $h_\lambda\colon P_\lambda \longrightarrow M$ であって $f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$ を充たすものが存在する．従って直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

であって $f \circ h_\lambda = h \circ \iota_\lambda$ を充たすものが一意的に存在する．このとき

$$(f \circ h) \circ \iota_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$$

であるから，h の一意性から $f \circ h = g$.

(1)$\Longleftarrow$(2) $\lambda \in \Lambda$ を一つ固定し，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P_\lambda \longrightarrow M$ を与える．直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$$

であって $h \circ \iota_\lambda = g$（$\forall\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$, $h \circ \iota_\lambda = 0$）を充たすものが一意的に存在する．さらに仮定より，準同型写像

$$\alpha\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \longrightarrow M$$

であって $f \circ \alpha = h$ を充たすものが存在する．このとき

$$f \circ (\alpha \circ \iota_\lambda) = h \circ \iota_\lambda = g$$

なので $\beta := h \circ \iota_\lambda$ とおけば良い．

■

系 A.4.3: 自由加群は射影的加群

環 R 上の自由加群は射影的加群である

証明 R が射影的加群であることを示せば命題 A.4.3 より従う．

左 R 加群の全射準同型写像と準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N,\ g\colon R \longrightarrow N$ を任意に与える．このときある $x \in M$ が存在して $f(x) = g(1)$ となる．この x に対して準同型写像 $h\colon R \longrightarrow M,\ a \longmapsto ax$ を定めると，$\forall a \in R$ に対して

$$f\bigl(h(a)\bigr) = f(ax) = af(x) = ag(1) = g(a)$$

が成り立つので $f \circ h = g$ となる． ■

V, W を任意の（有限次元とは限らない）$\mathbb{K}$ ベクトル空間，$T\colon V \longrightarrow W$ を任意の線型写像とする．

$$\begin{aligned} i_1 &\colon \operatorname{Ker} T \longrightarrow V,\ \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v}, \\ p_2 &\colon V \longrightarrow \operatorname{Im} T,\ \boldsymbol{v} \longmapsto T(\boldsymbol{v}), \end{aligned}$$

と定めると，i_1 は単射，p_2 は全射で，かつ $p_2 \circ i_1 = 0$ が成り立つ．よって $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の図式

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T \xrightarrow{i_1} V \xrightarrow{p_2} \operatorname{Im} T \longrightarrow 0 \tag{A.4.2}$$

は短完全列だが，$\operatorname{Im} T$ はベクトル空間なので自由加群であり，系 A.4.3 より射影的加群でもある．従って命題 A.4.2 より短完全列 (A.4.2) は分裂し，系 A.4.2 から

$$V \cong \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$$

が言える．

定理 A.4.4: 階数・退化次数の定理

V, W をベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)$$

が成り立つ．

A.5 Jordan 標準形

この節では体 $\mathbb{K}$ は代数閉体であるとし，V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．

定義 A.5.1: 広義固有空間

$x \in \operatorname{End} V$ を与える．$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V(\lambda)} &\coloneqq \operatorname{Ker}(x - \lambda \operatorname{id}_V) = \{ v \in V \mid (x - \lambda \operatorname{id}_V)v = 0 \} \\ \boldsymbol{W(\lambda)} &\coloneqq \{ v \in V \mid \exists k > 0,\ (x - \lambda \operatorname{id}_V)^k v = 0 \} \end{aligned}$$

とおく．

- λ が x の**固有値** (eigenvalue) であるとは，$V(\lambda) \neq 0$ であることを言う．
- $V(\lambda)$ が固有値 λ に属する x の**固有空間** (eigenspace) であるとは，$V(\lambda) \neq 0$ であることを言う．
- $W(\lambda)$ が固有値 λ に属する x の**広義固有空間** (generalized eigenspace) であるとは，$W(\lambda) \neq 0$ であることを言う．

$V(\lambda) \subset W(\lambda) \subset V$ が x-不変な部分ベクトル空間であることは明らかである．

A.5.1 上三角化

補題 A.5.1: 旗と基底

V の旗

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\dim V} = V$$

を与え，

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbb{K} e_1 \\ V_2/V_1 &= \mathbb{K}(e_2 + V_1) \\ V_3/V_2 &= \mathbb{K}(e_3 + V_2) \\ &\vdots \\ V_{\dim V}/V_{\dim V - 1} &= \mathbb{K}(e_{\dim V} + V_{\dim V - 1}) \end{aligned}$$

