代数トポロジー ノート

高間俊至

2024 年 6 月 19 日

0.0　前書き

本資料は，2022 年 11 月-2023 年 3 月に Physics Lab. 2023 数理物理班内部で行った [3] の輪読ゼミの記録である．数理物理班の他の解説記事に現れる代数トポロジーの用語の辞書として使えると思う．

本文中の圏[*1]の扱いは，主に思考の整理の道具としてである．圏論については [11]，[1]，[4] を大いに参考にした．

理論物理学において代数トポロジーが平然と登場するようになって久しい一方で，初学者にとってとっつきやすくかつ適度に系統的な教科書が中々見つからない．本資料執筆の動機はこのギャップを埋めることだったが，時間と筆者の実力の不足によって，2023 年 5 月の時点では中途半端な内容になってしまった．現時点で完結していない要素は主に

- 第 2, 3 章で CW 複体に触れる時間的余裕がなかったこと，
- 第 4 章のスペクトル系列の解説が未完であること，
- 第 5 章で Poincaré 双対定理を紹介するにとどまったこと，
- 第 6 章以降の重要な命題がところどころ証明が不十分であること．特に相対ホモトピー群と Hurewicz の定理の解説が間に合わなかったこと．

である．これらについては後日補完したいと考えている．

また，できるだけ正確な記述を試みたが，専門家の検閲を介しておらず重大な誤りが含まれている可能性があるのでご了承いただきたい．

（2024/5/19 追記）この資料を管理している github を公開しました．最新版の pdf は `https://github.com/T2sp/geometry_notes.git` の `algtopo/out/` のフォルダから入手できます．以後，筆者の余力があるときに順次更新していこうと思います．

[*1] なお，本文中のこの色の箇所は相互参照が付けられており，クリックすることで該当する定義，定理などにジャンプすることができる．

目次

第 1 章

必要最低限の圏論

1.1 諸定義

ものの集まりを**クラス** (class) と呼ぶことにする[*1]．3 つのもの $\mathcal{C}$ は以下の要素からなるとする：

(1) クラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$．その元は**対象** (object) と呼ばれる．

(2) $\forall X,\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$．

(3) $\forall X,\ Y,\ Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像 $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Z)$．

!

- 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ は記号として $\mathrm{Hom}(X,\ Y)$ とか $\mathcal{C}(X,\ Y)$ とも書かれる．
- 元 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ のことを X から Y への**射** (morphism) と呼び，$\boldsymbol{f\colon X \to Y}$ と書く．
- 写像 $\circ$ のことを**合成** (composite) と呼ぶ．射 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ の合成は $\boldsymbol{g \circ f\colon X \to Z}$ と書かれる．

定義 1.1: 圏

$\mathcal{C}$ が**圏** (category) であるとは，次の 2 条件を充たすことを言う：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して**恒等射** (identity) と呼ばれる射 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ X)$ が存在して，$\forall W,\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\ X)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ について以下が成り立つ：

$$1_X \circ f = f, \quad g \circ 1_X = g$$

(2) $\forall X,\ Y,\ Z,\ W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ Z)$, $\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\ W)$ に対して**結合則** (associativity) が成り立つ．i.e.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ W)$$

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を全ての集合とし，それらの間の全ての写像を射とし，$\circ$ を通常の写像の合成とするものの集まり $\mathbf{Sets}$ は圏を成す．

[*1] 集合全体の集合を考えると Russell のパラドクスに陥る．これを避けるために，集合よりも上位の概念であるクラスを新しく導入する必要がある．なお，考察の対象とする集合の範囲を**宇宙** (universe) という大きな集合に属するものに限る流儀もある．この場合，圏を扱うときに既知の集合論をそのまま適用できるが，集合論の公理に宇宙の存在の公理を追加する必要がある．

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を全ての位相空間とし，それらの間の全ての連続写像を射とし，$\circ$ を通常の写像の合成とするものの集まり $\mathbf{Top}$ は圏を成す．
- 可換環 R について，$\mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を全ての R 加群とし，それらの間の全ての R 準同型を射とし，$\circ$ を通常の写像の合成とするものの集まり $R\text{-}\mathbf{Mod}$ は圏を成す．

定義 1.2: 小圏・モノイド

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が集合であるような圏 $\mathcal{C}$ は**小圏** (small category) と呼ばれる．
- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が一点集合であるような圏 $\mathcal{C}$ は**モノイド** (monoid) と呼ばれる．

定義 1.3: 単射，全射

$\mathcal{C}$ を圏，$A,\ B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ B)$ とする．

- f が**単射** (monomorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f^* \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ B), \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- f が**全射** (epimorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} {}^*f \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\ X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ X), \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．

定義 1.4: 同型射

圏 $\mathcal{C}$ と射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ をとる．

- f が**同型射** (isomorphism) であるとは，

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ X), \quad g \circ f = 1_X \ \text{かつ}\ f \circ g = 1_Y$$

  が成り立つことを言う．このときの射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ X)$ のことを f の**逆** (inverse) と呼ぶ．
- 同型射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ が存在するとき，X と Y は**同型** (isomorphic) であると言う．
- 対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ X)$ の元のうち同型射であるもの全体の集合は合成によって群を成す．この部分集合を $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ X)$ と書き，X の $\mathcal{C}$ における**自己同型群** (automorphism group) と呼ぶ．

定義 1.5: 部分対象

$\mathcal{C}$ を圏とする．

- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の **部分対象** (subobject) とは，$B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と単射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ の組 (B, f) のことを言う．
- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分対象 (B, f)，(C, g) が**同値** (equivalent) であるとは，ある同型射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ であって $g \circ \varphi = f$ を充たすものが存在することを言う[a]．

[a] $B \simeq C$ や $f \simeq g$ と略記することがある．

定義 1.6: 商対象

$\mathcal{C}$ を圏とする．

- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の **商対象** (quotient bject) とは，$B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と全射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,)$ の組 (B, f) のことを言う．
- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分対象 (B, f)，(C, g) が**同値** (equivalent) であるとは，ある同型射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ であって $\varphi \circ f = g$ を充たすものが存在することを言う[a]．

[a] $B \simeq C$ や $f \simeq g$ と略記することがある．

定義 1.7: 充満部分圏

2 つの圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ をとる．圏 $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ の**充満部分圏** (full subcategory) であるとは，次の 2 条件が充たされることを言う：

(1) クラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
(2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

定義 1.8: 反対圏

圏 $\mathcal{C}$ に対して，その**反対圏** (opposite category) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を次のように定義する：

$$\begin{gathered}\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad \forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})\end{gathered}$$

1.2 関手と自然変換

圏を対象と考えたとき，射にあたるのは**関手** (functor) である．
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とする．$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の対応

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は次の 2 種類の対応付けから成るとする：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，記号 $F(X)$ で書かれる $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ の元を一意に対応づける[*2].
(2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射を移す写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

を対応付ける.

定義 1.9: 共変関手

$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が**共変関手** (covariant functor) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(恒等射を保つ) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$F(1_X) = 1_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), F(X)\bigr)$$

が成り立つ.

(合成を保つ) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Z)$ に対して

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), F(Z)\bigr)$$

が成り立つ.

射の向きを逆にすると**反変関手**の定義になる．いま $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とし，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の対応

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は次の 2 種類の対応付けから成るとする：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，記号 $F(X)$ で書かれる $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ の元を一意に対応づける.
(2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射を移す写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(Y), F(X)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

定義 1.10: 反変関手

$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**反変関手** (contravariant functor) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(恒等射を保つ) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$F(1_X) = 1_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), F(X)\bigr)$$

が成り立つ.

(合成を保つ) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Z)$ に対して

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(Z), F(X)\bigr)$$

が成り立つ.

関手を対象と考えたときに，射にあたるものが次に定義する**自然変換**である：

[*2] いわば，「写像」$F\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ とでも言うべきもの.

定義 1.11: 自然変換

2 つの共変関手 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について，以下のような対応 $\varphi\colon F \to G$ のことを**自然変換** (natural transformation) と呼ぶ：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射

$$\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X),\, G(X)\bigr)$$

を対応付ける．

(2) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ について図式 1.1 が可換になる．

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_Y} \\
G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y)
\end{array}$$

図 1.1: 自然変換

共変関手 F から G への自然変換全体が成すクラスを $\mathbf{Nat}(F,\, G)$ と書くことにする．

定義 1.12: 自然同値

2 つの共変関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ の間の自然変換 $\varphi\colon F \longrightarrow G$ を与える．

- φ が**自然同値** (natural equivalence) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X),\, G(X)\bigr)$ が同型射であることを言う．
- 共変関手 F, G が**自然同値** (naturally equivalent) であるとは，F から G への自然同値が存在することを言う．
- 共変関手 F に対し，$\mathrm{id}F(X)\colon F(X) \longrightarrow F(X)$ により定まる F から F 自身への自然変換 φ を**恒等自然変換** (identity natural transformation) と呼ぶ．

定義 1.13:

共変関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える.

- F が**忠実** (faithful) であるとは, $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

  が単射であること.
- F が**充満** (full) であるとは, $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

  が全射であること.
- F が**本質的全射** (essentially surjective) であるとは, $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して $F(X)$ が Y と同型になること.

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶことがある.

第 2 章

ホモロジーの定義

補題 2.1: 商加群の普遍性

M, L を加群，$f\colon M \to L$ を準同型とする．部分加群 $N \subset M$ が

$$N \subset \operatorname{Ker} f$$

を充たすならば，準同型 $\bar{f}\colon M/N \to L$ であって標準射影

$$p\colon M \to M/N,\ x \mapsto x + N$$

に対して

$$f = \bar{f} \circ p$$

を充たす，i.e. 図式 2.1 を可換にするようなものが一意に存在する．このような準同型 $\bar{f}\colon M/N \to L$ を $f\colon M \to L$ によって M/N 上に**誘導される準同型** (induced homomorphism) と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & L \\ M/N \arrow[ur, dashed, red, "\exists!\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

図 2.1: 商加群の普遍性

証明【例 A.3.1】を参照. ■

2.1 チェイン複体の定義と代数的性質

まず，チェイン複体の定義をする．この節では一貫して R を環とする.

定義 2.1: チェイン複体

左 R 加群の族 $\{C_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ と左 R 加群の準同型写像の族 $\{\partial_q\colon C_q \longrightarrow C_{q-1}\}_{q\in\mathbb{Z}}$ が成す R-**Mod** の図式

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \tag{2.1.1}$$

が**チェイン複体** (chain complex) であるとは，$\forall q \geq 0$ に対して

$$\partial_q \partial_{q+1} = 0$$

が成り立つことを言う．チェイン複体 (2.1.1) のことを $(\boldsymbol{C_\bullet}, \boldsymbol{\partial_\bullet})$ または単に $\boldsymbol{C_\bullet}$ と書く．

- C_q の元を $\boldsymbol{q}$**-チェイン** (q-chain),
- C_q の部分加群

$$\mathrm{Ker}\bigl(\partial_q\colon C_q \to C_{q-1}\bigr) \subset C_q$$

を**第 $\boldsymbol{q}$ サイクル群**[a]，その元を $\boldsymbol{q}$**-サイクル** (q-cycle),
- C_q の部分加群

$$\mathrm{Im}\bigl(\partial_{q+1}\colon C_{q+1} \to C_q\bigr) \subset C_q$$

を**第 $\boldsymbol{q}$ バウンダリー群**[b]，その元を $\boldsymbol{q}$**-バウンダリー** (q-boundary)

と呼ぶ．

[a] 記号としては $Z_q(C_\bullet)$ と書かれることが多い．
[b] 記号としては $B_q(C_\bullet)$ と書かれることが多い．

$\partial_q\partial_{q+1} = 0$ から $\mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \subset \mathrm{Ker}\,\partial_q$ が言える[*1]．従って $\forall q \geq 0$ に対して商加群

$$\mathrm{Ker}\,\partial_q / \mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \tag{2.1.2}$$

を定義することができる．

定義 2.2: ホモロジー群

式 (2.2) の商加群を**第 $\boldsymbol{q}$ ホモロジー群**と呼び，$\boldsymbol{H_q(C_\bullet)}$ と書く．

2.1.1 チェイン写像

[*1] 任意の q-バウンダリー $b \in \mathrm{Im}\,\partial_{q+1}$ を 1 つとる．このときバウンダリー群の定義から，$q+1$-チェイン $b' \in C_{q+1}$ が存在して $b = \partial_{q+1}(b')$ と書ける．故に $\partial_q\partial_{q+1} = 0$ から $\partial_q(b) = \partial_{q+1}\bigl(\partial_q(b')\bigr) = 0$，i.e. $b \in \mathrm{Ker}\,\partial_q$ が成り立つ．

定義 2.3: チェイン写像

2 つのチェイン複体 $(C_\bullet,\, \partial_\bullet)$, $(D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ および準同型写像の族 $f_\bullet := \bigl\{f_q\colon C_q \longrightarrow D_q\bigr\}_{q\in\mathbb{Z}}$ を与える．$f_\bullet$ がチェイン複体 $C_\bullet$ からチェイン複体 $D_\bullet$ への**チェイン写像** (chain map) であるとは，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\partial'_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$$

が成り立つことを言う．i.e. 図式 2.2 が可換になると言うこと．チェイン写像 $f_\bullet$ のことを $\boldsymbol{f_\bullet\colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)}$ や $\boldsymbol{f_\bullet\colon C_\bullet \longrightarrow D_\bullet}$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

図 2.2: チェイン写像

細かいことを言うと，チェイン複体は左 R 加群の圏 R-**Mod** の図式として定義された．従って，チェイン写像 $f_\bullet\colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ という記法は R-**Mod** の可換図式 2.2 そのものの略記

$$\begin{tikzcd}
\Bigl(\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_\bullet"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & \cdots\Bigr) \\
\Bigl(\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots\Bigr)
\end{tikzcd}$$

として理解できる．このときチェイン写像

$$\begin{tikzcd}
\Bigl(\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_\bullet"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & \cdots\Bigr) \\
\Bigl(\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots\Bigr)
\end{tikzcd}$$

とチェイン写像

$$\begin{tikzcd}
\Bigl(\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] \arrow[d, "g_\bullet"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots\Bigr) \\
\Bigl(\cdots \arrow[r, "\partial''_{q+2}"] & E_{q+1} \arrow[r, "\partial''_{q+1}"] & E_q \arrow[r, "\partial''_q"] & E_{q-1} \arrow[r, "\partial''_{q-1}"] & \cdots\Bigr)
\end{tikzcd}$$

の**合成**

$$\begin{tikzcd}
\Bigl(\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "g_\bullet \circ f_\bullet"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & \cdots\Bigr) \\
\Bigl(\cdots \arrow[r, "\partial''_{q+2}"] & E_{q+1} \arrow[r, "\partial''_{q+1}"] & E_q \arrow[r, "\partial''_q"] & E_{q-1} \arrow[r, "\partial''_{q-1}"] & \cdots\Bigr)
\end{tikzcd}$$

を，R-**Mod** の可換図式[*2]

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots & D_{q+1} \arrow[d, "g_{q+1}"] & D_q \arrow[d, "g_q"] & D_{q-1} \arrow[d, "g_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial''_{q+2}"] & E_{q+1} \arrow[r, "\partial''_{q+1}"] & E_q \arrow[r, "\partial''_q"] & E_{q-1} \arrow[r, "\partial''_{q-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

によって定義する．するとチェイン写像 $1_{C_\bullet} \coloneqq \left\{1_{C_q}\colon C_q \longrightarrow C_q\right\}_{q\in\mathbb{Z}}$ が恒等射になり，もう 1 つのチェイン写像 $h_\bullet\colon (E_\bullet,\, \partial''_\bullet) \longrightarrow (F_\bullet,\, \partial'''_\bullet)$ を与えたとき明らかに結合則

$$
(h_\bullet \circ g_\bullet) \circ f_\bullet = h_\bullet \circ (g_\bullet \circ f_\bullet)
$$

が成り立つ．したがって R-**Mod** 上の**チェイン複体の圏 Chain** が

- チェイン複体を対象とする．
- チェイン写像を射とする．
- 射の合成を，上述の通りとする．

として構成された．

補題 2.2:

チェイン写像 $f_\bullet(C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ を与える．このとき，$\forall q \in \mathbb{Z}$ について以下が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
f_q\big(\mathrm{Ker}\, \partial_q\big) &\subset \mathrm{Ker}\, \partial'_q \\
f_q\big(\mathrm{Im}\, \partial_{q+1}\big) &\subset \mathrm{Im}\, \partial'_{q+1}
\end{aligned}
$$

証明 一つ目は

$$
\begin{aligned}
z \in \mathrm{Ker}\, \partial_q &\iff \partial_q(z) = 0 \\
&\implies \partial'_q\big(f_q(z)\big) = f_{q-1}\big(\partial_q(z)\big) = 0 \\
&\iff f_q(z) \in \mathrm{Ker}\, \partial'_q
\end{aligned}
$$

より従う．二つ目は

$$
\begin{aligned}
b \in \mathrm{Im}\, \partial_{q+1} &\iff \exists \beta \in C_{q+1},\ b = \partial_{q+1}(\beta) \\
&\implies f_q(b) = \partial'_{q+1}\big(f_{q+1}(\beta)\big) \in \mathrm{Im}\, \partial'_{q+1}
\end{aligned}
$$

より従う． ■

チェイン写像 $f_\bullet\colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ を与える．標準的射影のことを

$$
\begin{aligned}
\pi_q\colon\ \mathrm{Ker}\, \partial_q &\longrightarrow H_q(C_\bullet),\ z \longmapsto z + \mathrm{Im}\, \partial_{q+1} \\
\varpi_q\colon\ \mathrm{Ker}\, \partial'_q &\longrightarrow H_q(D_\bullet),\ z \longmapsto z + \mathrm{Im}\, \partial'_{q+1}
\end{aligned}
$$

[*2] $\partial'_\bullet$ を顕に書いた図式の可換性から，この図式も可換である．

とおくと，補題 3.2 から

$$(\varpi_q \circ f_{q+1})(\operatorname{Im} \partial_q) \subset \varpi_q(\operatorname{Im} \partial'_{q+1}) = \{0_{H_q(C_\bullet)}\}$$

が成り立つ．i.e. $\operatorname{Im} \partial_{q+1} \subset \operatorname{Ker}(\varpi_q \circ f_q)$ である．従って商加群の普遍性から，次のような可換図式を書くことができる：

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} \partial_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\pi_q"'] & \operatorname{Ker} \partial'_q \arrow[r, "\varpi_q"] & H_q(D_\bullet) \\
H_q(C_\bullet) \arrow[urr, dashed, red, "\exists ! \overline{\varpi_q \circ f_q}"'] & &
\end{tikzcd}$$

図 2.3: 誘導準同型

定義 2.4: チェイン写像による誘導準同型

図式 2.3 中に赤色で示した well-defined な準同型

$$\overline{\varpi_q \circ f_q} \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_q(D_\bullet),\ z + \operatorname{Im} \partial_{q+1} \longmapsto f_q(z) + \operatorname{Im} \partial'_{q+1}$$

のことをチェイン写像 $f_\bullet \colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ による**誘導準同型** (induced homomorphism) と呼び，$\boldsymbol{H_q(f_\bullet)}$ と書く．

! 代数トポロジーの教科書を読んでいると，しばしば誘導準同型 $H_q(f_\bullet)$ が $\boldsymbol{f_*}$ とか $\boldsymbol{f_\bullet}$ と略記されているのを目にする．このような記法は眼に優しい一方で，チェイン写像との区別が付きにくいという難点がある．

命題 2.1: H_q の関手性

(1) $\forall (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Chain})$ に対して

$$H_q(1_\bullet) = 1_{H_q(C_\bullet)}$$

が成り立つ．

(2) 2 つのチェイン写像 $f_\bullet \colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$, $g_\bullet \colon (D_\bullet,\, \partial'_\bullet) \longrightarrow (E_\bullet,\, \partial''_\bullet)$ を与える．このとき，チェイン写像の合成 $g_\bullet \circ f_\bullet \colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (E_\bullet,\, \partial''_\bullet)$ および $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H_q(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_q(g_\bullet) \circ H_q(f_\bullet)$$