を充たす $e_i \in V_i \quad (1 \leq i \leq \dim V)$ をとる．このとき $1 \leq \forall i \leq \dim V$ に対して

$$V_i = \operatorname{Span}\{ e_1, \dots, e_i \}$$

が成り立つ．

証明 $1 \leq i \leq \dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$i = 1$ のときは明らか．
$i > 1$ とする．

$$\lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j = 0$$

を仮定する．両辺に標準的射影 $p_i\colon V_i \longrightarrow V_i/V_{i-1}$ を作用させることで

$$\lambda_i p(e_i) = \lambda_i(e_i + V_{i-1}) = 0$$

がわかるが，$e_i \in V_i$ の選び方から $e_i + V_{i-1} \neq 0$ なので $\lambda_i = 0$ が言える．よって

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j = 0 \in V_{i-1}$$

となるが，帰納法の仮定より $e_1, \dots, e_{i-1}$ は線型独立なので $1 \leq \forall j \leq i$, $\lambda_j = 0$ が言えた．i.e. $e_1, \dots, e_i$ は線型独立である．旗の定義から $\dim V_i = i$ なので $e_1, \dots, e_i$ は V_i の基底であり，帰納法が完成した． ■

$x \in \operatorname{End} V$ が**上三角化可能**であるとは，x によって安定化される V の旗が存在することを言う．というのも，このとき補題 A.5.1 の基底をとると

$$\begin{aligned}
x(e_1) &= {x^1}_1 e_1 \in V_1, \\
x(e_2) &= {x^1}_2 e_1 + {x^2}_2 e_2 \in V_2, \\
&\vdots \\
x(e_{\dim V}) &= {x^1}_{\dim V} e_1 + \cdots + {x^{\dim V}}_{\dim V} e_{\dim V} \in V_{\dim V}
\end{aligned}$$

と書けるので，この基底に関する x の表現行列が

$$\begin{bmatrix}
{x^1}_1 & {x^1}_2 & \cdots & {x^1}_{\dim V} \\
0 & {x^2}_2 & \cdots & {x^2}_{\dim V} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & {x^{\dim V}}_{\dim V}
\end{bmatrix}$$

という上三角行列になるのである．

定理 A.5.1: 上三角化

$\forall x \in \operatorname{End} V$ に対して，x によって安定化される V の旗が存在する．i.e. $\forall x \in \operatorname{End} V$ は上三角化可能である．

証明 $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 0$ のときは明らかなので $\dim V > 0$ とする．$\forall x \in \operatorname{End} V$ を 1 つ固定する．仮定より $\mathbb{K}$ は代数閉体なので，x は重複も込めてちょうど $\dim V$ 個の固有値をもつ．それを $\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim V}$ とおこう．$v_1 \in V(\lambda_1) \setminus \{0\}$ をとり，$V_1 := \mathbb{K} v_1$ とおく．標準的射影を $p\colon V \longrightarrow V/V_1$ と書くと，$\forall v \in V_1$ に対して $p \circ x(v) = p(\lambda_1 v) = 0$ が成り立つので $V_1 \subset \operatorname{Ker} p \circ x$ である．故に商ベクトル空間の普遍性を使うことができ，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の図式

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "x"] \arrow[d, "p"'] & V \arrow[r, "p"] & V/V_1 \\
V/V_1 \arrow[urr, dashed, "\exists! \overline{x}"'] & &
\end{tikzcd}$$

を可換にするような $\mathbb{K}$-線型写像 $\overline{x} \in \operatorname{End}(V/V_1)$ が一意的に存在する．$\dim(V/V_1) = \dim V - 1$ なので帰納法の仮定が使えて，$\overline{x} \in \operatorname{End}(V/V_1)$ によって安定化される V/V_1 の旗