が成り立つ．

<u>証明</u>　(1) チェイン写像 $1_{C_\bullet} \colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (C_\bullet,\, \partial_\bullet)$ の誘導する準同型は

$$H_q(1_{C_\bullet}) \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_q(C_\bullet),\ z + \operatorname{Im} \partial_{q+1} \longmapsto 1_{C_q}(z) + \operatorname{Im} \partial_{q+1} = z + \operatorname{Im} \partial_{q+1}$$

である．i.e. $H_q(1_{C_\bullet}) = 1_{H_q(C_\bullet)}$ である．

(2) $g_\bullet \circ f_\bullet$ が誘導する準同型は可換図式[*3]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\partial_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\,\partial'_q \arrow[r, "g_q"] & \mathrm{Ker}\,\partial''_q \arrow[r] & H_q(E_\bullet) \\
H_q(C_\bullet) \arrow[urrr, dashed, red, "\exists! H_q(g_\bullet \circ f_\bullet)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

によって特徴付けられる．一方，誘導準同型の図式 2.3 を組み合わせて可換図式[*4]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\partial_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\,\partial'_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\,\partial''_q \arrow[r] & H_q(E_\bullet) \\
H_q(C_\bullet) \arrow[r, dashed, red, "\exists! H_q(f_\bullet)"] & H_q(D_\bullet) \arrow[urr, dashed, red, "\exists! H_q(g_\bullet)"] & &
\end{tikzcd}$$

を書くこともできる．ところが，商加群の普遍性より 2 つの可換図式中の赤い矢印は一意である．i.e.

$$H_q(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_q(g_\bullet) \circ H_q(f_\bullet)$$

が成り立つ．

■

命題 2.1 より

- チェイン複体 $C_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Chain})$ をホモロジー群 $H_q(C_\bullet) \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に，
- チェイン写像 $f_\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Chain}}(C_\bullet, D_\bullet)$ を誘導準同型 $H_q(f_\bullet) \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}\big(H_q(C_\bullet), H_q(D_\bullet)\big)$ に

対応づける対応

$$H_q : \mathbf{Chain} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$$

が関手であることが分かった．

2.1.2　チェイン・ホモトピー

チェイン・ホモトピーの定義をする：

[*3] $\mathrm{Ker}\,\partial_q \longrightarrow H_q(C_\bullet)$ と $\mathrm{Ker}\,\partial''_q \longrightarrow H_q(E_\bullet)$ は標準的射影．
[*4] $\mathrm{Ker}\,\partial_q \longrightarrow H_q(C_\bullet)$ と $\mathrm{Ker}\,\partial'_q \longrightarrow H_q(D_\bullet)$ と $\mathrm{Ker}\,\partial''_q \longrightarrow H_q(E_\bullet)$ は標準的射影．

定義 2.5: チェイン・ホモトピー

2 つのチェイン複体 $(C_\bullet,\, \partial_\bullet)$, $(D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$，および 2 つのチェイン写像 $f_\bullet,\, g_\bullet \colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ を与える．

- 左 R 加群の準同型写像の族 $\Phi_\bullet = \bigl\{\Phi_q \colon C_q \to D_{q+1}\bigr\}_{q\in\mathbb{Z}}$ が $f_\bullet$ を $g_\bullet$ に繋ぐ**チェイン・ホモトピー** (chain homotopy) であるとは，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して以下が成り立つことを言う：

$$\partial'_{q+1} \circ \Phi_q + \Phi_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q$$

- $f_\bullet$ を $g_\bullet$ に繋ぐチェイン・ホモトピーが存在するとき，$f_\bullet$ と $g_\bullet$ は**チェイン・ホモトピック** (chain homotopic) であるといい，$\boldsymbol{f_\bullet \simeq g_\bullet}$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d] \arrow[dl, red, "\Phi_{q+1}"'] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d] \arrow[dl, red, "\Phi_q"'] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d] \arrow[dl, red, "\Phi_{q-1}"'] & \cdots \arrow[dl, red, "\Phi_{q-2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

図 2.4: チェイン・ホモトピー

次の命題はチェイン・ホモトピーを考える強い動機となる．

命題 2.2:

チェイン写像 $f_\bullet,\, g_\bullet \colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ がチェイン・ホモトピックならば，$\forall q \geq 0$ に対して

$$H_q(f_\bullet) = H_q(g_\bullet) \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_q(D_\bullet)$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> $f_\bullet,\, g_\bullet$ を繋ぐチェイン・ホモトピー $\Phi_\bullet$ が存在するとする．このとき誘導準同型の定義より $\forall u + \mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \in H_q(C_\bullet)$ に対して

$$\begin{aligned}
\bigl(H_q(g_\bullet) - H_q(f_\bullet)\bigr)(u + \mathrm{Im}\,\partial_{q+1}) &= \bigl(g_q(u) + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}\bigr) - \bigl(f_q(u) + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}\bigr) \\
&= (g_q - f_q)(u) + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1} \\
&= \Bigl(\partial'_{q+1}\bigl(\Phi_q(u)\bigr) + \Phi_{q-1}\bigl(\partial_q(u)\bigr)\Bigr) + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1} \\
&= \Phi_{q-1}\bigl(\partial_q(u)\bigr) + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}
\end{aligned}$$

だが，ホモロジー群の定義より $u \in \mathrm{Ker}\,\partial_q$ なので最右辺は $0_{H_q(D_\bullet)}$ である．i.e. $H_q(g_\bullet) - H_q(f_\bullet) = 0$ が言えた． ■

2.1.3 連結準同型とホモロジー長完全列

3 つのチェイン複体 $(A_\bullet \partial_\bullet), (B_\bullet,\, \partial'_\bullet), (C_\bullet,\, \partial''_\bullet)$ および二つのチェイン写像 $i_\bullet\colon (A_\bullet \partial_\bullet) \longrightarrow (B_\bullet,\, \partial'_\bullet)$, $p_\bullet\colon (B_\bullet \partial'_\bullet) \longrightarrow (C_\bullet,\, \partial''_\bullet)$ を与える．可換図式[*5]

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial_{q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial'_{q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial''_{q+2}"] & \\
0 \arrow[r] & A_{q+1} \arrow[r, "i_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & B_{q+1} \arrow[r, "p_{q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{q+1}"] & C_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{q} \arrow[r, "i_{q}"] \arrow[d, "\partial_{q}"] & B_{q} \arrow[r, "p_{q}"] \arrow[d, "\partial'_{q}"] & C_{q} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[r, "i_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & B_{q-1} \arrow[r, "p_{q-1}"] \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q-1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

図 2.5

において各列

$$
0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{i_q} B_q \xrightarrow{p_q} C_q \longrightarrow 0 \tag{2.1.3}
$$

が完全であると仮定する．

定義 2.6: チェイン複体の短完全列

上述の仮定が成り立つとき，圏 **Chain** の図式

$$
0 \longrightarrow (A_\bullet,\, \partial_\bullet) \xrightarrow{i_\bullet} (B_\bullet,\, \partial'_\bullet) \xrightarrow{p_\bullet} (C_\bullet,\, \partial''_\bullet) \longrightarrow 0
$$

は**チェイン複体の短完全列**であると言われる．

命題 2.3: ホモロジー長完全列 (zig-zag lemma)

チェイン複体の短完全列

$$
0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{i_q} B_q \xrightarrow{p_q} C_q \longrightarrow 0
$$

を与える．

このとき $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して**連結準同型** (connecting homomorphism) と呼ばれる準同型写像

$$
\delta_q\colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_{q-1}(A_\bullet)
$$

[*5] $0 \longrightarrow A_\bullet$ の部分は包含写像 $0 \longmapsto 0$ で，$C_\bullet \longrightarrow 0$ の部分は零写像 $u \longmapsto 0$ であり，どちらも R 加群の準同型写像である．

が定まり，R-**Mod** の図式

$$\begin{aligned}\cdots \xrightarrow{\delta_{q+1}} H_q(A_\bullet) \xrightarrow{H_q(i_\bullet)} H_q(B_\bullet) \xrightarrow{H_q(p_\bullet)} H_q(C_\bullet) \\ \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A_\bullet) \xrightarrow{H_{q-1}(i_\bullet)} H_{q-1}(B_\bullet) \xrightarrow{H_{q-1}(p_\bullet)} H_{q-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{q-1}} \cdots\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

は完全列になる．(2.1.4) のことを**ホモロジー長完全列** (homology long exact sequence) と呼ぶ．

<u>証明</u> チェイン複体の短完全列の定義より (2.1.3) が完全なので，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して i_q は単射，p_q は全射で，かつ $\operatorname{Ker} p_q = \operatorname{Im} i_q$ が成り立つ．

連結準同型の構成

$\forall q \in \mathbb{Z}$ を 1 つ固定する．手始めに $\forall c \in \operatorname{Ker} \partial''_q$ の行き先 $a \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ を見繕う．

手順 (1) p_q は全射なので，ある $b \in B_q$ が存在して $c = p_q(b)$ と書ける：

$$\begin{tikzcd} \exists b \arrow[r, "p_q"] & c \arrow[d, "\partial''_q"] \\ & 0 \end{tikzcd}$$

手順 (2) 図式 2.5 が可換なので

$$p_{q-1}\bigl(\partial'_q b\bigr) = \partial''_q\bigl(p_q(b)\bigr) = \partial''_q c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\partial'_q b \in \operatorname{\mathbf{Ker}} p_{q-1}}$$

が成り立つ：

$$\begin{tikzcd} \exists b \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & c \arrow[d, "\partial''_q"] \\ \partial'_q b \arrow[r, "p_{q-1}"] & 0 \end{tikzcd}$$

手順 (3) $\operatorname{Ker} p_{q-1} = \operatorname{Im} i_{q-1}$ かつ i_{q-1} は単射なので，ある $a_b \in A_q$ が一意的に存在して $\partial'_q b = i_{q-1}(a_b)$ と書ける：

$$\begin{tikzcd} & \exists b \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & c \arrow[d, "\partial''_q"] \\ \exists! a_b \arrow[r, "i_{q-1}"] & \partial'_q b \arrow[r, "p_{q-1}"] & 0 \end{tikzcd}$$

手順 (4) 図式 2.5 が可換なので

$$i_{q-2}\bigl(\partial_{q-1} a\bigr) = \partial'_{q-1}\bigl(i_{q-1} a\bigr) = \partial'_{q-1}\partial'_q b = 0$$

が成り立つ．さらに i_{q-2} は単射，i.e. $\operatorname{Ker} i_{q-2} = \{0\}$ なので

$$\partial_{q-1} a_b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a_b \in \operatorname{\mathbf{Ker}} \partial_{q-1}}$$

である：

$$
\begin{tikzcd}
 & \exists b \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & c \arrow[d, "\partial''_q"] \\
\exists ! a_b \arrow[r, "i_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & \partial'_q b \arrow[r, "p_{q-1}"] \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] & 0 \\
\partial_{q-1} a_b \arrow[r, "i_{q-1}"] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

補題 2.3: 連結準同型の定義

写像

$$\delta_q \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_{q-1}(A_\bullet),\ c + \operatorname{Im} \partial''_{q+1} \longmapsto a_b + \operatorname{Im} \partial_q$$

は well-defined な準同型写像である．

証明 まず写像

$$\psi_q \colon \operatorname{Ker} \partial''_q \longrightarrow H_{q-1}(A_\bullet),\ c \longmapsto a_b + \operatorname{Im} \partial_q$$

が well-defined な準同型写像であることを示す．

(well-definedness)

手順 (3) より $b \in p_q^{-1}(\{c\})$ が与えられると $a_b \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ が一意に定まるから，$a_b + \operatorname{Im} \partial_q$ が $b \in p_q^{-1}(\{c\})$ の取り方によらずに定まることを示せば良い．

別の $b' \in p_q^{-1}(\{c\})$ をとる．このとき

$$p_q(b') = p_q(b) \iff p_q(b' - b) = 0 \iff b' - b \in \operatorname{Ker} p_q = \operatorname{Im} i_q$$

が言えるので，ある $\alpha \in A_q$ が存在して $b' - b = i_q(\alpha)$ と書ける．さらに図式 2.5 の可換性から

$$i_{q-1}\bigl(\partial_q(\alpha)\bigr) = \partial'_q(i_q(a')) = \partial'_q(b' - b) \tag{2.1.5}$$

が成り立つ．一方，手順 (3), (4) より $\partial'_q b' = i_{q-1}(a_{b'})$ を充たす $a_{b'} \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ が一意的に存在する．このとき式 (2.1.5) から

$$i_{q-1}(a_{b'}) = \partial'_q b' = \partial'_q b + \partial'_q(b' - b) = i_{q-1}\bigl(a_b + \partial_q(\alpha)\bigr)$$

が成り立つが，i_{q-1} が単射なので

$$a_{b'} + \operatorname{Im} \partial_q = \bigl(a_b + \partial_q(\alpha)\bigr) = a_b + \operatorname{Im} \partial_q$$

が示された．

(準同型写像であること)

$\forall c_1, c_2 \in \operatorname{Ker} \partial''_q$ に対して $b_i \in p_q^{-1}(\{c_i\})$ $({}^{\mathrm{w}/}\ i = 1, 2)$ をとり，手順 (3), (4) に従って $a_{b_i} \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ をとる．このとき $b_1 + b_2 \in p_q^{-1}(\{c_1 + c_2\})$ である．また，$\partial'_q(b_1 + b_2) = i_{q-1}(a_{b_1} + a_{b_2})$

かつ $a_{b_1}+a_{b_2}\in \operatorname{Ker}\partial_{q-1}$ が成り立つ[*6]ので $a_{b_1}+a_{b_2}=a_{b_1+b_2}$ である．従って

$$\begin{aligned}\psi_q(c_1+c_2) &= a_{b_1+b_2}+\operatorname{Im}\partial_q\\ &= (a_{b_1}+a_{b_2})+\operatorname{Im}\partial_q\\ &= (a_1+\operatorname{Im}\partial_q)+(a_2+\operatorname{Im}\partial_q)\\ &= \psi_q(c_1)+\psi_q(c_2)\end{aligned}$$

が言えて加法についての証明が完了する．スカラー乗法に関しても同様である．

次に $\operatorname{Im}\partial''_{q+1}\subset \operatorname{Ker}\psi_q$ を示す．$\forall \partial''_{q+1}(c)\in \operatorname{Im}\partial''_{q+1}$ を 1 つとる．p_{q+1} は全射なので $b\in p_{q+1}^{-1}(\{c\})$ をとることができ，図式 2.5 の可換性から

$$p_q\bigl(\partial'_{q+1}(b)\bigr)=\partial''_{q+1}\bigl(p_{q+1}(b)\bigr)=\partial''_{q+1}c\in C_q \tag{2.1.6}$$

が成り立つ．ところで $\partial''_q\partial''_{q+1}=0$ より $\partial''_{q+1}(c)\in \operatorname{Im}\partial''_{q+1}\subset \operatorname{Ker}\partial''_q$ であるから，$\partial''_{q+1}(c)$ に対して手順 (1)-(4) を適用できる．特に (2.1.6) より手順 (1) の b として $\partial'_{q+1}(b)$ を選ぶことができ，手順 (3), (4) より $i_{q-1}(a_{\partial'_{q+1}(b)})=\partial'_q\partial'_{q+1}(b)=0$ を充たす $a_{\partial'_{q+1}(b)}\in \operatorname{Ker}\partial_{q-1}$ が一意的に存在する．ここで i_{q-1} は単射なので $a_{\partial'_{q+1}(b)}=0$ であり，

$$\psi_q(\partial''_{q+1}c)=a_{\partial'_{q+1}(b)}+\operatorname{Im}\partial_q=\operatorname{Im}\partial_q=0_{H_{q-1}(A_\bullet)} \iff \partial''_{q+1}c\in \operatorname{Ker}\psi_q$$

が示された．

以上の議論より商加群の普遍性が使えて，可換図式[*7]

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\partial''_q \arrow[r, "\psi_q"] \arrow[d] & L \\ H_q(C_\bullet) \arrow[ur, dashed, "\exists!\delta_q"'] & \end{tikzcd}$$

が成り立つ．i.e. ψ_q が δ_q を一意的に誘導する． ■

完全性

次に $\forall q\in\mathbb{Z}$ を 1 つ固定し，

$$H_q(A_\bullet)\xrightarrow{H_q(i_\bullet)}H_q(B_\bullet)\xrightarrow{H_q(p_\bullet)}H_q(C_\bullet)\xrightarrow{\delta_q}H_{q-1}(C_\bullet)\xrightarrow{H_{q-1}(i_\bullet)}H_{q-1}(B_\bullet)$$

が完全であることを示す．

$\boldsymbol{H_q(A_\bullet)\xrightarrow{H_q(i_\bullet)}H_q(B_\bullet)\xrightarrow{H_q(p_\bullet)}H_q(C_\bullet)}$ (exact)

チェイン複体の短完全列の定義より $p_q\circ i_q=0$ なので，H_q の関手性より $H_q(p_\bullet)\circ H_q(i_\bullet)=0$, i.e. $\operatorname{Im}H_q(i_\bullet)\subset \operatorname{Ker}H_q(p_\bullet)$ が言える．

[*6] p_q, i_{q-1}, ∂'_q は全て左 R 加群の準同型写像なので．

[*7] $\operatorname{Ker}\partial''_q\longrightarrow H_q(C_\bullet)$ は標準的射影であり，$c\longmapsto c+\operatorname{Im}\partial''_{q+1}$ である．

次に $\mathrm{Im}\, H_q(i_\bullet) \supset \mathrm{Ker}\, H_q(p_\bullet)$ を示す．$\forall b + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1} \in \mathrm{Ker}\, H_q(p_\bullet)$ を 1 つとる．このとき $H_q(p_\bullet)(b + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}) = p_q(b) + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1} = 0_{H_q(C_\bullet)}$ なので $p_q(b) \in \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1}$ である．p_{q+1} の全射性も考慮するとある $b' \in B_{q+1}$ が存在して $p_q(b) = \partial''_{q+1}\big(p_{q+1}(b')\big)$ と書ける．ここで図式 2.5 の可換性から

$$0 = p_q(b) - \partial''_{q+1}\big(p_{q+1}(b')\big) = p_q(b - \partial'_{q+1}b') \quad \Longleftrightarrow \quad b - \partial'_{q+1}b' \in \mathrm{Ker}\, p_q = \mathrm{Im}\, i_q$$

が言える．故に i_q の単射性からある $a \in A_q$ が一意的に存在して $b - \partial'_{q+1}b' = i_q(a)$ が成り立つ．従って

$$b + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1} = \big(i_q(a) + \partial'_{q+1}b'\big) + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1} = i_q(a) + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1} = H_q(i_\bullet)(a + \mathrm{Im}\,\partial_{q+1}) \in \mathrm{Im}\, H_q(i_\bullet)$$

が示された．

$\boldsymbol{H_q(B_\bullet) \xrightarrow{H_q(p_\bullet)} H_q(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A_\bullet)}$ (exact)

まず $\mathrm{Im}\, H_q(p_\bullet) \subset \mathrm{Ker}\,\delta_q$ を示す．$\forall H_q(p_\bullet)(b + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}) = p_q(b) + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1} \in \mathrm{Im}\, H_q(p_\bullet)$ を 1 つとる．このとき $p_q(b) \in \mathrm{Ker}\,\partial''_q$ (${}^{\mathrm{w}/}$ $b \in \mathrm{Ker}\,\partial'_q$) に手順 (1)-(4) を適用して得られる $a_b \in \mathrm{Ker}\,\partial_{q-1}$ は $0 = \partial'_q b = i_{q-1}(a_b)$ を充たすが，i_{q-1} は単射なので $a = 0$ が言える．従って

$$\delta_q\big(H_q(p_\bullet)(b + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1})\big) = a_b + \mathrm{Im}\,\partial_q = \mathrm{Im}\,\partial_q = 0_{H_{q-1}(A_\bullet)} \iff H_q(p_\bullet)(b + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}) \in \mathrm{Ker}\,\delta_q$$