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1} = V/V_1$$

が存在する．このとき $0 \leq \forall i \leq \dim V - 1$ を 1 つ固定すると $\forall w + V_1 \in W_i$ に対して $\overline{x}(w + V_1) \in W_i$ が成り立つ．商ベクトル空間の普遍性から $\overline{x}(w + V_1) = \overline{x} \circ p(w) = p \circ x(w)$ なので，$\forall v \in p^{-1}(W_i)$ に対して $p \circ x(v) = \overline{x} \circ p(v) \in W_i \iff x(v) \in p^{-1}(W_i)$ が分かった．i.e. V の部分空間の増大列

$$0 \subset p^{-1}(W_0) \subset p^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(W_{\dim V - 1}) = V$$

は x によって安定化される V の旗であり，帰納法が完成する． ■

! 定理 A.5.1 の証明から，もし $\mathbb{K}$ が代数閉体でなくても，$x \in \mathrm{End}\, V$ の固有値が全て $\mathbb{K}$ に含まれるならば x は上三角化可能である．

A.5.2 広義固有空間分解

定理 A.5.2: 広義固有空間分解-1

$x \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ を与え，

- x の相異なる全ての固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$
- λ_i の重複度を p_i

とおく．このとき $\mathbb{K}^n$ の内部直和分解

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$$

が一意的に存在し，かつ $\dim W(\lambda_i) = p_i$ である．

証明 $\dim W(\lambda_i) \geq p_i$

仮定より $\mathbb{K}$ は代数閉体なので，定理 A.5.1 より $u \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ が存在して $u^{-1}xu$ が上三角行列になる．$1 \leq i \leq r$ を 1 つ固定し，$u^{-1}xu$ の対角成分の最初の p_i 個が λ_i であると仮定しても一般性を失わない．このとき $u^{-1}(x - \lambda_i \mathbb{1}_n)u$ の対角成分の最初の p_i 個は 0 になるので $u^{-1}(x - \lambda_i \mathbb{1}_n)^{p_i}u$ の第 $1 \leq j \leq p_i$ 列は全て 0 となる．よって $u = [e_1 \ \ldots \ e_n]$ とおいたとき $\mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_{p_i}\} \subset W(\lambda_i)$ である．u は正則行列なので $e_1, \ldots, e_{p_i}$ は線型独立であり，$\dim W(\lambda_i) \geq p_i$ だと分かった．

和空間 $\sum_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$ が内部直和

r に関する数学的帰納法により示す．$r = 1$ のときは明らかなので $r > 1$ とする．$w_i \in W(\lambda_i)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} w_i = 0 \tag{A.5.1}$$

が成り立つと仮定する．このとき $w_1 = \cdots = w_r = 0$ であることを示せば良い．広義固有空間の定義からある $k_r > 0$ が存在して $(x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_r = 0$ が成り立つので，

$$(x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} \left(\sum_{i=1}^{r} w_i \right) = \sum_{i=1}^{r-1} (x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_i = 0$$

が言える．$W(\lambda_i)$ は x-不変なので，帰納法の仮定から $1 \leq \forall i \leq r-1$ に対して $(x-\lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_i = 0$ である．ここである $1 \leq j \leq r-1$ が存在して $w_j \neq 0$ であると仮定する．このとき $k_j > 0$ を $(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j} w_j = 0$ を充たす最小の自然数とする．このとき $x(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j = \lambda_j (x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= (x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1}(x-\lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_j \\
&= (x-\lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r}(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j \\
&= (\lambda_j-\lambda_r)^{k_r}(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j
\end{aligned}
$$

が成り立つが，$\lambda_j \neq \lambda_r$ なので $(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j = 0$ と言うことになって k_j の最小性に矛盾する．よって背理法から $1 \leq \forall j \leq r-1$ に対して $w_j = 0$ が言えた．仮定 (A.5.1) より $w_r = 0$ も言えて帰納法が完成する．

代数学の基本定理より $\sum_{i=1}^{r} p_i = n$ が言える．$\bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i) \subset \mathbb{K}^n$ であることも踏まえると，以上の議論から $\dim W(\lambda_i) = p_i$ が分かった．従って $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$ である．直和の普遍性よりこの内部直和分解は一意である． ■

A.5.3 多項式環・最小多項式

定理 A.5.2 の証明に多項式環を利用することもできる．まず一般論から入る．R を環とし，R の**単元** (unit)[*8] 全体がなす集合を $\boldsymbol{R^{\times}}$ と書く．$R^{\times}$ は環の積に関して群となる．特に，R が体ならば $R^{\times} = R \setminus \{0\}$ となる．

n 個の変数 $t_1, \ldots, t_n$ を持つ R 係数多項式全体[*9]の集合を $R[t_1, \ldots, t_n]$ と書く．$R[t_1, \ldots, t_n]$ の上の加法と乗法をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
f(t_1, \ldots, t_n) + g(t_1, \ldots, t_n) &\coloneqq \sum_{i_1, \ldots, i_n} (a_{i_1 \ldots i_n} + b_{i_1 \ldots i_n}) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}, \\
f(t_1, \ldots, t_n) g(t_1, \ldots, t_n) &\coloneqq \sum_{i_1, \ldots, i_n} \left(\sum_{j_1+k_1=i_1} \cdots \sum_{j_n+k_n=i_n} a_{j_1 \ldots j_n} b_{k_1 \ldots k_n} \right) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}
\end{aligned}
$$

で定義する[*10]と $R[t_1, \ldots, t_n]$ 自身が環になる．ただし $f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 \ldots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$，$g(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} b_{i_1 \ldots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in R[t_1, \ldots, t_n]$ とおいた．ある 1 つの変数に注目して項を整理することで，帰納的に自然な（環の）同型 $R[t_1, \ldots, t_n] \cong (R[t_1, \ldots, t_{n-1}])[t_n] \cong \ldots \cong (\cdots((R[t_1])[t_2]) \cdots [t_{n-1}])[t_n]$ が得られる．

---

*8 **可逆元** (invertible element) と言う場合もある．

*9 直和の構成と同様に，非ゼロの係数は有限個であるとする．より厳密には，写像 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n \longrightarrow R$ であって有限個の $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を除いて 0 を返すようなものと変数 $(t_1, \ldots, t_n)$ の組のことである．

*10 乗法の記号は慣例に従って省略した．

定義 A.5.2: 多項式の基本概念

$f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in R[t_1, \dots, t_n]$ を与える．

- $f(t_1, \dots, t_n) \neq 0$ ならば，f の**次数** (degree) を
$$\boldsymbol{\deg f} := \max\{i_1 + \cdots + i_n \mid a_{i_1 \dots i_n} \neq 0\}$$
と定義する．$f(t_1, \dots, t_n) \neq 0$ ならば $\deg f := -\infty$ と定義する．
- $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ の f への**代入**とは，値
$$\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in R$$
のこと[a]．記号としては $f(x_1, \dots, x_n)$ と書く．
- $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ を充たす $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ のことを f の**根** (root) と呼ぶ．
- $n = 1$ のとき，f の最高次係数が $1 \in R$ ならば f は**モニック** (monic) であると呼ばれる．

[a] 非ゼロな係数は有限個なので，この和は意味を持つ．

最高次係数が単元であるような多項式によって，多項式を割り算することができる：

命題 A.5.1: 多項式の割り算

1 変数多項式 $f(t), g(t) \in R[t]$ および単元 $u \in R^\times$ を与える．
このとき $f(t)$ がモニックならば，以下を充たす $q(t), r(t) \in R[t]$ が一意的に存在する：
$$g(t) = q(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r(t), \quad \deg r < \deg f$$

<u>証明</u> $f(t)$ はモニックであるとする．

$q(t), r(t)$ の存在

$g(t) = 0$ のときは $q(t) = r(t) = 0$ とすれば良い．$g(t) \neq 0$ のとき，$\deg g$ に関する数学的帰納法により示す．$\deg g < \deg f$ のときは $q(t) = 0$, $r(t) = g(t)$ とおけば良い．