が示された．

次に $\mathrm{Im}\, H_q(p_\bullet) \supset \mathrm{Ker}\,\delta_q$ を示す．$\forall c + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1} \in \mathrm{Ker}\,\delta_q$ を 1 つとる．$c \in \mathrm{Ker}\,\partial''_q$ に対して手順 (1) を適用して $b \in B_q$ が得られ，この b に手順 (3)-(4) を適用して $a_b \in \mathrm{Ker}\,\partial_{q-1}$ が得られたとする．すると連結準同型の定義から $\delta_q(c + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1}) = a_b + \mathrm{Im}\,\partial_q = 0_{H_q(A_\bullet)}$ なので $a_b \in \mathrm{Im}\,\partial_q$ が成り立つ．i.e. ある $a' \in A_q$ が存在して $a_b = \partial_q(a')$ と書ける．ここで，手順 (3) および図式 2.5 の可換性から

$$\partial'_q b = i_{q-1}(a_b) = i_{q-1}(\partial_q(a')) = \partial'_q\big(i_q(a')\big) \quad \Longleftrightarrow \quad b - i_q(a') \in \mathrm{Ker}\,\partial'_q$$

が言える．従って $\big(b + i_q(a')\big) + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1} \in H_q(B_\bullet)$ であり，手順 (1) および $p_q \circ i_q = 0$ から

$$c + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1} = p_q(b) + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1} = p_q\big(b + i_q(a')\big) + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1} = H_q(p_\bullet)\Big(\big(b + i_q(a')\big)\Big)$$

i.e. $c + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1} \in \mathrm{Im}\, H_q(p_\bullet)$ が示された．

$\boldsymbol{H_q(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_q} H_q(A_\bullet) \xrightarrow{H_{q-1}(i_\bullet)} H_{q-1}(B_\bullet)}$ (exact)

まず $\mathrm{Im}\,\delta_q \subset \mathrm{Ker}\, H_{q-1}(i_\bullet)$ を示す．$\forall \delta_q(c + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1}) = a_b + \mathrm{Im}\,\partial_q \in \mathrm{Im}\,\delta_q$ を 1 つとる．ただし $a_b \in \mathrm{Ker}\,\partial_{q-1}$ は，ある $b \in p_q^{-1}(\{c\})$ に手順 (3), (4) を施して得られる．このとき

$$H_{q-1}(i_\bullet)(a_b + \mathrm{Im}\,\partial_q) = i_{q-1}(a_b) + \mathrm{Im}\,\partial'_q = \partial'_q b + \mathrm{Im}\,\partial'_q = \mathrm{Im}\,\partial'_q = 0_{H_{q-1}(B_\bullet)}$$

が言える．

次に $\mathrm{Im}\,\delta_q \supset \mathrm{Ker}\, H_{q-1}(i_\bullet)$ を示す．$\forall a + \mathrm{Im}\,\partial_q \in \mathrm{Ker}\, H_{q-1}(i_\bullet)$ を 1 つとる．このとき $i_{q-1}(a) \in \mathrm{Im}\,\partial'_q$ だからある $b \in B_q$ が存在して $\partial'_q b = i_{q-1}(a)$ を充たす．$c := p_q(b)$ とおくと，図式 2.5 の可換性より $\partial''_q c = p_{q-1}(\partial'_q b) = p_{q-1}\big(i_{q-1}(a)\big) = 0 \iff c \in \mathrm{Ker}\,\partial''_q$ がわかる．従って $c + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1} \in H_q(C_\bullet)$ であり，手順 (1)-(4) の定義より

$$a + \mathrm{Im}\,\partial_q = \delta_q(c + \mathrm{Im}\,\partial''_{q+1}) \in \mathrm{Im}\,\delta_q$$

が示された．

q は任意だったので，図式 (2.1.3) が完全であることが示された． ■

2 つのチェイン複体の短完全列

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow (A_{1\bullet},\ \partial_{1\bullet}) \xrightarrow{i_{1\bullet}} (B_{1\bullet},\ \partial'_{1\bullet}) \xrightarrow{p_{1\bullet}} (C_{1\bullet},\ \partial''_{1\bullet}) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}\\
&0 \longrightarrow (A_{2\bullet},\ \partial_{2\bullet}) \xrightarrow{i_{2\bullet}} (B_{2\bullet},\ \partial'_{2\bullet}) \xrightarrow{p_{2\bullet}} (C_{2\bullet},\ \partial''_{2\bullet}) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}
\end{aligned}
$$

が与えられたとき，チェイン写像の 3 つ組

$$
\begin{aligned}
\alpha_\bullet &\colon (A_{1\bullet},\ \partial_{1\bullet}) \longrightarrow (A_{2\bullet},\ \partial_{2\bullet}),\\
\beta_\bullet &\colon (B_{1\bullet},\ \partial'_{1\bullet}) \longrightarrow (B_{2\bullet},\ \partial'_{2\bullet}),\\
\gamma_\bullet &\colon (C_{1\bullet},\ \partial''_{1\bullet}) \longrightarrow (C_{2\bullet},\ \partial''_{2\bullet})
\end{aligned}
$$

であって R-**Mod** の図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A_{1\bullet},\ \partial_{1\bullet}) \arrow[r, "i_{1\bullet}"] \arrow[d, "\alpha_\bullet"] & (B_{1\bullet},\ \partial'_{1\bullet}) \arrow[r, "p_{1\bullet}"] \arrow[d, "\beta_\bullet"] & (C_{1\bullet},\ \partial''_{1\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_\bullet"] & 0 & \text{(exact)}\\
0 \arrow[r] & (A_{2\bullet},\ \partial_{2\bullet}) \arrow[r, "i_{2\bullet}"] & (B_{2\bullet},\ \partial'_{2\bullet}) \arrow[r, "p_{2\bullet}"] & (C_{2\bullet},\ \partial''_{2\bullet}) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

を可換にするようなものを射と見做すことで，全てのチェイン複体の短完全列の集まりは圏 **SES**(**Chain**) を成す．**SES**(**Chain**) の射をあからさまに書くと，3 次元的な可換図式

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial_{1\,q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial'_{1\,q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial''_{1\,q+2}"] & & & \\
0 \arrow[r] & A_{1\,q+1} \arrow[r, "i_{1\,q+1}"] \arrow[d, "\partial_{1\,q+1}"] \arrow[ddddr, "\alpha_{q+1}"] & B_{1\,q+1} \arrow[r, "p_{1\,q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{1\,q+1}"] \arrow[ddddr, "\beta_{q+1}"] & C_{1\,q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{1\,q+1}"] \arrow[ddddr, "\gamma_{q+1}"] & 0 & \text{(exact)} & \\
0 \arrow[r] & A_{1\,q} \arrow[r, "i_{1\,q}"] \arrow[d, "\partial_{1\,q}"] \arrow[ddddr, "\alpha_q"] & B_{1\,q} \arrow[r, "p_{1\,q}"] \arrow[d, "\partial'_{1\,q}"] \arrow[ddddr, "\beta_q"] & C_{1\,q} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{1\,q}"] \arrow[ddddr, "\gamma_q"] & 0 & \text{(exact)} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & \vdots \arrow[d, "\partial_{2\,q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial'_{2\,q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial''_{2\,q+2}"] & & \\
 & 0 \arrow[r] & A_{2\,q+1} \arrow[r, "i_{2\,q+1}"] \arrow[d, "\partial_{2\,q+1}"] & B_{2\,q+1} \arrow[r, "p_{2\,q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{2\,q+1}"] & C_{2\,q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{2\,q+1}"] & 0 & \text{(exact)}\\
 & 0 \arrow[r] & A_{2\,q} \arrow[r, "i_{2\,q}"] \arrow[d, "\partial_{2\,q}"] & B_{2\,q} \arrow[r, "p_{2\,q}"] \arrow[d, "\partial'_{2\,q}"] & C_{2\,q} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{2\,q}"] & 0 & \text{(exact)}\\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

になる．

同じように考えると，R-**Mod** の完全列全体の集まりは圏 $\mathbf{ES}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を成す．つまり $\forall(M_\bullet,\, f_\bullet),\, (N_\bullet,\, g_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{ES}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ の間の射とは，左 R 加群の準同型写像の族 $\varphi_\bullet := \left\{\varphi_q \colon M_q \longrightarrow N_q\right\}_q$ であって図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "f_{q+2}"] & M_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[dr, "\varphi_{q+1}"] & M_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[dr, "\varphi_q"] & M_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[dr, "\varphi_{q-1}"] & \cdots \quad (\text{exact}) & \\
& \cdots \arrow[r, "f_{q+2}"] & N_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] & N_q \arrow[r, "f_q"] & N_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] & \cdots \quad (\text{exact})
\end{tikzcd}$$

を可換にするようなもののことである．

系 2.1: ホモロジー長完全列の自然性

ホモロジー長完全列は**自然**である．i.e. $\mathbf{SES}(\mathbf{Chain})$ の任意の 2 つの対象

$$\mathcal{C}_1 := \left(0 \longrightarrow (A_{1\bullet},\, \partial_{1\bullet}) \xrightarrow{i_{1\bullet}} (B_{1\bullet},\, \partial'_{1\bullet}) \xrightarrow{p_{1\bullet}} (C_{1\bullet},\, \partial''_{1\bullet}) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})\right)$$

$$\mathcal{C}_2 := \left(0 \longrightarrow (A_{2\bullet},\, \partial_{2\bullet}) \xrightarrow{i_{2\bullet}} (B_{2\bullet},\, \partial'_{2\bullet}) \xrightarrow{p_{2\bullet}} (C_{2\bullet},\, \partial''_{2\bullet}) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})\right)$$

とこれらを結ぶ任意の射 $(\alpha_\bullet,\, \beta_\bullet,\, \gamma_\bullet) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SES}(\mathbf{Chain})}(\mathcal{C}_1,\, \mathcal{C}_2)$ が与えられたとき，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して図式 2.6 が可換になる．

特に，チェイン複体の短完全列からホモロジー長完全列を作る操作は関手 $\mathbf{SES}(\mathbf{Chain}) \longrightarrow \mathbf{ES}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を定める．

$$\begin{tikzcd}
H_q(A_{1\bullet}) \arrow[r, "H_q(i_{1\bullet})"] \arrow[ddr, "H_q(\alpha_\bullet)"] & H_q(B_{1\bullet}) \arrow[r, "H_q(p_{1\bullet})"] \arrow[ddr, "H_q(\beta_\bullet)"] & H_q(C_{1\bullet}) \arrow[dll, "\delta_{1q}"'] \arrow[ddr, "H_q(\gamma_\bullet)"] & \\
H_{q-1}(A_{1\bullet}) \arrow[r, "H_{q-1}(i_{1\bullet})"'] \arrow[ddr, "H_{q-1}(\alpha_\bullet)"'] & H_{q-1}(B_{1\bullet}) \arrow[r, "H_{q-1}(p_{1\bullet})"'] \arrow[ddr, "H_{q-1}(\beta_\bullet)"] & H_{q-1}(C_{1\bullet}) \arrow[ddr, "H_{q-1}(\gamma_\bullet)"] & (\text{exact}) \\
& H_q(A_{2\bullet}) \arrow[r, "H_q(i_{2\bullet})"] & H_q(B_{2\bullet}) \arrow[r, "H_q(p_{2\bullet})"] & H_q(C_{2\bullet}) \arrow[dll, "\delta_{2q}"'] \\
& H_{q-1}(A_{2\bullet}) \arrow[r, "H_{q-1}(i_{2\bullet})"'] & H_{q-1}(B_{2\bullet}) \arrow[r, "H_{q-1}(p_{2\bullet})"'] & H_{q-1}(C_{2\bullet}) \quad\quad (\text{exact})
\end{tikzcd}$$

図 2.6: ホモロジー長完全列の自然性

<u>**証明**</u> $\mathbf{SES}(\mathbf{Chain})$ の射の可換性および H_q の関手性から，図式

$$\begin{tikzcd}
H_q(A_{1\bullet}) \arrow[r, "H_q(i_{1\bullet})"] \arrow[d, "H_q(\alpha_\bullet)"] & H_q(B_{1\bullet}) \arrow[r, "H_q(p_{1\bullet})"] \arrow[d, "H_q(\beta_\bullet)"] & H_q(C_{1\bullet}) \arrow[d, "H_q(\gamma_\bullet)"] \\
H_q(A_{2\bullet}) \arrow[r, "H_q(i_{2\bullet})"] & H_q(B_{2\bullet}) \arrow[r, "H_q(p_{2\bullet})"] & H_q(C_{2\bullet})
\end{tikzcd}$$

が可換であることは明らか．よって図式

$$\begin{tikzcd} H_q(C_{1\bullet}) \arrow[r, "\delta_{1q}"] \arrow[d, "H_q(\gamma_\bullet)"] & H_{q-1}(A_{1\bullet}) \arrow[d, "H_{q-1}(\alpha_\bullet)"] \\ H_q(C_{2\bullet}) \arrow[r, "\delta_{2q}"] & H_{q-1}(A_{2\bullet}) \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．

$\forall c + \mathrm{Im}\,\partial''_{1\,q+1} \in H_q(C_{1\bullet})$ を 1 つとる．$c \in \mathrm{Ker}\,\partial''_{1\,q}$ に対して $b \in {p_1}_q^{-1}(\{c\})$ をとり，手順 (3), (4) を通して $a_b \in \mathrm{Ker}\,\partial_{1\,q-1}$ を得たとする．このとき

$$\begin{aligned} c &= p_{1\,q}(b), \\ \partial'_{1\,q} b &= i_{1\,q-1}(a_b), \\ H_{q-1}(\alpha_\bullet)\big(\delta_{1\,q}(c + \mathrm{Im}\,\partial''_{1\,q+1})\big) &= \alpha_{q-1}(a_b) + \mathrm{Im}\,\partial_{2\,q} \end{aligned}$$

が成り立つ．ところで，**SES**(**Chain**) の射の可換性より

$$\begin{aligned} \gamma_q(c) = \gamma_q\big(p_{1\,q}(b)\big) &= p_{2\,q}\big(\beta_q(b)\big), \\ i_{2\,q-1}\big(\alpha_{q-1}(a_b)\big) = \beta_{q-1}\big(i_{1\,q-1}(a_b)\big) &= \beta_{q-1}(\partial'_{1\,q}(b)) = \partial'_{2\,q}(\beta_q(b)) \end{aligned}$$

が成り立つから，手順 (1)-(4) の定義より

$$\begin{aligned} \delta_{2\,q}\big(H_q(\gamma_\bullet)(c + \mathrm{Im}\,\partial''_{1\,q+1})\big) &= \delta_{2\,q}\big(\gamma_q(c) + \mathrm{Im}\,\partial''_{2\,q+1}\big) \\ &= \alpha_{q-1}(a_b) + \mathrm{Im}\,\partial_{2\,q} \\ &= H_{q-1}(\alpha_\bullet)\big(\delta_{1\,q}(c + \mathrm{Im}\,\partial''_{1\,q+1})\big) \end{aligned}$$

が示された． ■

2.2 整数係数特異ホモロジー

ここまでの議論は純粋に代数的なものであった．チェイン複体の理論を用いて位相空間の構造を調べるには，なんらかの関手

$$F_\bullet \colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain}$$

を構成する必要がある．この節ではこのような関手の具体例として整数係数特異ホモロジーを定義する．

定義 2.7: 非負なチェイン複体

$(C_\bullet, \partial_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Chain})$ は $\forall q < 0$ に対して $C_q = 0$ であるとき**非負** (nonnegative) と呼ばれる．

2.2.1 標準 q 単体による構成

定義 2.8: 標準 q-単体

標準 q 単体 (standard q-simplex) Δ^q を次のように定義する：

$$\Delta^q \coloneqq \left\{ (x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (0 \leq \forall i \leq q) \right\}$$

$\mathbb{R}^{q+1}$ の基底 $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q}$ を

$$e_k^q \coloneqq \bigl(0,\, \dots,\, 0,\, \underbrace{1}_{k},\, 0,\, \dots,\, 0\bigr)$$

で定義すると，$e_k^q \in \Delta^q$ である[*8]

定義 2.9: face map

$0 \leq i \leq q$ に対して，線型写像 $f_i^q \colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{q+1}$ を

$$f_i^q(e_k^{q-1}) \coloneqq \begin{cases} e_k^q, & k < i \\ e_{k+1}^q & k \geq i \end{cases}$$

で定義する．このとき $f_i^q(\Delta^{q-1}) \subset \Delta^q$ が成立するから，連続写像

$$f_i^q\big|_{\Delta^{q-1}} \colon \Delta^{q-1} \longrightarrow \Delta^q$$

が構成できたことになる．$f_i^q\big|_{\Delta^{q-1}}$ は**面写像** (face map) と呼ばれる．

明かに

$$f_i^q\bigl((x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_{q-1})\bigr) = (x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, 0,\, x_i,\, \dots,\, x_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q+1}$$

である．

定義 2.10: ($\mathbb{Z}$ 係数) 特異 q 単体

位相空間 X を与える．

- 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X)$ を X の**特異 q 単体** (sigular q-simplex) と呼ぶ．
- X の $\mathbb{Z}$ 係数**特異 q-チェイン** (singular q chain) $S_q(X)$ とは，特異 q 単体の生成する自由 $\mathbb{Z}$ 加群のこと．記号として

$$\boldsymbol{S_q(X)} \coloneqq \mathbb{Z}^{\oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X)}$$

と書く．

[*8] さらに，Δ^q は $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q}$ を含む最小の凸集合でもある．凸集合 $V \subset \mathbb{R}^{q+1}$ が $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q} \subset V$ を充たすならば，凸集合の性質から $e_0^q,\, \dots,\, e_q^q$ の凸結合もまた V に属するからである．

- **境界写像** (boundary map) $\partial_q\colon S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ を次のように定義する：

$$\partial_q(\sigma) \coloneqq \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \bigl(\sigma \circ f_i^q\bigr)$$

補題 2.4:

$$\partial_q \partial_{q+1} = 0$$

<u>**証明**</u> $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^{q+1},\, X\right)$ の元は $S_{q+1}(X)$ の基底を成すので, $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^{q+1},\, X\right)$ に対して $\partial_q\partial_{q+1}\sigma = 0$ が成り立つことを示せば良い．まず，$i > j$ のとき

$$\bigl(f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr)(e_k^{q-1}) = \begin{cases} f_i^{q+1}(e_k^q), & k < j \\ f_i^{q+1}(e_{k+1}^q), & k \geq j \end{cases} = \begin{cases} e_k^{q+1}, & k < j < i \\ e_{k+1}^{q+1}, & k \geq j \text{ かつ } k+1 < i \\ e_{k+2}^{q+1}, & j < i \leq k+1 \end{cases}$$

$$\bigl(f_j^{q+1} \circ f_{i-1}^q\bigr)(e_k^{q-1}) = \begin{cases} f_j^{q+1}(e_k^q), & k < i-1 \\ f_j^{q+1}(e_{k+1}^q), & k \geq i-1 \end{cases} = \begin{cases} e_k^{q+1}, & k < j \leq i-1 \\ e_{k+1}^{q+1}, & k < i-1 \text{ かつ } k+1 \geq j \\ e_{k+2}^{q+1}, & j \leq i-1 \leq k \end{cases}$$

なので $f_i^{q+1} \circ f_j^q = f_j^{q+1} \circ f_{i-1}^q$ である．従って

$$\begin{aligned}
&\partial_q\partial_{q+1}\sigma = \sum_{i=0}^{q+1}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{i+j}\bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq q+1}(-1)^{i+j}\bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q}(-1)^{i+j}\bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq q+1}(-1)^{i+j}\bigl(\sigma \circ f_j^{q+1} \circ f_{i-1}^q\bigr) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q}(-1)^{i+j}\bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

補題 2.4 より，定義 2.10 で作った加群と準同型の組

$$\bigl(S_\bullet(X),\, \partial_\bullet\bigr) \coloneqq \bigl\{S_q(X),\, \partial_q\bigr\}_{q \in \mathbb{Z}}$$

は $\mathbb{Z}$-**Mod** 上の非負なチェイン複体になる．

定義 2.11: ($\mathbb{Z}$ 係数) 特異チェイン複体

$\bigl(S_\bullet(X),\, \partial_\bullet\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Chain})$ のことを $\mathbb{Z}$ 係数**特異チェイン複体** (singular chain complex) と呼ぶ．

補題 2.5: 特異チェイン群が誘導するチェイン写像

連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ を任意に与える．
このとき f は $\mathbb{Z}$ 加群の準同型の族 $S_\bullet(f) \coloneqq \left\{S_q(f)\colon S_q(X) \to S_q(Y)\right\}_{q\geq 0}$ を次のようにして誘導する：

$$S_q(f)\colon S_q(X) \to S_q(Y),\ \sum_l a_l\sigma_l \mapsto \sum_l a_l(f\circ\sigma_l)$$