$\deg g \geq \deg f$ とする．
$$f(t) =: \sum_{i=0}^{\deg f} a_i t^i, \quad g(t) =: \sum_{i=0}^{\deg g} b_i t^i$$
とおくと仮定から $a_{\deg f} = 1$ である．このとき
$$q_1(t) := b_{\deg g} \boldsymbol{u^{-1}} t^{\deg g - \deg f}, \quad g_1(t) := g(t) - q_1(x)\bigl(uf(t)\bigr)$$
と定義すると $\deg g_1 < \deg g$ が成り立つ．$g_1(t) = 0$ ならば $q(t) = q_1(t)$, $r(t) = 0$ とすれば良い．$g_1(t) \neq 0$ ならば，帰納法の仮定より $q_2(t), r_2(t) \in R[t]$ が存在して
$$g_1(t) = q_2(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r_2(t)$$

と書け，かつ $\deg r_2 < \deg f$ が成り立つ．すると

$$g(t) = \big(q_1(t) + q_2(t)\big)\big(uf(t)\big) + r_2(t)$$

であるから，$q(t) = q_1(t) + q_2(t)$, $r(t) = r_2(t)$ とすれば良い．

$q(t)$, $r(t)$ の一意性

$g(t) = q_1(t)\big(uf(t)\big) + r_1(t) = q_2(t)\big(uf(t)\big) + r_2(t)$ かつ $\deg r_i < \deg f$ が成り立つとする．このとき

$$\big(q_1(t) - q_2(t)\big)\big(uf(t)\big) = r_2(t) - r_1(t)$$

が成り立つが，$q_1(t) - q_2(t) \neq 0$ だとすると $\deg f \leq \max\{\deg r_1, \deg r_2\}$ と言うことになり矛盾．よって背理法から $q_1(t) = q_2(t)$ が言えて，$r_1(t) = r_2(t)$ も従う．

■

特に R が体ならば $R^\times = R \setminus \{0\}$ なので，任意のゼロでない多項式同士の割り算をすることができる．多変数の場合も，ある 1 つの変数に関する最高次係数が単元ならば割り算ができる．

定義 A.5.3: 環のイデアル

R を環とする．

- 部分集合 $I \subset R$ が左 (resp. 右) **イデアル** (ideal) であるとは，$\forall r \in R$, $\forall x \in I$ に対して $rx \in I$（resp. $xr \in I$）が成り立つことを言う．左イデアルかつ右イデアルのとき**両側イデアル**と呼ぶ．R が可換環のときは左，右イデアルの区別はなく，単に**イデアル** (ideal) と呼ぶ．
- 可換環 R のイデアル $I \subsetneq R$ が**素イデアル** (prime ideal) であるとは，

$$r,\, s \notin I \quad \Longrightarrow \quad rs \notin I$$

が成り立つことを言う．
- 可換環 R のイデアル $I \subsetneq R$ が**極大イデアル** (maximal ideal) であるとは，$I \subset J \subsetneq R$ なる任意のイデアル J に対して $I = J$ が成り立つことを言う．

定義 A.5.4: 整域

R を可換環とする．

- R が**整域** (integral domain) であるとは，$\forall a, b \in R \setminus \{0\}$ に対して $ab \neq 0$ が成り立つことを言う．
- **整域** R および $a \in R, b \in R \setminus \{0\}$ を与える．b が a の**約元**であるとは，ある $c \in R$ が存在して $a = bc$ となることを言い，$\boldsymbol{b \mid a}$ と書く．
- **整域** R および $(a_1, \dots, a_n) \in R^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, b \in R$ を与える．b が $a_1, \dots, a_n$ の**公約元**であるとは，

$$1 \leq \forall i \leq n,\ b \mid a_i$$

が成り立つことを言う．他の任意の公約元 $c \in R$ に対して $c \mid b$ が成り立つとき，b は**最大公約元** (greatest common deviser; GCD) と呼ばれ，$\boldsymbol{\gcd(a_1, \dots, a_n)}$ と書く．

- **整域** R および $b_1, \dots, b_n \in R \setminus \{0\}$, $a \in R$ を与える．a が $b_1, \dots, b_n$ の**公倍元**であるとは，

$$1 \le \forall i \le n,\ b_i \mid a$$

が成り立つことを言う．他の任意の公倍元 $c \in R$ に対して $b \mid c$ が成り立つとき，b は**最小公倍元** (least common multiple; LCM) と呼ばれ，$\mathbf{lcm}(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n})$ と書く．
- R が**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) であるとは，R の任意のイデアル $I \subset R$ に対してある $r \in R$ が存在して $I = Rr$ を充たすこと．

R を整域とし，$r \in R \setminus \{0\}$ を与える．

- r が**素元**であるとは，r が生成するイデアル $Rr \subset R$ が素イデアルであることを言う．
- r が**既約元**であるとは，$r \notin R^\times$ で，かつ $\forall a, b \in R$ に対して

$$r = ab \quad \Longrightarrow \quad a \in R^\times \ \text{または}\ b \in R^\times$$

が成り立つことを言う．r が既約でなければ**可約**と言う．
- 既約元 r, s が**同伴**であるとは，ある $u \in R^\times$ が存在して $r = su$ と書けることを言う．

命題 A.5.2: 素イデアルと極大イデアルの特徴付け

可換環 R のイデアル I に対し，以下が成り立つ：

(1) I が素イデアル $\iff$ R/I は整域
(2) I が極大イデアル $\iff$ R/I は体

証明 (1)

■

GCD, LCM は存在すれば単元の積を除いて一意である．

定義 A.5.5: 種々の整域

R を整域とする．

- R が **Euclid 整域** (Euclid domain) であるとは，以下の条件を充たす写像 $\phi\colon R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が存在することを言う：
(ED) $\forall a \in R,\ \forall b \in R \setminus \{0\}$ に対して $q, r \in R$ が存在して

$$a = qb + r$$

かつ

$$r = 0 \ \text{または}\ \phi(r) < \phi(b)$$

が成り立つ．
- R が**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) であるとは，R の任意のイデアル $I \subset R$ に対してある $r \in R$ が存在して $I = Rr$ を充たすこと．

- R が**一意分解整域** (unique factorization domain: UFD) であるとは，以下の 2 条件を充たすこと：

  (UFD-1) $\forall r \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ に対して，素元 $p_1, \dots, p_n \in R$ が存在して $r = p_1 \cdots p_n$ と書ける．このとき $p_1, \dots, p_n$ を r の**素因子**，素因子の積 $p_1 \cdots p_n$ を a の**素元分解**と呼ぶ．

  (UFD-2) $p_1, \dots, p_n,\ q_1, \dots, q_m \in R$ が素元ならば $n = m$ であり，かつある $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して，$1 \leq \forall i \leq n$ に対して p_i と $q_{\sigma(i)}$ が同伴となる．

次の定理は整域の理論において極めて重要である：

定理 A.5.3:

Euclid 整域 $\Longrightarrow$ 単項イデアル整域 $\Longrightarrow$ 一意分解整域

証明 **Euclid 整域 $\Longrightarrow$ PID**

R が Euclid 整域であるとする．$R = \{0\}$ ならば $R = R0$ となるので PID である．

$R \neq \{0\}$ とする．R の任意の非自明なイデアル I をとる．$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は整列集合なので $\phi(x) := \min\left\{\, \phi(y) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; y \in I \setminus \{0\} \,\right\}$ が存在する．Euclid 整域の定義から $\forall z \in I$ に対してある $q, r \in R$ が存在して

$$z = qx + r$$

かつ $r = 0$ または $\phi(r) < \phi(x)$ が成り立つが，もし $r \neq 0$ ならば $r \in I \setminus \{0\}$ となり x の最小性に矛盾する．よって $r = 0$ であり，$I = Rx$ が言えた．

PID $\Longrightarrow$ UFD

■

系 A.5.4:

任意の体[a] $\mathbb{K}$ に対して $\mathbb{K}[t]$ は Euclid 整域である．従って PID でもあり UFD でもある．

[a] 定義から可換である．

証明 命題 A.5.1 より従う． ■

命題 A.5.3:

可換環 R について以下が成り立つ：

(1) R が整域ならば，R の任意の素元は既約元である．

(2) R が UFD ならば，R の任意の既約元は素元である．

(3) R が PID ならば，R の任意の $\{0\}$ でない素イデアルは極大イデアルである．

証明 (1) R が整域だとする．このとき任意の素元 $p \in R \setminus \{0\}$ をとると，$Rp \subsetneq R$ なので $p \notin R^\times$ である．$a, b \in R$ に対して $p = ab$ が成り立つとする．Rp が素イデアルなので $a \in Rp$ または $b \in Rp$ が成り立つ．R は可換なので $a \in Rp$ としても一般性を失わない．このときある $q \in R$ が存在して $a = qp$ と