特に $S_\bullet(f)$ はチェイン写像 $S_\bullet(f)\colon \left(S_\bullet(X),\, \partial_\bullet^X\right) \longrightarrow \left(S_\bullet(Y),\, \partial_\bullet^Y\right)$ である．

<u>証明</u> $\forall q \geq 0$ を 1 つとる．$\forall\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X)$ に対して $f\circ\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, Y)$ なので[*9]，$S_q(f)\colon S_q(X) \to S_q(Y)$ は well-defined な準同型写像である．また，

$$\begin{aligned}
\left(\partial_q^Y \circ S_q(f)\right)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i(f\circ\sigma\circ f_i^q) \\
&= S_{q-1}(f)\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\sigma\circ f_i^q)\right) \\
&= \left(S_{q-1}(f)\circ\partial_q^X\right)(\sigma)
\end{aligned}$$

が成り立つので $S_\bullet(f)$ はチェイン写像である． ■

定理 2.2: $S_\bullet$ の関手性

- 位相空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を**特異チェイン複体** $S_\bullet(X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Chain})$ に，
- 連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ を補題 2.5 のチェイン写像 $S_\bullet(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Chain}}\left(S_\bullet(X),\, S_\bullet(Y)\right)$ に

対応づける対応

$$S_\bullet\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain}$$

は関手である．i.e. $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して以下が成り立つ：

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, X)$ について

$$S_q(\mathrm{id}_X) = 1_{S_q(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\left(S_q(X),\, S_q(X)\right)$$

(2) 任意の連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$，$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ について

$$S_q(g\circ f) = S_q(g)\circ S_q(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\left(S_q(X),\, S_q(Z)\right)$$

<u>証明</u> $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X)$ は自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $S_q(X)$ の基底を成すので，$\forall\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X)$ について示せば十分である．

[*9] 連続写像の合成は連続

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ に対して

$$S_q(\mathrm{id}_X)(\sigma) = \mathrm{id}_X \circ \sigma = \sigma = 1_{S_q(X)}(\sigma).$$

(2) **Top** における射の結合則より

$$S_q(g \circ f)(\sigma) = g \circ f \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = \bigl(S_q(g) \circ S_q(f)\bigr)(\sigma).$$

■

これで当初の目標が達成された．ここからさらにホモロジー群をとる関手を作用させることで関手

$$H_q \circ S_\bullet \colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$$

が構成される．

定義 2.12: ($\mathbb{Z}$ 係数) 特異ホモロジー

位相空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ および $\forall q \geq 0$ に対して定まる $\mathbb{Z}$ 加群

$$H_q\bigl(S_\bullet(X)\bigr) = \frac{\mathrm{Ker}\bigl(\partial_q \colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)\bigr)}{\mathrm{Im}\bigl(\partial_{q+1} \colon S_{q+1}(X) \to S_q(X)\bigr)}$$

を X の第 q $\mathbb{Z}$ 係数 **特異ホモロジー群** (singular homology group) と呼ぶ．

! $H_q\bigl(S_\bullet(X)\bigr)$ はよく $\boldsymbol{H_q(X)}$ と略記される．この章の以降でも，誤解の恐れがないときはこの略記を行う．また，記号の濫用だが，チェイン写像 $S_\bullet(f)$ のことを $\boldsymbol{f_\bullet}$ と略記し，$H_q\bigl(S_\bullet(f)\bigr)$ のことを $\boldsymbol{f_q}$ と略記する場合がある．

2.2.2 一点のホモロジー

命題 2.4: 一点のホモロジーは $\mathbb{Z}$

一点からなる位相空間 $* = \{*\}$ に対して以下が成り立つ：

$$H_q(*) = \begin{cases} 0, & q \neq 0 \\ \mathbb{Z}, & q = 0 \end{cases}$$

証明 任意の $q \geq 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q, *)$ は一点集合であり，その元は定数写像である．それを $\sigma_q \colon \Delta^q \to *$ と書くと

$$S_q(*) = \mathbb{Z}\{\sigma_q\} \cong \mathbb{Z}$$

が成り立つ．境界写像は，$\sigma_q \circ f_i^q = \sigma_{q-1}$ に注意すると

$$\partial_q(\sigma_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma_{q-1} = \begin{cases} \sigma_{q-1}, & q \text{ is even} \\ 0, & q \text{ is odd} \end{cases}$$

である．i.e. 位相空間 $*$ の整数係数特異チェイン複体は完全列[*10]

$$\cdots \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

になる．故に

$$\begin{aligned} H_{q\geq 1}(*) &= \operatorname{Ker} \partial_q / \operatorname{Im} \partial_{q+1} = 0, \\ H_0(*) &= \operatorname{Ker} \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

■

2.2.3 ホモトピー不変性

2 つの位相空間 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとり，その間の連続写像全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ を考える．

定義 2.13: ホモトピック

- 2 つの連続写像 $f_0, f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ が**ホモトピック** (homotopic) であるとは，連続写像 $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\big(X \times [0, 1], Y\big)$ が存在して

$$\begin{aligned} F|_{X\times\{0\}} &= f_0, \\ F|_{X\times\{1\}} &= f_1 \end{aligned}$$

を充たすことを言い，$\boldsymbol{f_0 \simeq f_1}$ と書く．F のことを f_0 と f_1 を繋ぐ**ホモトピー** (homotopy) と呼ぶ．

- 連続写像の組 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$，$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, X)$ が**ホモトピー同値写像** (homotopy equivalence) であるとは，

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq \mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, X), \\ f \circ g &\simeq \mathrm{id}_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Y) \end{aligned}$$

が成り立つことを言う[a]．位相空間 X, Y の間にホモトピー同値写像が存在するとき，X と Y は同じ**ホモトピー型** (homotopy type) である[b]と言う．

- 位相空間 X が**可縮** (contractible) であるとは，X が一点からなる位相空間 $\{\mathrm{pt}\} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と同じホモトピー型であること．

[a] g は f の**ホモトピー逆写像** (homotopy inverse) であると言う．逆もまた然り．f または g のどちらか一方だけを指してホモトピー同値写像であると言った場合は，ホモトピー逆写像が存在することを意味する．
[b] **ホモトピー同値** (homotopy equivalent) であると言うこともある．

$\simeq \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ は集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ 上の同値関係である．

次の命題は，**Top** におけるホモトピーと **Chain** におけるチェイン・ホモトピーの間に対応があることを主張する．証明には，$\Delta^q \times [0, 1]$ の三角形分割を利用して実際にチェイン・ホモトピーを構成する．このような構成法を**プリズム分解**と呼ぶ．

[*10] $\operatorname{Ker} \partial_q = \operatorname{Im} \partial_{q+1}$ であることは明らかであろう．

命題 2.5: ホモトピックはチェイン・ホモトピック

連続写像 $f,\, g\colon X \longrightarrow Y$ が互いにホモトピックならば，チェイン写像 $S_\bullet(f),\, S_\bullet(g)\colon \bigl(S_\bullet(X),\, \partial^X_\bullet\bigr) \longrightarrow \bigl(S_\bullet(Y),\, \partial^Y_\bullet\bigr)$ は互いにチェイン・ホモトピックである．

__証明__ $I \coloneqq [0,\, 1]$ とおく．任意の $f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ および任意の特異 q-単体 $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X)$ を与える．$f,\, g$ が互いにホモトピックだとすると，連続写像 $F\colon X \times I \longrightarrow Y$ であって $F|_{X\times\{0\}} = f$ かつ $F|_{Y\times\{1\}} = g$ を充たすものが存在する．**プリズム** $\Delta^q \times I$ を定義域に持つような合成

$$F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\colon \Delta^q \times I \longrightarrow X \times I \longrightarrow Y$$

を考える．

次にプリズムの三角形分割を構成する．$\forall q \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^{q+1}$ の基底 $\{e^q_i\}_{i=0,\, \dots,\, q}$ を

$$e^q_i \coloneqq (0,\, \dots,\, 0,\, \underbrace{1}_{i},\, 0,\, \dots,\, 0)$$

にとる．そして $q+1$ 個の線型写像 $s^{q+1}_i\colon \mathbb{R}^{q+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{q+1} \times \mathbb{R}$ を

$$s^{q+1}_i(e^{q+1}_k) \coloneqq \begin{cases} (e^q_k,\, 0), & k \leq i \\ (e^q_{k-1},\, 1), & k > i \end{cases}$$

と定義する．すると

$$s^{q+1}_i(x_0,\, \dots,\, x_{q+1}) = \left((x_0,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i + x_{i+1},\, x_{i+2},\, \dots,\, x_{q+1}),\, \sum_{k=i+1}^{q+1} x_k\right)$$

が成り立つので $s^{q+1}_i(\Delta^{q+1}) \subset \Delta^q \times I$ である．

ここで $\forall q \geq 0$ に対する（第 q）**プリズム演算子** (prism operators) $P_q\colon S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(Y)$ を，

$$P_q(\sigma) \coloneqq \sum_{i=0}^{q} (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s^{q+1}_i|_{\Delta^{q+1}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^{q+1},\, Y) \tag{2.2.1}$$

を充たすものとして定義する．以降では，プリズム演算子がチェイン写像 $S_\bullet(f),\, S_\bullet(g)$ を繋ぐチェイン・ホモトピーであることを示す．

補題 2.6:

2 つの包含写像を

$$\begin{aligned} i_0 &\colon \Delta^q \longrightarrow \Delta^q \times I,\; x \longmapsto (x,\, 0), \\ i_1 &\colon \Delta^q \longrightarrow \Delta^q \times I,\; x \longmapsto (x,\, 1) \end{aligned}$$

と定義する．このとき，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, \Delta^q \times I)$ の元として以下の等式が成り立つ：

(1)

$$s_i^{q+1}\circ f_j^{q+1}|_{\Delta^q} = \begin{cases}(f_{j-1}^q|_{\Delta^{q-1}}\times \mathrm{id}_I)\circ s_i^q, & i<j-1\\ (f_j^q|_{\Delta^{q-1}}\times \mathrm{id}_I)\circ s_{i-1}^q, & i>j\end{cases}$$

(2) $s_{j-1}^{q+1}\circ f_j^{q+1}|_{\Delta^q} = s_j^{q+1}\circ f_j^{q+1}|_{\Delta^q}$

(3) $s_q^{q+1}\circ f_{q+1}^{q+1}|_{\Delta^q} = i_0$

(4) $s_0^{q+1}\circ f_0^{q+1}|_{\Delta^q} = i_1$

ただし，$f_j^{q+1}|_{\Delta^q}\colon \Delta^q \longrightarrow \Delta^{q+1}$ は面写像である．

証明 面写像の制限の記号 $|_{\Delta^q}$ を省略する．$\mathbb{R}^{q+1}$ の基底 $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q}$ を写像した先が一致していることを示す．

(1) $\boldsymbol{i<j-1}$

$$s_i^{q+1}\circ f_j^{q+1}(e_k^q) = \begin{cases}s_i^{q+1}(e_k^{q+1}), & k<j\\ s_i^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}), & k\geq j\end{cases} = \begin{cases}(e_k^q,\,0), & k\leq i\\ (e_{k-1}^q,\,1), & i<k<j\\ (e_k^q,\,1), & k\geq j\end{cases}$$

である．一方，

$$(f_{j-1}^q\times \mathrm{id}_I)\circ s_i^q(e_k^q) = \begin{cases}(f_{j-1}^q\times \mathrm{id}_I)(e_k^{q-1},\,0), & k\leq i\\ (f_{j-1}^q\times \mathrm{id}_I)(e_{k-1}^{q-1},\,1), & k>i\end{cases} = \begin{cases}(e_k^q,\,0), & k\leq i\\ (e_{k-1}^q,\,1), & i<k<j\\ (e_k^q,\,1), & k\geq j\end{cases}$$

なので示された．

$\boldsymbol{i>j}$

$$s_i^{q+1}\circ f_j^{q+1}(e_k^q) = \begin{cases}s_i^{q+1}(e_k^{q+1}), & k<j\\ s_i^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}), & k\geq j\end{cases} = \begin{cases}(e_k^q,\,0), & k<j\\ (e_{k+1}^q,\,1), & j\leq k\leq i-1\\ (e_k^q,\,1), & k>i-1\end{cases}$$

である．一方，

$$(f_j^q\times \mathrm{id}_I)\circ s_{i-1}^q(e_k^q) = \begin{cases}(f_j^q\times \mathrm{id}_I)(e_k^{q-1},\,0), & k\leq i-1\\ (f_j^q\times \mathrm{id}_I)(e_{k-1}^{q-1},\,1), & k>i-1\end{cases} = \begin{cases}(e_k^q,\,0), & k<j\\ (e_{k+1}^q,\,1), & j\leq k\leq i-1\\ (e_k^q,\,1), & k>i-1\end{cases}$$

なので示された．

(2)

$$s_{j-1}^{q+1}\circ f_j^{q+1}(e_k^q) = \begin{cases}s_{j-1}^{q+1}(e_k^{q+1}), & k<j\\ s_{j-1}^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}), & k\geq j\end{cases} = \begin{cases}(e_k^q,\,0), & k<j\\ (e_k^q,\,1), & k\geq j\end{cases}$$

で，

$$s_j^{q+1}\circ f_j^{q+1}(e_k^q) = \begin{cases}s_j^{q+1}(e_k^{q+1}), & k<j\\ s_j^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}), & k\geq j\end{cases} = \begin{cases}(e_k^q,\,0), & k<j\\ (e_k^q,\,1), & k\geq j\end{cases}$$

なので示された．

(3) 添字 k は $0 \le k \le q$ の範囲を動くので

$$s_q^{q+1} \circ f_{q+1}^{q+1}(e_k^q) = s_q^{q+1}(e_k^{q+1}) = (e_k^q,\, 0) = i_0(e_k^q).$$

(4) (3) と同様に考えて

$$s_0^{q+1} \circ f_0^{q+1}(e_k^q) = s_0^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}) = (e_k^q,\, 1) = i_1(e_k^q).$$

■

引き続き制限の記号 $|_{\Delta^q}$ を省略する．プリズム演算子の定義 (2.2.1) より

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1}^Y \circ P_q(\sigma) &= \sum_{j=0}^{q+1}\sum_{i=0}^{q}(-1)^{j+i} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1} \\
&= \sum_{0 \le i < j \le q+1} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1} \\
&\quad + \sum_{0 \le j \le i \le q} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$1 \le \forall i \le q$ に対しては最右辺の第 1 項から $i = j-1$ の項が，第 2 項から $i = j$ の項が出現するが，補題 2.6-(2) よりこれらは互いに打ち消しあって 0 になる．$(i,\, j) = (0,\, 0),\, (q,\, q+1)$ の 2 項は，補題 2.6-(3), (4) よりそれぞれ $S_q(f)(\sigma),\, -S_q(g)(\sigma)$ になる．従って残りの項は，補題 2.6-(1) より

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1}^Y \circ P_q(\sigma) - S_q(f)(\sigma) + S_q(g)(\sigma) &= \sum_{0 \le i < j-1 \le q} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1} \\
&\quad + \sum_{0 \le j < i \le q} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1} \\
&= \sum_{0 \le i < j-1 \le q} (-1)^{i+j} F \circ \big((\sigma \circ f_{j-1}^q) \times \mathrm{id}_I\big) \circ s_i^q \\
&\quad + \sum_{0 \le j < i \le q} (-1)^{i+j} F \circ \big((\sigma \circ f_j^q) \times \mathrm{id}_I\big) \circ s_{i-1}^q \\
&= \sum_{0 \le i < j' \le q} (-1)^{i+j'+1} F \circ \big((\sigma \circ f_{j'}^q) \times \mathrm{id}_I\big) \circ s_i^q \\
&\quad + \sum_{0 \le j \le i' \le q-1} (-1)^{i'+j+1} F \circ \big((\sigma \circ f_j^q) \times \mathrm{id}_I\big) \circ s_{i'}^q \\
&= -P_{q-1}\left(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j \sigma \circ f_j^q\right) \\
&= -P_{q-1} \circ \partial_q^X(\sigma)
\end{aligned}$$

と分かる．i.e. P_q はチェイン・ホモトピーである．

■

系 2.3: ホモロジー群のホモトピー不変性

- 連続写像 $f,\, g\colon X \longrightarrow Y$ が互いにホモトピックならば，$\forall q \geq 0$ に対して $H_q\bigl(S_\bullet(f)\bigr) = H_q\bigl(S_\bullet(g)\bigr)\colon H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$ が成り立つ.
- 位相空間 $X,\, Y$ が同じホモトピー型ならば $\forall q \geq 0$ に対して $H_q(X) \cong H_q(Y)$ である.

証明 定理 2.5 と命題 2.2 と H_q の関手性より従う. ■

5 章で解説する非輪状モデル定理を使うと，定理 2.5 をより一般的な文脈で証明することもできる.

2.3 Mayer-Vietoris 完全列

位相空間 X の部分空間 $A \subset X$ の X における内部を A° と書く.

定理 2.4: Mayer-Vietoris 完全列

X を位相空間，$U,\, V \subset X$ を部分集合で,

$$U^\circ \cup V^\circ = X$$

を充たすものとする．このとき $\forall q \geq 0$ について連結準同型

$$\partial_\bullet\colon H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(U \cap V)$$

が存在して，完全列

$$\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(U \cap V) \\
&\xrightarrow{i} H_{q-1}(U) \oplus H_{q-1}(V) \xrightarrow{j} H_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-2}(U \cap V) \\
&\xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{j} H_0(X) \to 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，準同型 $i,\, j$ は包含写像

$$\begin{aligned}
&i_U\colon U \cap V \hookrightarrow U, & &i_V\colon U \cap V \hookrightarrow V, \\
&j_U\colon U \hookrightarrow X, & &j_V\colon V \hookrightarrow X
\end{aligned}$$

の誘導準同型によって[a]

$$\begin{aligned}
i(w) &:= \Bigl((i_U)_q(w),\, -(i_V)_q(w) \Bigr), \\
j(u,\, v) &:= (j_U)_q(u) + (j_V)_q(v)
\end{aligned}$$

と定義される．ただし $w \in H_q(U \cap V)$，$u \in H_q(U)$，$v \in H_q(V)$ である.

[a] つまり，$(i_U)_q := \boldsymbol{H_q\bigl(S_\bullet(i_U)\bigr)}\colon H_q(U \cap V) \longrightarrow H_q(U)$ などとした.