書ける．$ab = p$ なので $qpb = pqb = p \iff p(qb-1) = 0$ が成り立つ．R は整域で $p \neq 0$ なので $qb - 1 = 0 \iff qb = 1$, i.e. $b \in R^\times$ が分かった．よって p は既約である．

(2) R が UFD だとする．このとき任意の既約元 $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ をとると，その素元分解 $p = p_1 \cdots p_n \quad (n \geq 1)$ が存在する．$n \geq 2$ だとすると，$p_1 \notin R^\times$ なので p の既約性から $q := p_2 \cdots p_n \in R^\times$ となる．然るにこのとき $Rq \subset Rp_2 \subsetneq R$ となり矛盾．よって背理法から $n = 1$ が言えた．

(3) R のゼロでない任意の素イデアル I をとる．R は PID なので $p \in R$ が存在して $I = Rp$ と書けるが，素元の定義からこのとき $p \in R$ は素元であり，および命題 A.5.3-(1) から既約元である．
ここで，$I \subset J \subsetneq R$ なる任意のイデアル J をとる．R は PID なので $q \in R$ が存在して $J = Rq$ と書けるが，$Rq \subsetneq R$ なので $q \notin R^\times$ である．このときある $u \in R$ が存在して $p = qu$ と書けるが，p は既約元なので $u \in R^\times$ でなくてはならない．よって $Rp = Rq$ となり，Rp は極大イデアルである．命題 A.5.2-(2) より R/Rp は体である．

■

命題 A.5.4: 単項イデアル整域における Bézout の等式

R を PID とする．このとき，$\forall (a_1, a_2) \in R^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\forall b \in R$ に対して以下は同値である：

(1) $Ra_1 + Ra_2 = Rb$
(2) $\gcd(a_1, a_2) = b$

証明

(1) $\Longrightarrow$ (2)

$Ra_1 + Ra_2 = Rb$ とする．このとき $a_i \in Rb \quad (i = 1, 2)$ なのである $q_i \in R$ が存在して $a_i = q_i b$ と書ける．i.e. $b \mid a_i$ である．

$c \in R$ を a_1, a_2 の任意の公約元とする．このときある $r_i \in R$ が存在して $a_i = r_i c$ と書ける．仮定より $b \in Ra_1 + Ra_2$ なので，$s_i \in R$ が存在して

$$b = s_1 a_1 + s_2 a_2 = (s_1 r_1 + s_2 r_2) c$$

と書ける．i.e. $c \mid b$ が言えた．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

$\gcd(a_1, a_2) = b$ とする．R は PID なので，ある $c \in R$ が存在して $Ra_1 + Ra_2 = Rc$ と書ける．必要性の証明から $c = \gcd(a_1, a_2)$ が言えるので，$u \in R^\times$ が存在して $b = uc$ と書ける．よって $Ra_1 + Ra_2 = Rc = Rb$ である．■

系 A.5.5: 単項イデアル整域における Bézout の等式

R を PID とする．このとき，$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in R^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, $\forall b \in R$ に対して以下は同値である：

(1) $Ra_1 + \cdots + Ra_n = Rb$
(2) $\gcd(a_1, \ldots, a_n) = b$

定義 A.5.6: 体の拡大

- 体 $\mathbb{L}$ が体 $\mathbb{K}$ の**拡大体** (extention field) であるとは，$\mathbb{K}$ が $\mathbb{L}$ の部分体になっていることを言う．このことを記号で $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ と書き，**体の拡大** (field extention) であると言う．
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の拡大とするとき，部分体 $\mathbb{M} \subset \mathbb{L}$ であって $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$ を充たすものを $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ の**中間体**と呼ぶ．
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の拡大とするとき，$\mathbb{L}$ を $\mathbb{K}$-ベクトル空間と見做したときの次元を $\mathbb{L}$ の $\mathbb{K}$ 上の**拡大次数**と呼び，$[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$ と書く．
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の拡大とする．$x \in \mathbb{L}$ が $\mathbb{K}$ 上**代数的**であるとは，x がある $\mathbb{K}$-係数多項式 $f(t) \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\}$ の根となっていること[a]を言う．$\forall x \in \mathbb{L}$ が $\mathbb{K}$ 上代数的ならば，体の拡大 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ は**代数拡大**であるという．

[a] $x \in \mathbb{K}$ とは限らないので，先ほど採用した定義によると厳密には根とは呼べない．

命題 A.5.5: 最小多項式の存在

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の代数拡大とし，$\forall \alpha \in \mathbb{L}$ を 1 つ与える．このとき $I_\alpha := \left\{ f(t) \in \mathbb{K}[t] \;\middle|\; f(\alpha) = 0 \right\}$ とおくと，以下の条件を充たす $f(t) \in I_\alpha$ が定数倍を除いて一意的に存在する：

(1) $f(t) \neq 0$

(2) $f(t)$ は I_α の元のうち $\deg f$ が最小のものの 1 つである．

(3) $f(t)$ は I_α の全ての元の約元である．

(4) $f(t)$ は既約

<u>**証明**</u> $\mathbb{K}$-結合代数の準同型

$$\phi\colon \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{L},\ g(t) \longmapsto g(\alpha)$$

に関して $\operatorname{Ker}\phi = I_\alpha$ であり，従って I_α は $\mathbb{K}[t]$ のイデアルである．α は $\mathbb{K}$ 上代数的なので $I_\alpha \neq \{0\}$ であり，系 A.5.4 より $\mathbb{K}[t]$ は PID なので，ある $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ が存在して $I_\alpha = \mathbb{K}[t]f(t)$ と書ける．このとき定理 A.5.3 の証明から $f(t)$ は $I_\alpha \setminus \{0\}$ の元のうち次数が最小であり，$\mathbb{K}[t]^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ なので定数倍を除いて一意に定まる．

あとは $f(x)$ の既約性を示す．実際，準同型定理から $\mathbb{K}[t]/I_\alpha \cong \operatorname{Im}\phi = \mathbb{K}[\alpha]$ が言えるが，$\mathbb{K}[\alpha]$ は体なので命題 A.5.2-(2) より $I_\alpha = \mathbb{K}[t]f(t)$ は素イデアルであり，素元の定義から $f(t)$ は素元．よって命題 A.5.3-(1) から $f(x)$ は既約元である． ■

定義 A.5.7: 最小多項式

命題 A.5.5 の $f(t) \in I_\alpha$ がモニックならば，$f(t)$ のことを α の $\mathbb{K}$ 上の**最小多項式** (minimal polynomial) と呼ぶ．

命題 A.5.5 では $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の代数拡大としたが，$\mathbb{L}$ を $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ に置き換えても (1)-(3) はほぼ同じ証明により成り立つ[*11]．このようなときも $f(t) \in I_\alpha$ のことを $\alpha \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ の**最小多項式**と呼ぶ．では，定理 A.5.2

[*11] $I_\alpha \neq \{0\}$ の証明のみ変更を要する．

の別証明を与えよう：

定理 A.5.6: 広義固有空間分解-2

$x \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ を与え，

- x の相異なる全ての固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$
- λ_i の重複度を p_i

とおく．このとき $\mathbb{K}^n$ の内部直和分解

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$$

が一意的に存在し，かつ $\dim W(\lambda_i) = p_i$ である．

証明 $1 \leq \forall i \leq k$ に対して $\phi_i(t) \coloneqq \prod_{j \neq i}(t - \lambda_i)^{p_i} \in \mathbb{K}[t]$ とおく． ■

参考文献

[EGH$^+$11] Pavel I Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina. *Introduction to representation theory*. American Mathematical Soc., 2011.

[Hum72] James E Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer, 1972.

[佐武 87] 佐武一郎. リー環の話. 日本評論社, 1987.

[小林 05] 小林俊行, 大島利雄. リー群と表現論. 岩波書店, 2005.

[神保 90] 神保道夫. 量子群とヤン・バクスター方程式. 丸善出版, 1990.