位相空間 X, Y，および部分空間 $U, V \subset X$, $U', V' \subset Y$ と，連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ であって以下の条件を充たすものが与えられたとき，連結準同型は図式 2.7 を可換にする：

- $U^\circ \cup V^\circ = X$ かつ $U'^\circ \cup V'^\circ = Y$
- $f(U) \subset U'$ かつ $f(V) \subset V'$

$$\begin{tikzcd} H_q(X) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_q"] & H_{q+1}(U \cap V) \arrow[d, "f_q"] \\ H_q(Y) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{q+1}(U' \cap V') \end{tikzcd}$$

図 2.7: 連結準同型の自然性

この定理は次の命題から導かれる：

命題 2.6: 特異チェイン複体の切除対

$U, V \subset X$ が定理 2.4 の条件

$$U^\circ \cup V^\circ = X$$

を充たすとき，包含写像 $\iota\colon S_\bullet(U) + S_\bullet(V) \hookrightarrow S_\bullet(X)$ は $\forall q \geq 0$ についてホモロジー群の同型

$$H_q\bigl(S_\bullet(U) + S_\bullet(V)\bigr) \xrightarrow{\cong} H_q(X)$$

を誘導する．

証明 [10, 定理 2.4.2] を参照 ■

命題 2.6 を仮定して定理 2.4 を証明する．

証明 系列

$$0 \to S_q(U \cap V) \xrightarrow{i} S_q(U) \oplus S_q(V) \xrightarrow{j} S_q(U) + S_q(V) \to 0$$

は完全である．これのホモロジー完全列をとると

$$\cdots \xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q\bigl(S_\bullet(U) + S_\bullet(V)\bigr) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} \cdots$$

が得られる．さらに命題 2.6 を使うことで

$$\cdots \xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} \cdots$$

が得られる．

f が誘導するチェイン写像 $f_*\colon S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(Y)$ によって

$$
\begin{CD}
0 @>>> S_q(U\cap V) @>{i_*}>> S_q(U)\oplus S_q(V) @>{j_*}>> S_q(U)+S_q(V) @>>> 0\\
@. @V{f_*}VV @V{f_*}VV @V{f_*}VV @.\\
0 @>>> S_q(U'\cap V') @>{i_*}>> S_q(U')\oplus S_q(V') @>{j_*}>> S_q(U')+S_q(V') @>>> 0
\end{CD}
$$

が成り立つ．ここから連結準同型とホモロジー完全列の自然性を使うことで定理 2.4 の後半も示された． ■

2.4 空間対の特異ホモロジー

位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の組 $(X,\,A)$ のことを**空間対** (pair) と呼ぶ．包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ が誘導するチェイン写像 $i_\bullet\colon S_\bullet(A) \longrightarrow S_\bullet(X)$ を用いて，$\forall q \geq 0$ に対して $\mathbb{Z}$ 加群

$$
S_q(X,\,A) := \frac{S_q(X)}{\operatorname{Im}\bigl(i_q\colon S_q(A) \longrightarrow S_q(X)\bigr)} = \operatorname{Coker}\bigl(i_q\colon S_q(A) \longrightarrow S_q(X)\bigr)
$$

を考える．剰余類への標準的射影を

$$
p_q\colon S_q(X) \longrightarrow S_q(X,\,A),\ u \longmapsto u + \operatorname{Im} i_q
$$

と書く．

補題 2.7:

- 境界写像 $\partial_q\colon S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ は well-defined な準同型写像

$$
\overline{\partial}_q\colon S_q(X,\,A) \longrightarrow S_{q-1}(X,\,A),\ u + \operatorname{Im} i_q \longmapsto \partial_q u + \operatorname{Im} i_{q-1}
$$

  を一意的に誘導する．
- 準同型 $\overline{\partial}_q\colon S_q(X,\,A) \longrightarrow S_{q-1}(X,\,A)$ は

$$
\overline{\partial}_{q-1}\overline{\partial}_q = 0
$$

  を充たす．

<u>証明</u> $\partial_q\bigl(\operatorname{Im} i_q\bigr) \subset \operatorname{Im} i_{q-1}$ なので

$$
u \in \operatorname{Im} i_q \quad \Longrightarrow \quad \partial_q u \in \operatorname{Im} i_{q-1} \quad \Longrightarrow \quad (p_{q-1}\circ\partial_q)(u) = 0_{S_{q-1}(X,\,A)}
$$

i.e. $\operatorname{Im} i_q \subset \operatorname{Ker}(p_{q-1}\circ\partial_q)$ が言える．したがって商加群の普遍性が使えて以下の可換図式が成り立つ：

$$
\begin{tikzcd}
S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "p_*"'] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "p_{q-1}"] & S_{q-1}(X,\,A) \\
S_q(X,\,A) \arrow[urr, dashed, "\exists!\overline{\partial}_q"'] & &
\end{tikzcd}
$$

後半は $\overline{\partial}_{q-1}\overline{\partial}_q(u + \operatorname{Im} i_q) = \partial_{q-1}\partial_q u + \operatorname{Im} i_{q-2} = 0_{S_{q-2}(X,\,A)}$ より従う． ■

以上の考察から，加群と準同型の族

$$S_\bullet(X,\,A) \coloneqq \left\{S_q(X,\,A),\,\overline{\partial}_q\right\}_{q\ge 0}$$

はチェイン複体を成す．

定義 2.14: 空間対のホモロジー群

チェイン複体 $S_\bullet(X,\,A)$ のホモロジー群を**空間対 $(S,\,A)$ の第 q のホモロジー群**と呼び，

$$H_q(X,\,A) \coloneqq \frac{\operatorname{Ker}\big(\partial_q\colon S_q(X,\,A)\to S_{q-1}(X,\,A)\big)}{\operatorname{Im}\big(\partial_{q+1}\colon S_{q+1}(X,\,A)\to S_q(X,\,A)\big)}$$

と書く．

2.4.1 空間対のホモロジー長完全列

包含準同型 $i_q\colon S_q(A)\longrightarrow S_q(X)$ は単射で，かつ標準的射影 $p_q\colon S_q(X)\longrightarrow S_q(X,\,A)$ は全射だから，系列

$$0\to S_\bullet(A)\xrightarrow{i_\bullet} S_\bullet(X)\xrightarrow{p_\bullet} S_\bullet(X,\,A)\to 0$$

は短完全列を成す．ここに短完全列のホモロジー長完全列を適用して，$\forall q\ge 1$ に連結準同型

$$\partial_\bullet\colon H_q(X,\,A)\longrightarrow H_{q-1}(A)$$

および**空間対 $(X,\,A)$ のホモロジー長完全列**

$$\begin{aligned}\cdots &\xrightarrow{i_q} H_q(X)\xrightarrow{p_q} H_q(X,\,A)\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(A)\\ &\xrightarrow{i_{q-1}} H_{q-1}(X)\xrightarrow{p_{q-1}} H_{q-1}(X,\,A)\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-2}(A)\\ &\xrightarrow{i_{q-2}}\cdots\xrightarrow{i_0} H_0(X)\xrightarrow{p_0} H_0(X,\,A)\to 0\end{aligned}$$

が得られる．

2.4.2 誘導準同型

空間対 $(X,\,A)$, $(Y,\,B)$ の間の連続写像とは，連続写像 $f\colon X\longrightarrow Y$ であって $f(A)\subset B$ を充たすもののことを言う．このとき $f_q\big(S_q(A)\big)\subset S_q(B)$ が成り立つ[*11] ので $\forall q\ge 0$ に対して準同型写像

$$\overline{f}_q\colon S_q(X,\,A)\longrightarrow S_q(Y,\,B),\ u+S_q(A)\longmapsto f_q(u)+S_q(B)$$

[*11] $\forall \sum_l a_l\sigma_l\in S_\bullet(A)$ について

$$f_q\left(\sum_l a_l\sigma_l\right) = f_q\left(i_q\left(\sum_l a_l\sigma_l\right)\right) = \sum_l a_l(f\circ i\circ\sigma_l)$$

だが，$\forall l$ について $\sigma_l\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\,A)$ なので $\operatorname{Im}\sigma_l\subset A$ であり，従って $\operatorname{Im}(f\circ i\circ\sigma_l) = f(\operatorname{Im}\sigma_l)\subset f(A)\subset B$ が言える．i.e. $f\circ i\circ\sigma_l\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\,B)$ である．

は well-defined である．故に補題 2.7 で定義した境界写像 $\overline{\partial}_q\colon S_q(X,\,A) \longrightarrow S_{q-1}(X,\,A)$, $\overline{\partial}'_q\colon S_q(Y,\,B) \longrightarrow S_{q-1}(Y,\,B)$ を使って well-defined な準同型

$$\overline{f}_q\colon H_q(X,\,A) \longrightarrow H_q(Y,\,B),\ \big(u + S_q(A)\big) + \operatorname{Im}\overline{\partial}_{q+1} \longmapsto \big(f_q(u) + S_q(B)\big) + \operatorname{Im}\overline{\partial}'_{q+1}$$

を定義できる[*12]．これを**誘導準同型**と呼ぶ．

2.4.3 切除同型

定理 2.5: 切除定理

位相空間 X と部分空間 $U,\,A \subset X$ が

$$U \subset X \text{ かつ } \overline{U} \subset A^\circ$$

を充たすとする．
このとき $\forall q \geq 0$ に対して包含写像[a] $i\colon X \setminus U \longrightarrow X$ の誘導準同型は同型である：

$$\overline{i}_q\colon H_q(X \setminus U,\,A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_q(X,\,A)$$

[a] これは空間対 $(X \setminus U,\,A \setminus U)$, $(X,\,A)$ の間の連続写像と見做せるので，前小節の構成を適用できる．

<u>証明</u> $B \coloneqq X \setminus U$ とおく．$A \cap B = A \setminus U$ であるから $S_q(A) \cap S_q(B) = S_q(A \cap B) = S_q(A \setminus U)$ が成り立つ．従って

$$S_q(X \setminus U,\,A \setminus U) = S_q(B,\,A \cap B) = \frac{S_q(B)}{S_q(A) \cap S_q(B)}$$

だが，第二同型定理により

$$S_q(X \setminus U,\,A \setminus U) \cong \frac{S_q(A) + S_q(B)}{S_q(A)}$$

がわかる．

ここで仮定より $X \setminus A^\circ \subset X \setminus \overline{U} = (X \setminus U)^\circ = B^\circ$ だから

$$X = A^\circ \cup \big(X \setminus A^\circ\big) \subset A^\circ \cup B^\circ$$

したがって $X = A^\circ \cup B^\circ$ が成り立つ．よって命題 2.6 が使えて，包含準同型 $\iota_q\colon S_q(A) + S_q(B) \hookrightarrow S_q(X)$ はチェイン・ホモトピー同値写像である．このとき 2 つの短完全列

$$0 \longrightarrow S_\bullet(A) \xrightarrow{i_*} S_\bullet(A) + S_\bullet(B) \xrightarrow{p_*} \frac{S_\bullet(A) + S_\bullet(B)}{S_\bullet(A)} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow S_\bullet(A) \xrightarrow{i_*} S_\bullet(X) \xrightarrow{p_*} S_\bullet(X,\,A) \longrightarrow 0$$

の間の可換図式

[*12] 記号の濫用だが...

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & S_\bullet(A)+S_\bullet(B) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_\bullet"] & \frac{S_\bullet(A)+S_\bullet(B)}{S_\bullet(A)} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{i}_\bullet"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(A) \arrow[r] & S_\bullet(X) \arrow[r] & S_\bullet(X,\, A) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

の横 2 列をホモロジー長完全列で繋ぎ 5 項補題を適用すれば，赤色をつけた部分から

$$H_q\left(\frac{S_q(A)+S_q(B)}{S_q(A)}\right) \cong H_q(X,\, A)$$

が従う． ■

2.4.4　空間対の Mayer-Vietoris 完全列

定理 2.6: 空間対の Mayer-Vietoris 完全列

空間の 3 対[a] $(X,\, X_1,\, A_1),\ (X,\, X_2,\, A_2)$ が条件

$$A_1^\circ \cup A_2^\circ = A_1 \cup A_2, \quad X_1^\circ \cup X_2^\circ = X_1 \cup X_2$$

を充たすとする．このとき $\forall q \geq 1$ に対して**連結準同型**

$$\partial_\bullet \colon H_q(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \longrightarrow H_q(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2)$$

が存在して，完全列

$$\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{i} H_q(X_1,\, A_1) \oplus H_q(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_q(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \\
&\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \\
&\xrightarrow{i} H_q(X_1,\, A_1) \oplus H_q(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_q(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \\
&\xrightarrow{\partial_\bullet} \cdots \\
&\xrightarrow{i} H_0(X_1,\, A_1) \oplus H_0(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_0(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，空間対の包含写像

$$\begin{aligned}
i_1 &\colon (X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X_1,\, A_1), \\
i_2 &\colon (X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X_2,\, A_2), \\
j_1 &\colon (X_1,\, A_1) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2), \\
j_2 &\colon (X_2,\, A_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2)
\end{aligned}$$

の誘導準同型によって

$$\begin{aligned}
i(w) &\coloneqq \Big((i_1)_q(w),\, -(i_2)_q(w) \Big), \\
j(u,\, v) &\coloneqq (j_1)_q(u) + (j_2)_q(v)
\end{aligned}$$

と定義する．ただし $w \in H_q(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_1)$，$u \in H_q(X_1,\, A_1)$，$v \in H_q(X_2,\, A_2)$ である．これらは自然である．

[a] つまり，$A_i \subset X_i \subset X$

証明 矢印が包含写像からなる可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_q(A_1 \cap A_2) \arrow[r] \arrow[d] & S_q(X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[d] & S_q(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_q(A_1) \oplus S_q(A_2) \arrow[r] \arrow[d] & S_q(X_1) \oplus S_q(X_2) \arrow[r] \arrow[d] & S_q(X_1,\, A_1) \oplus S_q(X_2,\, A_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_q(A_1) + S_q(A_2) \arrow[r] \arrow[d] & S_q(X_1) + S_q(X_2) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{S_q(X_1)+S_q(X_2)}{S_q(A_1)+S_q(A_2)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

を考える．この図式は横 3 行が全て完全で，縦 3 列のうち左側の 2 列も完全である．従って 9 項補題により右の縦列も完全になる．

こうしてチェイン複体の短完全列

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow S_\bullet(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \longrightarrow S_\bullet(X_1,\, A_1) \oplus S_\bullet(X_2,\, A_2) \\
&\longrightarrow \frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2)} \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

が得られ，ホモロジー長完全列

$$
\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{i} H_q(X_1,\, A_1) \oplus H_q(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_q\left(\frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2)}\right) \\
&\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \\
&\xrightarrow{i} H_q(X_1,\, A_1) \oplus H_q(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_q\left(\frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2)}\right) \\
&\xrightarrow{\partial_\bullet} \cdots \\
&\xrightarrow{i} H_0(X_1,\, A_1) \oplus H_0(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_0(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \longrightarrow 0
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

が得られる．ここで，縦の矢印が包含準同型であるようなチェイン複体の短完全列の射

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2) \arrow[r] \arrow[d] & S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{S_\bullet(X_1)+S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1)+S_\bullet(A_2)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(A_1 \cup A_2) \arrow[r] & S_\bullet(X_1 \cup X_2) \arrow[r] & S_\bullet(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

が存在する．仮定と命題 2.6 より縦の左 2 列は同型であり，ホモロジー長完全列と 5 項補題から赤色の矢印が同型だとわかる：

$$
H_q\left(\frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2)}\right) \cong H_q(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2)
$$

これを式 (2.4.1) に代入することで Mayer-Vietoris 完全列が得られる． ■

2.5 位相多様体への応用

特異ホモロジーの理論の応用として，位相多様体の向き付けを議論する．この節の内容は [10, 第 4 章] および [6, Appendix A] に大きく依存している．

2.5.1 写像度

定義 2.15: 写像度

ある $n \geq 1$ を固定する．$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ が以下の条件を充たすとする：

(deg-1) X は Hausdorff 空間.

(deg-2) $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$

(deg-3) $\forall p \in X$ について，空間対 $(X, \emptyset)$ から $(X, X \setminus \{p\})$ への包含写像[a]

$$j_p \colon (X, \emptyset) \longrightarrow (X, X \setminus \{p\}),\ x \longmapsto x$$

が誘導する準同型

$$(j_p)_n \colon H_n(X) \longrightarrow H_n(X, X \setminus \{p\})$$

は同型.

(deg-2) より $H_n(X)$ の生成元は ± 1 の 2 つである．X, Y についてそれぞれどちらか一方を選び，それを $[X], [Y]$ とおく．

[a] 集合論の約束より空集合の像は空集合だから $j_p(\emptyset) = \emptyset \subset X \setminus \{p\}$.

連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ の**写像度** (mapping degree) とは，誘導準同型 $f_n \colon H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ による生成元の像

$$f_n([X]) = d[Y]$$

によって一意に定まる $d \in \mathbb{Z}$ のこと．記号として $\boldsymbol{\deg(f)} \coloneqq d$ と書く．

補題 2.8:

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす位相空間はコンパクト空間である．

証明 条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす位相空間 X と，$H_n(X)$ の生成元 $[X] \in \{\pm 1\}$ を与える．$[X]$ の任意の代表元 $\sum_{i=1}^{m} a_i \sigma_i$ を 1 つとる．Δ^n はコンパクトで特異 n 単体の元 σ_i は連続写像だから $\bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i(\Delta^n)$ もコンパクトである．

もし $\exists p \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i(\Delta^n))$ ならば，$1 \leq \forall i \leq m$，$\mathrm{Im}\, \sigma_i \subset X \setminus \{p\}$ なので $[X] = [\sum_{i=1}^{m} a_i \sigma_i] \in H_n(X \setminus \{p\}) = \mathrm{Ker}(j_p)_n$ が成り立つ．ところがこのとき $(j_p)_n([X]) = 0 \notin \{\pm 1\}$ が $H_n(X, X \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元ということになり矛盾．従って $X = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i(\Delta^n)$ であり，X はコンパクトである． ■

命題 2.7:

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとり，それぞれの生成元 $[X], [Y], [Z]$ を与える．このとき連続写像 $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$ について以下が成り立つ：

(1) $\deg(\mathrm{id}_X) = 1$

(2) $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$

(3) $f_1 \simeq f_2 \quad \Longrightarrow \quad \deg(f_1) = \deg(f_2)$

(4) f がホモトピー同値写像 $\quad \Longrightarrow \quad \deg(f) = \pm 1$

(5) $\deg(f) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ は全射

証明 (1) $S_\bullet$ および $H_\bullet$ が関手なので

$$(\mathrm{id}_X)_n = H_n\bigl(S_\bullet(\mathrm{id}_X)\bigr) = 1_{H_n(X)}$$

が成り立つ．よって $(\mathrm{id}_X)_n([X]) = [X]$.

(2) $S_\bullet$ および $H_\bullet$ が関手なので

$$(g\circ f)_n = H_n\bigl(S_\bullet(g\circ f)\bigr) = H_n\bigl(S_\bullet(g)\bigr)\circ H_n\bigl(S_\bullet(f)\bigr) = g_n\circ f_n$$

が成り立つ．よって $(g\circ f)_n([X]) = g_n\bigl(f_n([X])\bigr) = \deg(g)\deg(f)[Z]$.

(3) H_n のホモトピー不変性より

$$f_{1n} = H_n\bigl(S_\bullet(f_1)\bigr) = H_n\bigl(S_\bullet(f_2)\bigr) = f_{2n}$$

が成り立つ．

(4) $g\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\,X)$ をホモトピー逆写像とする．すると (1)-(3) より

$$1 = \deg(\mathrm{id}_X) = \deg(g\circ f) = \deg(g)\deg(f)$$

かつ定義から $\deg(f),\,\deg(g)\in\mathbb{Z}$ なので $\deg(f)=\pm1$.

(5) f が全射でないとする．このとき $p\in Y\setminus \mathrm{Im}\, f$ が存在する．従って包含写像 $i_p\colon Y\setminus\{p\}\hookrightarrow Y$ とおくと $f = i_p\circ f$ だから

$$\deg(f)[Y] = f_n([X]) = (i_p)_n\circ f_n([X])$$

となる．ところが完全列

$$H_n(Y\setminus\{p\}) \xrightarrow{(i_p)_n} H_n(Y) \xrightarrow{(j_p)_n} H_n(Y,\,Y\setminus\{p\})$$

があるので $(j_p)_n\bigl(\deg(f)[Y]\bigr) = (j_p)_n\circ(i_p)_n\bigl(f_n([X])\bigr) = 0$ となる．条件 **(deg-3)** より $(j_p)_n$ は同型だから $\deg(f)=0$ が言えた．

■

補題 2.9: 一点を除く切除同型

X をHausdorff 空間とする．点 $p\in X$ および p の開近傍 $p\in U\subset X$ を与える．
このとき，包含写像 $\iota_{U,\,p}\colon (U,\,U\setminus\{p\})\hookrightarrow(X,\,X\setminus\{p\})$ は同型

$$(\iota_{U,\,p})_\bullet\colon H_\bullet(U,\,U\setminus\{p\}) \xrightarrow[\text{exc}]{\cong} H_\bullet(X,\,X\setminus\{p\})$$

を誘導する．

証明 $X\setminus U$ は閉集合だから $\overline{X\setminus U} = X\setminus U\subset X\setminus\{p\}$ が成り立つ．ところで 1 点集合 $\{p\}\subset X$ は X のコンパクト集合だが，仮定より X は Hausdorff 空間なので，補題 D.3-(1) から閉集合でもある．従って $X\setminus\{p\}$ は開集合となり $(X\setminus\{p\})^\circ = X\setminus\{p\}$ が成り立つ．以上の議論より $X\setminus U\subset X$ かつ $\overline{X\setminus U}\subset(X\setminus\{p\})^\circ$ が成り立つので切除定理が使えて証明が終わる． ■

定義 2.16: 向き・局所的写像度

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす $X,\,Y\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，それぞれの生成元 $[X]\in H_n(X),\,[Y]\in H_n(Y)$ を与える．

- 点 $p \in X$ における X の**向き** (orientation) とは,

$$[\boldsymbol{X}]_{\boldsymbol{p}} \coloneqq (j_p)_n([X]) \in H_n(X,\, X \setminus \{p\})$$

のこと[a].

- 連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ がある点 $p \in X$ において以下の条件を充たすとする：

(局所同相的)

点 p の開近傍 $p \in U \subset X$ であって，制限 $f|_U \colon U \longrightarrow f(U)$ が同相写像となるようなものが存在する．

点 $p \in X$ における X の**局所的写像度** (local mapping degree) とは,

$$(\iota_{f(U),\, f(p)})_n \circ \overline{f}_n \circ (\iota_{U,\, p})_n^{-1}([X]_p) = \deg_p(f)[Y]_{f(p)} \in H_n(Y,\, Y \setminus \{f(p)\})$$

により一意に定まる $\boldsymbol{\deg_p(f)} \in \{\pm 1\}$ のこと．ただし補題 2.9 の記号を使った．

[a] **(deg-3)** より $[X]_p$ は $H_n(X,\, X \setminus \{p\})$ の生成元である．

命題 2.8:

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす $X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとり，それぞれの生成元 $[X],\, [Y],\, [Z]$ を与える．連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y),\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ はそれぞれ点 $p,\, f(p)$ において局所同相的であるとする．

このとき $g \circ f$ は p において局所同相的で,

$$\deg_p(g \circ f) = \deg_{f(p)}(g) \deg_p(f)$$

が成り立つ．

証明 仮定より開近傍 $p \in U \subset X,\; f(p) \in V \subset Y$ が存在して $f|_U \colon U \longrightarrow f(U),\; g|_V \colon V \longrightarrow g(V)$ が同相写像となる．このとき $U' \coloneqq f^{-1}\bigl(f(U) \cap V\bigr),\, V' \coloneqq f(U) \cap V,\, W' \coloneqq g\bigl(f(U) \cap V\bigr)$ とおくとこれらはそれぞれ $p,\, f(p),\, g\bigl(f(p)\bigr)$ の開近傍で，かつ制限 $g \circ f|_{U'} \colon U' \longrightarrow W'$ は同相写像である．i.e. $g \circ f$ は局所同相的である．$S_\bullet$ および H_n の関手性から $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
&(\iota_{W',\, g(f(p))})_n \circ (g \circ f)_n \circ (\iota_{U',\, p})_n^{-1}([X]_p) \\
&= (\iota_{W',\, g(f(p))})_n \circ g_n \circ (\iota_{V',\, f(p)})^{-1} \circ (\iota_{V',\, f(p)}) \circ f_n \circ (\iota_{U',\, p})_n^{-1}([X]_p) \\
&= (\iota_{W',\, g(f(p))})_n \circ g_n \circ (\iota_{V',\, f(p)})^{-1}\bigl(\deg_p(f)[Y]_{f(p)}\bigr) \\
&= \deg_{f(p)}(g) \deg_p(f)[Z]_{g(f(p))}
\end{aligned}$$

が言える． ■

定理 2.7: 写像度の局所化

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす $X,\ Y,\ Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとり，それぞれの生成元 $[X],\ [Y],\ [Z]$ と連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\ Z)$ を与える．ある点 $q \in Y$ が存在して，$\forall p \in f^{-1}(\{q\})$ について f が局所同相的であるとする．
このとき $f^{-1}(\{q\})$ は有限集合であり，

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(\{q\})} \deg_p(f)$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> 条件 **(deg-1)** より $X,\ Y$ は Hausdorff 空間なので，補題 D.3-(1) よりコンパクト集合 $\{q\} \subset Y$ は Y の閉集合である．したがって f の連続性から $f^{-1}(\{q\})$ は X の閉集合である．さらに補題 2.8 より X はコンパクト Hausdorff 空間なので，補題 D.3-(2) より閉部分集合 $f^{-1}(\{q\}) \subset X$ はコンパクトである．

ところで，仮定より $\forall p \in f^{-1}(\{q\})$ に対して p の開近傍 $p \in U_p \subset X$ が存在して制限 $f|_{U_p} \colon U_p \longrightarrow f(U_p)$ が同相写像になる．i.e. $f|_{U_p}$ は全単射なので $U_p \cap f^{-1}(\{q\}) = (f|_{U_p})^{-1}(\{q\}) = \{p\}$ が成り立つ．このとき $f^{-1}(\{q\}) \subset \bigcup_{p \in f^{-1}\{q\}} U_p$ だが $f^{-1}(\{q\})$ はコンパクトなので $\exists p_1,\ \dots,\ p_m \in f^{-1}(\{q\}),\ f^{-1}(\{q\}) \subset \bigcup_{i=1}^m U_{p_i}$ が言える．よって

$$f^{-1}(\{q\}) = \left(\bigcup_{i=1}^m U_p\right) \cap f^{-1}(\{q\}) = \bigcup_{i=1}^m (U_{p_i} \cap f^{-1}(\{q\})) = \bigcup_{i=1}^m \{p_i\} = \{p_1,\ \dots,\ p_m\}$$

であり，$f^{-1}(\{q\})$ が有限集合であることが示された．

後半の証明をする．上述の記号を $U_i \coloneqq U_{p_i}\ (i = 1,\ \dots,\ m)$ と再定義する．また，q の開近傍 $q \in V \subset Y$ を $f(U_i) \subset V\ (1 \le \forall i \le m)$ を充たすようにとる．X は Hausdorff 空間なので $i \neq j \implies U_i \cap U_j = \emptyset$ を充たすようにできる．このとき $U \coloneqq \bigcup_{i=1}^m U_i$ は非交和になるため，

$$\begin{aligned}
S_\bullet(U,\ U \setminus \{p_1,\ \dots,\ p_m\}) &= \frac{S_\bullet\left(\coprod_{i=1}^m U_i\right)}{S_\bullet\left(\coprod_{i=1}^m (U_i \setminus \{p_i\})\right)} \\
&= \frac{\bigoplus_{i=1}^m S_\bullet(U_i)}{\bigoplus_{i=1}^m S_\bullet(U_i \setminus \{p_i\})} \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^m \frac{S_\bullet(U_i)}{S_\bullet(U_i \setminus \{p_i\})} \\
&= \bigoplus_{i=1}^m S_\bullet(U_i,\ U_i \setminus \{p_i\})
\end{aligned}$$

が成り立ち[*13]，これの第 n ホモロジーをとることで

$$H_n\big(U,\, U \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\}\big) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} H_n(U_i,\, U_i \setminus \{p_i\})$$

がわかる．補題 2.9 より

$$(\iota_{U_i,\, p_i})\colon H_n(U_i,\, U_i \setminus \{p_i\}) \xrightarrow{\cong} H_n(X,\, X \setminus \{p_i\}) \cong \mathbb{Z} \tag{2.5.1}$$

だから $H_n\big(U,\, U \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\}\big) \cong \mathbb{Z}^{\oplus m}$ である．また，U は Hausdorff 空間 X の開集合なので $X \setminus U = \overline{X \setminus U} \subset X \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\} = \big(X \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\}\big)^{\circ}$ が成り立つ．よって切除定理を使うことができて

$$H_n\big(U,\, U \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\}\big) \cong H_n\big(X,\, X \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\}\big) \cong \mathbb{Z}^{\oplus m} \tag{2.5.2}$$

が成り立つ．

ところで，2 つの包含写像

$$\begin{aligned} k_i\colon U_i \hookrightarrow X,\ x \longmapsto x, \\ \pi_i\colon X \hookrightarrow X,\ x \longmapsto x \end{aligned}$$

はそれぞれ $k_i(U_i \setminus \{p_i\}) \subset X \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\}$ および $\pi_i(X \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\}) \subset X \setminus \{p_i\}$ を充たす．従って誘導準同型

$$\begin{aligned} (\overline{k_i})_n\colon H_n(U_i,\, U_i \setminus \{p_i\}) &\longrightarrow H_n(X,\, X \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus m}, \\ u &\longmapsto \big(0,\, \dots,\, \underbrace{(\iota_{U_i,\, p_i})_n(u)}_{i},\, \dots,\, 0\big) \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

および

$$\begin{aligned} (\overline{\pi_i})_n\colon H_n(X,\, X \setminus \{p_1,\, \dots,\, p_m\}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus m} &\longrightarrow H_n(X,\, X \setminus \{p_i\}), \\ (u_1,\, \dots,\, u_m) &\longmapsto u_i \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

を考えることができる．さらに包含写像

$$j\colon (X,\, \emptyset) \hookrightarrow \big(X,\, X \setminus P\big),\ x \longmapsto x$$

の誘導準同型

$$\overline{j}_n\colon H_n(X) \longrightarrow H_n(X,\, X \setminus P) \tag{2.5.5}$$

を考えることができる．(2.5.1), (2.5.2), (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5) を併せると以下の可換図式[*14]が成り立つ[*15]：

[*13] Δ^q は弧状連結なので連続写像によって U の弧状連結成分に移される．故に $\forall q \geq 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, \coprod_{i=1}^m U_i) = \coprod_{i=1}^m \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, U_i)$ が成り立ち，$S_q(\coprod_{i=1}^m U_i) = \mathbb{Z}^{\oplus \coprod_{i=1}^m \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, U_i)} = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}^{\oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, U_i)} = \bigoplus_{i=1}^m S_q(U_i)$ がわかる．同様の議論で $S_q\big(\coprod_{i=1}^m (U_i \setminus \{p_i\})\big) = \bigoplus_{i=1}^m S_q(U_i \setminus \{p_i\})$ も従う．3 行目の同型は，全射準同型 $\psi\colon \bigoplus_{i=1}^m S_\bullet(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m \frac{S_\bullet(U_i)}{S_\bullet(U_i \setminus \{p_i\})}$，$(u_1,\, \dots,\, u_m) \longmapsto \big(u_1 + S_\bullet(U_1 \setminus \{p_1\}),\, \dots,\, u_m + S_\bullet(U_m \setminus \{p_m\})\big)$ について $\mathrm{Ker}\, \psi = \bigoplus_{i=1}^m S_\bullet(U_i \setminus \{p_i\})$ なので準同型定理を適用すれば従う．

[*14] 連続写像の段階で可換なので，関手 $S_\bullet$, H_n を作用させても可換である．

[*15] $(\iota_{W,\, w})_n$ や $(j_x)_n$ の矢印は同型である．

$$
\begin{tikzcd}
& H_n(X) \arrow[r, "f_n"] \arrow[dl, "(j_{p_i})_n"'] \arrow[d, "\overline{j}_n"'] & H_n(Y) \arrow[d, "(j_q)_n"] \\
H_n(X,\, X \setminus \{p_i\}) & H_n(X,\, X \setminus P) \arrow[l, "(\overline{\pi_i})_n"] \arrow[r, "\overline{f}_n"] & H_n(Y,\, Y \setminus \{q\}) \\
& H_n(U_i,\, U_i \setminus \{p_i\}) \arrow[ul, "(\iota_{U_i,\, p_i})_n"] \arrow[u, "(\overline{k_i})_n"] \arrow[r, "\overline{f}_n"] & H_n(V,\, V \setminus \{q\}) \arrow[u, "(\iota_{V,\, q})_n"']
\end{tikzcd}
$$

図式中の $H_n(X)$ から出発して $[X] \in H_n(X)$ の行き先を考える．写像度の定義と局所的写像度の定義より

$$(j_q)_n \circ f_n([X]) = \deg(f)[Y]_{f(q)}$$

である．一方，左上の三角形の可換性から

$$[X]_{p_i} = (\overline{\pi_i})_n \circ \overline{j}_n([X]) \quad (1 \leq \forall i \leq m)$$

が得られる．故に (2.5.3), (2.5.4) より

$$\overline{j}_n([X]) = \left([X]_{p_1},\, [X]_{p_2},\, \dots,\, [X]_{p_m}\right) = \sum_{i=1}^{m} (\overline{k_i})_n \circ (\iota_{U_i,\, p_i})_n^{-1}([X]_{p_i})$$

が言える．さらに右下の四角形の可換性から

$$\begin{aligned}
\overline{f}_n \circ (\overline{k_i})_n \circ (\iota_{U_i,\, p_I})_n^{-1}([X]_{p_i}) &= (\iota_{V,\, q})_n \circ \overline{f}_n \circ (\iota_{U_i,\, p_i})_n^{-1}([X]_{p_i}) \\
&= \deg_{p_i}(f)[Y]_{f(p_i)} \\
&= \deg_{p_i}(f)[Y]_q
\end{aligned}$$

が分かる．従って右上の四角形の可換性から

$$\begin{aligned}
& (j_q)_n \circ f_n([X]) = \overline{f}_n \circ \overline{j}_n([X]) \\
\iff \quad & \deg(f)[Y]_{f(q)} = \sum_{i=1}^{m} \overline{f}_n \circ (\overline{k_i})_n \circ (\iota_{U_i,\, p_I})_n^{-1}([X]_{p_i}) = \left(\sum_{i=1}^{m} \deg_{p_i}(f)\right)[Y]_q
\end{aligned}$$

が成り立つ．$[Y]_q$ は $H_n(Y,\, Y \setminus \{q\})$ の生成元であり，示された． ■

定理 2.8: Jacobi 行列との関係

$U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，C^∞ 微分同相写像 $f\colon U_1 \longrightarrow U_2$ を与える．
このとき $\forall x \in U_1$ に対して

$$\deg_x f = \frac{\det(Jf)_x}{|\det(Jf)_x|}$$

が成り立つ．ただし $(Jf)_x$ は f の点 x における Jacobi 行列である．

2.5.2 位相多様体の境界と向き付け

まず，位相多様体の境界と向き付けについて述べる．

$\mathbb{R}^n$ の**閉じた上半空間** (closed upper half space) およびその境界を $n > 0$ のとき

$$\mathbb{H}^n := \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^n \geq 0 \right\}$$
$$\partial\mathbb{H}^n := \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^n = 0 \right\}$$

と定義し，$n = 0$ のとき

$$\mathbb{H}^0 := \{0\}$$
$$\partial\mathbb{H}^0 := \emptyset$$

と定義する．

定義 2.17: 境界付き位相多様体

- Hausdorff 空間 $(M, \mathscr{O})$ は，その上の任意の点が $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ と同相になるような開近傍を持つとき，n 次元**境界付き位相多様体** (topological manifold with boundary) と呼ばれる．
- 境界付き位相多様体 $(M, \mathscr{O})$ の開集合 $U \in \mathscr{O}$ であって，$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ の開集合 V との同相写像 $\varphi\colon U \to V$ が存在するとき，組 (U, φ) を M の**チャート** (chart) と呼ぶ．

必要ならば，境界付き位相多様体 M のチャート (U, φ) のうち，$\varphi(U)$ が $\mathbb{R}^n$ と同相なものを**内部チャート** (interior chart)，$\varphi(U)$ が $\mathbb{H}^n$ の開集合と同相で，かつ $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$ を充たすものを**境界チャート** (boundary chart) と呼ぶことにしよう．

定義 2.18: 内部・境界

$(M, \mathscr{O})$ を境界付き位相多様体とし，$\forall p \in M$ を一つとる．

(1) p が M の**内点** (interior point) であるとは，ある内部チャート (U, φ) が存在して $p \in U$ となること．

(2) p が M の**境界点** (boundary point) であるとは，ある境界チャート (U, φ) が存在して $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ となること．

M の内点全体の集合を**境界付き位相多様体 M の内部** (interior) と呼び，$\mathbf{Int}\, \boldsymbol{M}$ と書く．M の境界点全体の集合を**境界付き位相多様体 M の境界** (boundary) と呼び，$\boldsymbol{\partial M}$ と書く．

定義から明らかなように，$\forall p \in M$ は内点または境界点である．というのも，$p \in M$ が境界点でないならば，p は内点であるか，または境界チャート (U, φ) に対して $p \in U$ かつ $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^n$ を充たす．後者の場合 φ の $U \cap \varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Int}\ \mathbb{H}^n\bigr)$ への制限は内部チャートになり，かつ $p \in U \cap \varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Int}\ \mathbb{H}^n\bigr)$ を充たすので，p は M の内点なのである．

しかしながら，あるチャートに関しては内点だが，別のチャートに関しては境界点であるような点 $p \in M$ が存在しないことは非自明である．この問題はホモロジーによって解決できる．

命題 2.9: ホモロジーによる位相多様体の境界の特徴付け

n 次元境界付き位相多様体 M に対して以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}\, M &= \left\{\, p \in M \;\middle|\; H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = \mathbb{Z} \,\right\} \\ \partial M &= \left\{\, p \in M \;\middle|\; H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = 0 \,\right\} \end{aligned}$$

<u>**証明**</u> 任意の点 $p \in M$ と p を含むチャート $(\varphi,\, U)$ をとる．補題 2.9 より切除同型

$$H_n(M,\, M \setminus \{p\}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(U,\, U \setminus \{p\}) \cong H_n(\varphi(U),\, \varphi(U) \setminus \{\varphi(p)\}) \tag{2.5.6}$$

が成り立つ．

$p \in \mathrm{Int}\, M$ ならば，式 (2.5.6) において $(U,\, \varphi)$ を内部チャートとして

$$H_n(M,\, M \setminus \{p\}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(p)\}) = \mathbb{Z}$$

が成り立つ．逆に $H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = \mathbb{Z} \cong H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(p)\})$ ならば p を含む内部チャートが存在する．従って $p \in \mathrm{Int}\, M \iff H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = \mathbb{Z}$ である．

$p \in \partial M$ ならば，式 (2.5.6) において $(U,\, \varphi)$ を境界チャートとして

$$H_n(M,\, M \setminus \{p\}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(\mathbb{H}^n,\, \mathbb{H}^n \setminus \{\varphi(p)\}) = 0$$

が成り立つ．逆に $H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = 0 \cong H_n(\mathbb{H}^n,\, \mathbb{H}^n \setminus \{\varphi(p)\})$ ならば p を含む境界チャートが存在する．従って $p \in \partial M \iff H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = 0$ である． ■

系 2.9: 多様体の境界の性質

境界付き位相多様体 M に対して以下が成り立つ：

(1) $M = \mathrm{Int}\, M \sqcup \partial M$

(2) $\partial(\partial M) = \emptyset$

<u>**証明**</u> (1) 命題 2.9 と $\mathbb{Z} \ncong 0$ より従う．

(2) $\forall p \in \partial M$ に対して，ある境界チャート $(U,\, \varphi)$ が存在して $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ を充たす．このとき $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ における $\varphi(p)$ の開近傍であり，局所座標の制限 $\varphi|_{\varphi^{-1}\left(\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})\right)}$ は同相写像である．従って

$$\begin{aligned} H_{n-1}(\partial M,\, \partial M \setminus \{p\}) &\underset{\text{exc}}{\cong} H_{n-1}\bigl(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}),\, \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \setminus \{\varphi(p)\}\bigr) \\ &\cong H_{n-1}\bigl(\mathbb{H}^n \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}),\, \mathbb{H}^n \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \setminus \{\varphi(p)\}\bigr) \\ &= H_{n-1}(\mathbb{R}^{n-1},\, \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\varphi(p)\}) \\ &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

であり，命題 2.9 から $\partial M = \mathrm{Int}(\partial M)$ が従う．(1) よりこのことは $\partial(\partial M) = \emptyset$ を意味する．

■

! 位相空間 X の部分空間 $A \subset X$ の境界を $\mathrm{bd}(A)$ と書くと，<u>必ずしも $\mathrm{bd}\bigl(\mathrm{bd}(A)\bigr) = \emptyset$ は成り立たない</u>．このことから，<u>位相多様体の境界と部分空間の境界は別物</u>であるとわかる．

次に，位相多様体の向きを定義する．

定義 2.19: 位相多様体の向き付け

境界付き位相多様体 M とそのアトラス $\{(U_\lambda,\, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．

- M が**向き付けられている** (oriented) とは，$\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ および $\forall p\in U_\alpha\cap U_\beta\cap \mathbf{Int}\,M$ に対して，座標変換 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ の p における局所的写像度が

$$\deg_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}) = +1$$

を充たすこと．

- チャート $(U,\,\varphi)$ が**正の** (positive)（resp. **負の** (negative)）チャートであるとは，$\forall\lambda\in\Lambda$ および $\forall p\in U\cap U_\alpha\cap \mathbf{Int}\,M$ に対して $\deg_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta\circ\varphi^{-1}) = +1$（resp. -1）が成り立つこと[a]

[a] $\forall p\in U$ に対してある $\lambda\in\Lambda$ が存在して $p\in U_\lambda$ かつ $\deg_{\varphi(p)}(\varphi_\lambda\circ\varphi^{-1}) = +1$（resp. -1）が成り立つことと同値．

基準となる $H_n(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\cong\mathbb{Z}$ の生成元を決めよう．まず $H_n(\Delta^n,\,\partial\Delta^n)$ の生成元を求める．

補題 2.10:

恒等写像のホモロジー類 $[\mathrm{id}_{\Delta^n}]$ は $H_n(\Delta^n,\,\partial\Delta^n)\cong\mathbb{Z}$ の生成元である．

証明 [10, 定理 4.1.10] を参照

■

次に $\Delta^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ の $\mathbb{R}^n$ への埋め込み

$$\iota_n\colon \Delta^n\hookrightarrow\mathbb{R}^n,\ (x^0,\,x^1,\,\dots,\,x^n)\longmapsto(x^1-x^0,\,x^2-x^0,\,\dots,\,x^n-x^0)$$

を考える．点

$$p_0 \coloneqq \frac{1}{n+1}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\in\Delta^n$$

は $\iota_n(p_0)=0\in\mathbb{R}^n$ を充たすから，切除同型

$$(\iota_n)_n\colon H_n(\Delta^n,\,\Delta^n\setminus\{p_0\})\xrightarrow{\cong}H_n(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

がある．さらに同型 $H_n(\Delta^n,\,\Delta^n\setminus\{p_0\})\cong H_n(\Delta^n,\,\partial\Delta^n)$ を合成することで

$$\boldsymbol{\mu_0}\coloneqq(\iota_n)_n([\mathrm{id}_{\Delta^n}])=[\iota_n]\in H_n(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$$

が生成元となる．

補題 2.11: 生成元の基点の平行移動

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ に関する同型写像

$$H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$$

が成り立つ．

証明 $x \in B_r(0)$ となるように正数 $r > 0$ をとる．$\mathbb{R}^n$ は Hausdorff 空間なのでコンパクト部分空間 $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ は閉集合であり，$\overline{\bigl(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(0)\bigr)} = \mathbb{R}^n \setminus B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x\} = (\mathbb{R}^n \setminus \{x\})^\circ$ が成り立つ．故に切除定理が使えて，包含写像 $\bigl(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(0)\bigr) \hookrightarrow \bigl(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}\bigr)$ が誘導する準同型は同型になる．従って図式

$$H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xleftarrow[\text{exc}]{\cong} H_n\bigl(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(0)\bigr) \xrightarrow[\text{exc}]{\cong} H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$$

から所望の同型が得られる． ■

補題 2.11 の同型による μ_0 の像を $\boldsymbol{\mu_x}$ と書くことにする．

∂M に自然に向きが定まることを示す．$\widehat{D}^n \coloneqq D^{n-1} \times [0,\, 1]$ とおく．$\widehat{D}^n$ は n 次元境界付き位相多様体で，$\partial\widehat{D}^n = D^{n-1} \times \{0,\, 1\} \cup S^{n-2} \times [0,\, 1]$ である．

補題 2.12:

$n \geq 2$ とし，$p \in (\widehat{D}^n)^\circ,\, q \in (D^{n-1})^\circ$ を任意にとる．
連結準同型 $\partial_\bullet \colon H_n(\widehat{D}^n,\, \widehat{D}^n \setminus \{p\}) \longrightarrow H_{n-1}(\widehat{D}^n)$ を用いた図式

$$\begin{aligned} H_n(\widehat{D}^n,\, \widehat{D}^n \setminus \{p\}) &\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{n-1}(\widehat{D}^n \setminus \{p\}) \\ &\xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\widehat{D}^n) \\ &\xrightarrow[\text{exc}]{\cong} H_{n-1}\bigl(\partial\widehat{D}^n,\, \partial\widehat{D}^n \setminus \{(q,\, 0)\}\bigr) \cong H_{n-1}(D^{n-1},\, D^{n-1} \setminus \{q\}) \end{aligned}$$

がある．特に，生成元 $\mu_p \in H_n(\widehat{D}^n,\, \widehat{D}^n \setminus \{p\})$ は $(-1)^n \mu_q \in H_{n-1}(D^{n-1},\, D^{n-1} \setminus \{q\})$ に写像される．

証明 p と $\partial\widehat{D}^n$ を結ぶ線分を用いてホモトピーを構成することで，部分空間 $\partial\widehat{D}^n \subset \widehat{D^n} \setminus \{p\}$ はレトラクション $r \colon \widehat{D}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \partial\widehat{D}^n$ によって $\widehat{D^n} \setminus \{p\}$ の変位レトラクトになる．従って r の誘導準同型は同型 $H_{n-1}(\widehat{D}^n \setminus \{p\}) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\widehat{D}^n)$ を与える*16．

$p = \bigl(0,\, \dots,\, 0,\, \frac{1}{n+1}\bigr),\, q = 0$ として良い．連続写像

$$h_n \colon \Delta^n \longrightarrow \widehat{D}^n,\ (x^0,\, \dots,\, x^{n-1},\, x^n) \longmapsto (x^1 - x^0,\, \dots,\, x^{n-1} - x^0,\, x^n)$$

を考えると，連続写像

$$H \colon \Delta^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \bigl((x^0,\, \dots,\, x^{n-1},\, x^n),\, t\bigr) \longmapsto (x^1 - x^0,\, \dots,\, x^{n-1} - x^0,\, x^n - tx^0)$$

*16 位相空間 X の部分空間 $A \subset X$ を与える．連続写像 $r \colon X \longrightarrow A$ がレトラクションであるとは，包含写像を $i \colon A \hookrightarrow X$ と書いたときに $r \circ i = \mathrm{id}_A$ が成り立つことを言う．$A \subset X$ が X の変位レトラクトであるとは，あるレトラクション $r \colon X \longrightarrow A$ が存在して $i \circ r$ と r がホモトピックになることを言う．このとき A と X は同じホモトピー型であり，レトラクション r と包含写像 i がホモトピー同値写像となる．

が h_n と ι_n を繋ぐホモトピーになる．i.e. $[h_n] = [\iota_n] = \mu_p \in H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{p\}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(\widehat{D}^n,\, \widehat{D}^n \setminus \{p\})$ は生成元である．このとき

$$\partial_\bullet(\mu_p) = \partial_\bullet([h_n]) = \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i h_n \circ f_i^{n-1}\right]$$

だが，$i < n$ のとき $r \circ h_n \circ f_i^{n-1}(\Delta^{n-1}) \subset \partial \widehat{D}^n \setminus \{(q,\, 0)\}$ なので

$$\partial_\bullet(\mu_p) = (-1)^n [r \circ h_n \circ d_n^{n-1}] = (-1)^n [\iota_{n-1}] = (-1)^n \mu_q \in H_{n-1}(D^{n-1},\, D^{n-1} \setminus \{q\})$$

が成り立つ． ■

補題 2.13:

開集合 $U_1,\, U_2 \subset \mathbb{H}^n$ と同相写像 $f\colon U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$ を与える．
制限 $f|_{\mathrm{Int}\, U_1}\colon \mathrm{Int}\, U_1 \longrightarrow \mathrm{Int}\, U_2$ が向きを保つならば，$f|_{\partial U_1}\colon \partial U_1 \longrightarrow \partial U_2$ も向きを保つ．

証明 命題 2.5 により $f(\mathrm{Int}\, U_1) = f(\mathrm{Int}\, U_2)$，$f(\partial U_1) = \partial U_2$ が成り立つ．$\forall q_1 \in \partial U_1$ に対して $q_2 \coloneqq f(q_1) \in \partial U_2$ とおき，$f_n(\mu_{q_1}) = \mu_{q_2}$ であることを示す．

円板 $q_2 \in D_2^{n-1} \times \{0\} \subset \partial U_2$ をとり，$\varepsilon_2 > 0$ を $\widehat{D}_2^n \coloneqq D_2^{n-1} \times [0,\, \varepsilon_2] \subset U_2$ を充たすようにとり，円板 $q_1 \in D_1^{n-1} \times \{0\} \subset \partial U_1$ および $\varepsilon_1 > 0$ を $\widehat{D}_1^n \coloneqq D_1^{n-1} \times [0,\, \varepsilon_1] \subset f^{-1}(\widehat{D}_2^n)$ を充たすようにとる．そして $p_1 \coloneqq (q_1,\, \rho_1/2) \in \mathrm{Int}\, \widehat{D}_1^n$，$p_2 \coloneqq f(p_1) \in \mathrm{Int}\, \widehat{D}_2^n$ とおく．

p_2 と $\partial \widehat{D}_2$ の点を結ぶ線分を使って変位レトラクション $r\colon \widehat{D}_2^n \setminus \{p_2\} \longrightarrow \partial \widehat{D}_2$ をとる．このとき横 2 行が補題 2.12 の図式と同じであるような可換図式

$$\begin{tikzcd}
H_n(\widehat{D}_1^n,\, \widehat{D_1}^n \setminus \{p_1\}) \arrow[r, "\partial_\bullet"] \arrow[d, "\overline{f}_n"] & H_{n-1}(\widehat{D}_1^n \setminus \{p_1\}) \arrow[d, "f_n"] & H_{n-1}(\partial \widehat{D}_1^n) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong", "\text{exc}"'] \arrow[d, "(r\circ f)_{n-1}"] & H_{n-1}(\partial \widehat{D}_1^n,\, \partial \widehat{D}_1^n \setminus \{q_1\}) \arrow[d, "\overline{f}_{n-1}"] \\
H_n(\widehat{D}_2^n,\, \widehat{D_2}^n \setminus \{p_2\}) \arrow[r, "\partial_\bullet"] & H_{n-1}(\widehat{D}_2^n \setminus \{p_1\}) \arrow[r, "r_{n-1}"] & H_{n-1}(\partial \widehat{D}_2^n) \arrow[r, "\cong", "\text{exc}"'] & H_{n-1}(\partial \widehat{D}_2^n,\, \partial \widehat{D}_2^n \setminus \{q_2\})
\end{tikzcd}$$

がある．補題 2.12 より，生成元 $\mu_{p_i} \in H_n(\widehat{D}_i^n,\, \widehat{D}_i^n) \quad (i = 1,\, 2)$ はそれぞれ $(-1)^n \mu_{q_i} \in H_{n-1}(\partial \widehat{D}_i^n,\, \partial \widehat{D}_i^n \setminus \{q_i\})$ に写像される．仮定より $f_n(\mu_{p_1}) = \mu_{p_2}$ であるから，図式を左上の $H_n(\widehat{D}_1^n,\, \widehat{D_1}^n \setminus \{p_1\})$ から右下の $H_{n-1}(\partial \widehat{D}_2^n,\, \partial \widehat{D}_2^n \setminus \{q_2\})$ にかけて追跡することで

$$f_n(\mu_{q_1}) = \mu_{q_2}$$

がわかる． ■

命題 2.10: 幾何学的に誘導された向き

n 次元境界付き位相多様体 M がアトラス $\bigl\{(U_\lambda,\, \varphi_\lambda)\bigr\}_{\lambda \in \Lambda}$ によって向き付けられているとする．
このとき境界 ∂M は向き付け可能である．

証明 仮定より $\forall \alpha,\, \beta \in \Lambda$ および $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap \mathrm{Int}\, M$ に対して $\deg_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = +1$ が成り立つ．i.e. $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$，$\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ の上の同相写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ の制限 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\mathrm{Int}(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap \mathrm{Int}\, M) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap \mathrm{Int}\, M)$ は向きを保つ．すると補題 2.13 より制限 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\partial(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap \partial M) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap \partial M)$ も向きを保つ． ■

2.5.3　基本類

部分空間 $K \subset L \subset X$ に関して，包含写像 $(X,\, X \setminus L) \longrightarrow (X,\, X \setminus K)$ を $\boldsymbol{j_K^L}$ または単に $\boldsymbol{j_K}$ と書く．特に $K = \{p\}$（1 点からなる空間）のときは $\boldsymbol{j_p^L}$ と略記する．

部分空間の減少列 $K \subset L \subset H \subset X$ が与えられたとき，包含写像の段階で

$$j_K^L \circ j_L^H = j_K^H \colon (X,\, X \setminus H) \longrightarrow (X,\, X \setminus K)$$

が成り立つので，$S_\bullet$，H_q が関手であることから

$$(j_K^L)_q \circ (j_L^H)_q = (j_K^L \circ j_L^H)_q = (j_K^H)_q \colon H_q(X,\, X \setminus H) \longrightarrow H_q(X,\, X \setminus K)$$

が成り立つことに注意する．

また，空間対 $(X,\, A)$ に関して，特に断らない限り $H_q(X,\, A)$ の元を $[u]$ と書く．つまり $u \in \operatorname{Ker}\bigl(\overline{\partial}_q \colon S_q(X)/S_q(A) \longrightarrow S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A)\bigr)$ で，$[u] \coloneqq u + \operatorname{Im} \overline{\partial}_{q+1}$ とする．

補題 2.14:

n 次元境界付き位相多様体 M と，M の任意のコンパクト集合 $K \subset \operatorname{Int} M$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $q > n$ ならば $H_q(M,\, M \setminus K) = 0$

(2) $q = n$ のとき，$\forall [u] \in H_q(M,\, M \setminus K)$ に対して[a]

$$[u] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall p \in K,\ (j_p^K)_q([u]) = 0 \in H_q(M,\, M \setminus \{p\})$$

[a] つまり，$\forall p \in K$ に対して $\operatorname{Ker}(j_p)_n = \{0\}$，i.e. $(j_p)_n$ は単射である．

証明 (case-1):Mayer-Vietoris 完全列による貼り合わせ

M を任意の n 次元境界付き位相多様体とし，コンパクト集合 $K_1,\, K_2 \subset \operatorname{Int} M$ を与える．このとき $K_1,\, K_2,\, K_1 \cap K_2$ について (1), (2) が成り立つならば $K_1 \cup K_2$ についても (1), (2) が成り立つことを示す．

(1) M は Hausdorff 空間なので K_i $(i = 1,\, 2)$ は閉集合．故に $M \setminus K_i$ は開集合であり，$(M \setminus K_i)^\circ = M \setminus K_i \subset M$ が成り立つ．従って

$$\begin{aligned}(M \setminus K_1)^\circ \cup (M \setminus K_2)^\circ = (M \setminus K_1) \cup (M \setminus K_2) = M \setminus (K_1 \cap K_2)\\ M^\circ \cup M^\circ = M \cup M = M\end{aligned}$$

であり，空間対の Mayer-Vietoris 完全列の条件が充たされいるので $\forall q \geq 0$ に対して完全列

$$\begin{aligned}H_{q+1}\bigl(M,\, M \setminus (K_1 \cap K_2)\bigr) &\xrightarrow{\overline{\partial}_\bullet} H_q\bigl(M,\, M \setminus (K_1 \cup K_2)\bigr) \\ &\xrightarrow{\left((j_{K_1}^{K_1 \cup K_2})_q,\, -(j_{K_2}^{K_1 \cup K_2})_q\right)} H_q(M,\, M \setminus K_1) \oplus H_q(M,\, M \setminus K_2)\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

が成り立つ．$q > n$ ならば，(1) の仮定よりこの完全列は

$$0 \longrightarrow H_q\bigl(M,\, M \setminus (K_1 \cup K_2)\bigr) \longrightarrow 0$$

となるので $H_q\bigl(M,\, M\setminus(K_1\cup K_2)\bigr)=0$ が言える．i.e. $K_1\cup K_2$ について (1) が言えた．

(2) ホモロジー類 $[u]\in H_n\bigl(M,\, M\setminus(K_1\cup K_2)\bigr)$ が $\forall p\in K_1\cup K_2$ に対して $(j_p^{K_1\cup K_2})_n([u])=0$ を充しているとする．このとき $\forall p\in K_i$ $(i=1,\,2)$ に対して

$$(j_p^{K_i})_n\circ(j_{K_i}^{K_1\cup K_2})_n([u])=(j_p^{K_1\cup K_2})_n([u])=0\in H_n(M,\, M\setminus\{p\})$$

が成り立つので，K_i に関する (2) の仮定より $(j_{K_i}^{K_1\cup K_2})_n([u])=0$ が言える．故に (2.5.7) の完全列から

$$[u]\in\operatorname{Ker}\Bigl(\,(j_{K_1}^{K_1\cup K_2})_q,\, -(j_{K_2}^{K_1\cup K_2})_q\Bigr)=\operatorname{Im}\overline{\partial}_\bullet$$

が言えるが，$K_1\cap K_2$ に関する (1) の仮定より $H_{n+1}(M,\, M\setminus(K_1\cap K_2))=0$ なので $[u]=0$ が言えた．逆は明らかなので $K_1\cup K_2$ に関して (2) が示された．

(case-2):$M=\mathbb{R}^n$ で K がコンパクト凸集合の場合

$\forall p\in K$ を 1 つとる．このとき K は有界閉集合だから[*17]，十分大きな $r>0$ に対して開球 $B_r(p)$ は K を含む．連続写像

$$R\colon M\setminus\{p\}\longrightarrow\partial\overline{B}_r(p),\ x\longmapsto p+r\frac{x-p}{\|x-p\|}$$

はレトラクションで，ホモトピー

$$F\colon(M\setminus\{p\})\times[0,\,1]\longrightarrow M\setminus\{p\},\ (x,\,t)\longmapsto(1-t)x+tR(x)$$

が id_X と $i\circ R$ を繋ぐ[*18]．i.e. 部分空間 $\partial\overline{B}_r(p)\subset M\setminus\{p\}$ は $M\setminus\{p\}$ の変位レトラクトである．一方，K の凸性から $\forall(x,\,t)\in(M\setminus K)\times[0,\,1]$ に対して $F(x,\,t)\in M\setminus K$ が言える．よってホモトピー F の制限 $F|_{(X\setminus K)\times[0,\,1]}$ が id_X と $i\circ R|_{X\setminus K}$ を繋ぐ．i.e. 部分空間 $\partial\overline{B}_r(p)\subset M\setminus K$ は $M\setminus K$ の変位レトラクトである．以上より，包含写像 $M\setminus K\hookrightarrow M\setminus\{p\}$ はホモトピー同値写像である．横 2 列が短完全列であるような図式[*19]

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_\bullet(M\setminus K) & \longrightarrow & S_\bullet(M) & \longrightarrow & S_\bullet(M,\, M\setminus K) & \longrightarrow & 0 \quad (\text{exact})\\
 & & \big\downarrow{\simeq} & & \big\downarrow{=} & & \big\downarrow{(j_p^K)_\bullet} & & \\
0 & \longrightarrow & S_\bullet(M\setminus\{0\}) & \longrightarrow & S_\bullet(M) & \longrightarrow & S_\bullet(M,\, M\setminus\{p\}) & \longrightarrow & 0 \quad (\text{exact})
\end{array}$$

をホモロジー長完全列を使って横に繋ぐと $\forall q\geq 0$ に対して[*20]

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_q(M\setminus K) & \longrightarrow & H_q(M) & \longrightarrow & H_q(M,\, M\setminus K) & \longrightarrow & H_{q-1}(M\setminus K) & \longrightarrow & H_{q-1}(M) \quad (\text{exact})\\
\big\downarrow{\cong} & & \big\downarrow{=} & & \big\downarrow{(j_p^K)_q} & & \big\downarrow{\cong} & & \big\downarrow{=}\\
H_q(M\setminus\{p\}) & \longrightarrow & H_q(M) & \longrightarrow & H_q(M,\, M\setminus\{p\}) & \longrightarrow & H_{q-1}(M\setminus\{p\}) & \longrightarrow & H_{q-1}(M) \quad (\text{exact})
\end{array}$$

なる可換図式が得られる．これに 5 項補題を用いると，赤色をつけた部分から $\forall q\geq 0$ に関する同型

$$(j_p^K)_n\colon H_q(M,\, M\setminus K)\xrightarrow{\cong}H_q(M,\, M\setminus\{p\})\tag{2.5.8}$$

[*17] $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合は有界閉集合．

[*18] $i\colon\partial\overline{B}_r(p)\hookrightarrow M\setminus\{p\}$ は包含写像．

[*19] $S_\bullet(M\setminus K)\longrightarrow S_\bullet(M)$ は包含準同型で，$S_\bullet(M)\longrightarrow S_\bullet(M,\, M\setminus K)=\frac{S_\bullet(M)}{S_\bullet(M\setminus K)}$ は標準的射影である．

[*20] $q=0$ のときは $0\xrightarrow{=}0$ を右側に 2 つ並べれば良い．

が得られるが，点 p は任意だったので (2) が示された．特に $q > n$ のとき

$$H_q(M,\, M\setminus K) \cong H_q(M,\, M\setminus K) \cong H_q(D^n,\, D^n\setminus\{0\}) \cong 0$$

なので (1) も示された．

(case-3):$M = \mathbb{R}^n$ の場合

K が有限個のコンパクト凸集合の和集合として書ける場合

まず，N 個のコンパクト凸集合 $K_1, \ldots, K_N$ を使って $K = \bigcup_{i=1}^N K_i$ と書ける場合に (1), (2) が成り立つことを N に関する数学的帰納法により示す．$N = 1$ の場合は **(case-2)** で示した．K が $N-1$ 個のコンパクト集合の和集合として書ける場合に (1), (2) が成立しているとする．このとき $K_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^N K_i\right) = \bigcup_{i=2}^N (K_1 \cap K_i)$ であって，$2 \le \forall i \le N$ について $K_1 \cap K_i$ はコンパクトだから，帰納法の仮定より $K_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^N K_i\right)$ について補題が成り立つ．故に **(case-1)** から $K_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^N K_i\right) = \bigcup_{i=1}^N K_i$ についても補題が成立する．帰納法が完了し，$K = \bigcup_{i=1}^N K_i$ の場合に (1), (2) が成り立つことが言えた．

K が任意のコンパクト集合の場合

次に，K が任意のコンパクト集合である場合を示す．$\forall [u] \in H_q(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n\setminus K)$ を 1 つ固定し，$u = \gamma + S_q(\mathbb{R}^n\setminus K)$ を充たす特異 q-チェイン $\gamma \in S_q(\mathbb{R}^n)$ を 1 つとる．$u \in \operatorname{Ker}\overline{\partial}_\bullet$ なので

$$\overline{\partial}_q\bigl(\gamma + S_{q-1}(\mathbb{R}^n\setminus K)\bigr) = \partial_q\gamma + S_{q-1}(\mathbb{R}^n\setminus K) = 0_{S_{q-1}(\mathbb{R}^n)/S_{q-1}(\mathbb{R}^n\setminus K)} = S_{q-1}(\mathbb{R}^n\setminus K),$$

i.e. $\partial_q\gamma \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n\setminus K)$ が言える．一方，特異 q-チェインの定義より m 個の連続写像 $\sigma_i\colon \Delta^{q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を用いて $\partial_q\gamma = \sum_{i=1}^m a_i\sigma_i$ と書ける．

ここで $A \coloneqq \bigcup_{i=1}^m \sigma_i(\Delta^{q-1})$ とおくと，Δ^{q-1} はコンパクトなので[*21] $A \subset \mathbb{R}^n$ もコンパクト．かつ $\partial_q\gamma \in S_q(\mathbb{R}^n\setminus K)$ より $A \subset \mathbb{R}^n\setminus K$, i.e. $K \cap A = \emptyset$ が言える．故に D.4-(1) から，$\forall p \in K$ に対してある正数 $r_p > 0$ および $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U_p \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $A \subset U_p$ かつ $B_{r_p}(p) \cap U_p = \emptyset$ を充たす．このとき $B_{r_p}(p) \subset \mathbb{R}^n\setminus U_p \subset \mathbb{R}^n\setminus A$ が成り立つが，$\mathbb{R}^n\setminus U_p$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合なので $\overline{B}_{r_p}(p) \subset \mathbb{R}^n\setminus U_p \subset \mathbb{R}^n\setminus A$ が言える．従って

$$K \subset \bigcup_{p\in K} \overline{B}_{r_p}(p) \subset \mathbb{R}^n\setminus A$$

が成り立つが，K はコンパクトなので

$$\exists p_1, \ldots, p_N \in K,\ K \subset \bigcup_{i=1}^N \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i) \subset \mathbb{R}^n\setminus A$$

が成り立つ．$L \coloneqq \bigcup_{i=1}^N \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)$ とおくと $A \subset \mathbb{R}^n\setminus L$ だから $\partial_q\gamma \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n\setminus L)$ である．i.e. $u' \coloneqq \gamma + S_q(\mathbb{R}^n\setminus L)$ とおくとこれはチェイン複体 $S_\bullet(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n\setminus L)$ のサイクルである．従って

$$[u] = (j_K^L)_q([u']) \tag{2.5.9}$$

が成り立つ．

[*21] $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合はコンパクト集合．

ところで，$\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)$ $(1 \leq \forall i \leq N)$ は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合だから **(case-3)** の前半より $L = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)$ に対して (1), (2) が成り立つ．従って $q > n$ ならば $[u'] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus L) = 0$ であり，(2.5.9) から $[u] = 0$ が示された．

次に $q = n$ として (2) を示す．$\forall p \in K$ に対して $(j_p^K)_n([u]) = 0$ であるとする．このとき

$$(j_p^L)_n([u']) = (j_p^K)_n \circ (j_K^L)_n([u']) = (j_p^K)_n([u]) = 0$$

が成り立つ．特に $p_i \in K$ だから，$1 \leq \forall i \leq N$ に対して

$$(j_{p_i}^L)_n([u']) = (j_{p_i}^{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)})_n \circ (j_{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)}^L)([u']) = 0$$

が言える．さらに (2.5.8) より $(j_{p_i}^{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)})_n \colon H_n\bigl(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)\bigr) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{p_i\})$ は同型だから，$(j_{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)}^L)([u']) = 0$ が分かり，$\forall p \in L$ に対して

$$(j_p)_n([u']) = (j_p^{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)})_n \circ (j_{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)}^L)([u']) = 0 \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ p \in \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)$$

が言える．**(case-3)** の前半より L に対して (2) が成り立つから $[u'] = 0$ が言えて，式 (2.5.9) から $[u] = 0$ が示された．

(case-4):M が任意の位相多様体の場合

仮定より $K \subset \operatorname{Int} M$ であるから，$\overline{\partial M} = \partial M \subset M \setminus K = (M \setminus K)^\circ$ が成り立つ[*22]．従って切除定理から

$$H_q(M,\, M \setminus K) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q\bigl(M \setminus \partial M,\, (M \setminus K) \setminus \partial M\bigr) = H_q(\operatorname{Int} M,\, \operatorname{Int} M \setminus K)$$

が成り立つ．故に $\partial M = \emptyset$ としても一般性を損なわない．このとき任意のチャートは内部チャートになる．

K がある 1 つのチャートに含まれる場合

まず，あるチャート (U, φ) が存在して $K \subset U$ となる場合に示す．このとき $\overline{M \setminus U} = M \setminus U \subset M \setminus K = (M \setminus K)^\circ$ なので切除定理が使えて，

$$H_q(M,\, M \setminus K) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q(U,\, U \setminus K) \underset{\varphi_q}{\cong} H_q\bigl(\varphi(U),\, \varphi(U) \setminus \varphi(K)\bigr) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q\bigl(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \varphi(K)\bigr)$$

が成り立つ．故に **(case-3)** より $q > n$ のとき $H_q(M,\, M \setminus K) = 0$ が成り立つ．$q = n$ のとき，$[u] \in H_q(M,\, M \setminus K)$ が $\forall p \in K$ について $(j_p^K)_n([u]) = 0$ を充たすとする．このとき $S_\bullet$, H_q の関手性から，$\forall x \in \varphi(K)$ について

$$\begin{aligned}
(j_x^{\varphi(K)})_n\bigl(\varphi_n([u])\bigr) &= (j_x^{\varphi(K)} \circ \varphi)_n([u]) \\
&= (\varphi \circ j_{\varphi^{-1}(x)}^K)_n([u]) \\
&= (\varphi)_n \circ (j_{\varphi^{-1}(x)}^K)_n([u]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つので，コンパクト集合 $\varphi(K) \subset \mathbb{R}^n$ に関する **(case-3)** から $\varphi_n([u]) = 0$ がわかる．φ_n は同型なので $[u] = 0$ が従う．

[*22] ∂M は閉集合で，M が Hausdorff 空間なのでコンパクト集合 K は閉集合．

K が 1 つのチャートに含まれるコンパクト集合の有限個の和集合で書ける場合

次に，各々があるチャートに含まれるような N 個のコンパクト集合 $K_1, \dots, K_N$ を用いて $K = \bigcup_{i=1}^N K_i$ と書ける場合を N に関する数学的帰納法により示す．$N = 1$ の場合は 1 段落前で示した．$N-1$ まで示されているとする．このとき $K_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^N K_i\right) = \bigcup_{i=1}^N (K_1 \cap K_i)$ だが $K_1 \cap K_i$ はチャート (U_i, φ_i) に含まれるから帰納法の仮定により $K_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^N K_i\right) = \bigcup_{i=2}^N (K_1 \cap K_i)$ に対して (1), (2) が成り立つ．故に **(case-1)** より $\bigcup_{i=1}^N K_i$ についても (1), (2) が成り立ち，帰納法が完了する．

K が任意のコンパクト集合の場合

最後に，K が任意のコンパクト集合の場合に示す．K はコンパクトだから M の有限個のチャート $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_N, \varphi_N)$ が存在して $K \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ を充たす．K はコンパクト Hausdorff 空間だから K の有限開被覆 $\{U_1, \dots, U_N\}$ に対して補題 D.4-(3) を使うことができて，K の開被覆 $\{V_1, \dots, V_N\}$ であって $\overline{V_i} \subset U_i$ $(1 \le \forall i \le N)$ を充たすものが存在する．補題 D.3-(2) より $K_i \coloneqq \overline{V_i} \cap K \subset U_i$ $(1 \le \forall i \le N)$ は K のコンパクト集合で，$K = \bigcup_{i=1}^N K_i$ を充たす．従って前段落の議論から (1), (2) が成り立つ．

■

定理 2.10: カラー近傍の存在

M を，$\partial M \neq \emptyset$ なる n 次元コンパクト境界付き位相多様体とする．
このとき ∂M の開近傍 $\partial M \subset O \subset M$ と同相写像

$$F \colon \partial M \times [0,\, 1) \xrightarrow{\cong} O$$

が存在して，

$$F|_{\partial M \times \{0\}} = \mathrm{id}_{\partial M}$$

を充たす．

証明 [10, 定理 4.5.8] を参照． ■

系 2.11:

n 次元コンパクト位相多様体 M は $\operatorname{Int} M$ と同じホモトピー型である．

証明 定理 2.10 によりカラー近傍 $F \colon \partial M \times [0,\, 1) \xrightarrow{\cong} U$ をとる．このとき $X \setminus F\big(\partial M \times [0,\, \frac{1}{2})\big)$ は $M, \operatorname{Int} M$ の変位レトラクトである． ■

命題 2.11:

M を向き付けられた n 次元境界付き位相多様体とする．
このとき $\mathrm{Int}\, M$ の任意のコンパクト集合 $K \subset \mathrm{Int}\, M$ に対して以下を充たすホモロジー類 $\mu_K \in H_n(M,\, M \setminus K)$ が一意的に存在する：

$$\forall p \in K,\ (j_p^K)_n(\mu_K) = \mu_p \in H_n(M,\, M \setminus \{p\}) \tag{2.5.10}$$

<u>**証明**</u> 切除同型 $H_q(M,\, M \setminus K) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q(\mathrm{Int}\, M,\, \mathrm{Int}\, M \setminus K)$ により $M = \mathrm{Int}\, M$ を仮定しても一般性を失わない．補題 2.14-(2) より $(j_p^K)_n \colon H_n(M,\, M \setminus K) \longrightarrow H_n(M,\, M \setminus \{p\})$ は単射だから，(2.5.10) を充たす $\mu_K \in H_n(M,\, M \setminus K)$ はもし存在すれば一意である．

(case-1) 2 つのコンパクト集合 $K_1,\, K_2 \subset M$ において $\mu_{K_1},\, \mu_{K_2}$ が存在するならば $K_1 \cup K_2$ においても $\mu_{K_1 \cup K_2}$ が存在することを示す．Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{aligned}
&H_q\big(M,\, M \setminus (K_1 \cup K_2)\big) \\
\xrightarrow{\left((j_{K_1}^{K_1 \cup K_2})_q,\, -(j_{K_2}^{K_1 \cup K_2})_q\right)} &H_q(M,\, M \setminus K_1) \oplus H_q(M,\, M \setminus K_2) \\
\xrightarrow{(j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_q + (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_q} &H_q\big(M,\, M \setminus (K_1 \cap K_2)\big)
\end{aligned}$$

を使う．$(\mu_{K_1},\, -\mu_{K_2}) \in H_q(M,\, M \setminus K_1) \oplus H_q(M,\, M \setminus K_2)$ について

$$\begin{aligned}
(j_p^{K_1 \cap K_2})_n \circ \big((j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_n + (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_n\big)(\mu_{K_1},\, -\mu_{K_2}) &= (j_p^{K_1 \cap K_2})_n\big((j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_n(\mu_{K_1}) - (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_n(\mu_{K_2})\big) \\
&= (j_p^{K_1})(\mu_{K_1}) - (j_p^{K_2})(\mu_{K_2}) \\
&= \mu_p - \mu_p = 0
\end{aligned}$$

でかつ $(j_p^{K_1 \cap K_2})_n$ は単射なので，$(j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_n(\mu_{K_1}) - (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_n(\mu_{K_2}) = 0$, i.e. $(\mu_{K_1},\, -\mu_{K_2}) \in \mathrm{Ker}\big((j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_n + (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_n\big) = \mathrm{Im}\big((j_{K_1}^{K_1 \cup K_2})_q,\, -(j_{K_2}^{K_1 \cup K_2})_q\big)$ が言える．よってある $\mu_{K_1 \cup K_2} \in H_q\big(M,\, M \setminus (K_1 \cup K_2)\big)$ が存在して

$$(j_{K_1}^{K_1 \cup K_2})_n(\mu_{K_1 \cup K_2}) = \mu_{K_1} \quad \text{かつ} \quad -(j_{K_2}^{K_1 \cup K_2})_n(\mu_{K_1 \cup K_2}) = -\mu_{K_2}$$

を充たす．

(case-2) $M = \mathbb{R}^n$ とする．コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ は有界閉集合だから，十分大きい $R > 0$ に対して $K \subset \overline{B}_R(0)$ を充たす．
ここで $\mu_K \coloneqq (j_K^{\overline{B}_R(0)})_q(\mu_{\overline{B}_R(0)})$ とおくと $\forall p \in K \subset \overline{B}_R(0)$ に対して

$$(j_p^K)_q(\mu_K) = (j_p^K)_q \circ (j_K^{\overline{B}_R(0)})_q(\mu_{\overline{B}_R(0)}) = (j_p^{\overline{B}_R(0)})(\mu_{\overline{B}_R(0)}) = \mu_p$$

が成り立つ．

(case-3) M が任意の位相多様体であり，ある正のチャート $(U,\, \varphi)$ であって $K \subset U$ を充たすものが存在する場合を考える．
切除同型 $H_n\big(\varphi(U),\, \varphi(U) \setminus \varphi(K)\big) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n\big(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \varphi(K)\big)$ によって **(case-2)** の $\mu_{\varphi(K)}$ を $H_n\big(\varphi(U),\, \varphi(U) \setminus \varphi(K)\big)$ へ写像した上で $\mu_K \coloneqq (\varphi^{-1})_q(\mu_{\varphi(K)}) \in H_n(U,\, U \setminus K)$ とおくと，$H_n(U,\, U \setminus K) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(M,\, M \setminus K)$ により μ_K が所望のホモロジー類である．

(case-4) $K=\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ で $1 \leq \forall i \leq N$ に対してる正のチャート $(U_i,\, \varphi_i)$ が存在して $K_i \subset U_i$ を充たす場合を考える．このとき各 i について **(case-3)** より μ_{K_i} が存在するから，**(case-1)** によって N についての数学的帰納法を進めることができて証明が完了する．

(case-5) M が任意の位相多様体であり，コンパクト集合 $K \subset M$ も任意の場合を考える．K はコンパクトなので，**(case-4)** の条件を充たす有限個のコンパクト集合 $K_1,\, \dots,\, K_N$ が存在して $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ となる．このとき

$$\mu_K \coloneqq (j_K^{\bigcup_{i=1}^{N} K_i})_n(\mu_{\bigcup_{i=1}^{N} K_i})$$

とおけば良い．

■

定理 2.12: 基本類の存在

向き付けられた，コンパクトで連結な n 次元境界付き位相多様体 M を与える．
このとき M は

$$H_n(M,\, \partial M) \cong \mathbb{Z}$$

を充し，生成元 $[\boldsymbol{M}] \in H_n(M,\, \partial M)$ であって以下を充たすものが存在する：

$$\forall p \in \mathrm{Int}\, M, \quad (j_p^{\mathrm{Int}\, M})_n([M]) = \mu_p \in H_n(M,\, M \setminus \{p\})$$

特に，$\forall p \in \mathrm{Int}\, M$ について，包含準同型

$$(j_p^{\mathrm{Int}\, M})_n \colon H_n(M,\, \partial M) \longrightarrow H_n(M,\, M \setminus \{p\})$$

は同型である．

証明 カラー近傍 $F\colon \partial M \times [0,\, 1) \xrightarrow{\cong} U$ をとる．系 2.11 より M は $\mathrm{Int}\, M$ と同じホモトピー型であり，連結である．

$\delta \in (0,\, 1)$ に対して $K_\delta \coloneqq X \setminus F\bigl(\partial M \times [0,\, \delta)\bigr)$ とおく．K_δ はコンパクト空間 M の閉部分集合なので，補題 D.3 よりコンパクト集合である．よって K_δ に命題 2.11 を適用してホモロジー類 $\mu_{K_\delta} \in H_n(\mathrm{Int}\, M,\, \mathrm{Int}\, M \setminus K_\delta)$ をとる．ところで $M \setminus K_\delta = F\bigl(\partial M \times [0,\, \delta)\bigr) \simeq \partial M$ だから，包含準同型による図式

$$H_n(\mathrm{Int}\, M,\, \mathrm{Int}\, M \setminus K_\delta) \xrightarrow[\text{exc}]{\cong} H_n(M,\, M \setminus K_\delta) \xrightarrow{\cong} H_n(M,\, \partial M)$$

がある．この図式による $\mu_{K_\delta} \in H_n(\mathrm{Int}\, M,\, \mathrm{Int}\, M \setminus K_\delta)$ の行き先を $[M] \in H_n(M,\, \partial M)$ と定義する．

$[X]$ が $\delta \in (0,\, 1)$ の取り方によらないことを示す．$0 < \delta < \delta' < 1$ とする．μ_{K_δ} の定義から $\forall p \in K_{\delta'} \subset K_\delta$ について

$$\mu_p = (j_p^{K_\delta})_n(\mu_{K_\delta}) = (j_p^{K_{\delta'}})_n \circ (j_{K_{\delta'}}^{K_\delta})(\mu_{K_\delta})$$

が成り立つが，$\mu_{K'_\delta}$ の一意性から $(j_{K_{\delta'}}^{K_\delta})_n(\mu_{K_\delta}) = \mu_{K_{\delta'}}$ でなくてはならない．この考察から $\forall p \in \mathrm{Int}\, M$ に対して $(j_p^{\mathrm{Int}\, M})_n([M]) = \mu_p \in H_n(M,\, M \setminus \{p\})$ も言える．

最後に $\forall p \in \operatorname{Int} M$ について，包含準同型

$$(j_p^{\operatorname{Int} M})_n \colon H_n(M,\, \partial M) \longrightarrow H_n(M,\, M \setminus \{p\})$$

が同型写像になることを示す． ■

定理 2.13:

連結な n 次元境界付き位相多様体 M を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $H_n(M) = 0$ または $\mathbb{Z}$ である．特に

$$H_n(M) = \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ はコンパクトかつ向き付け可能かつ } \partial M = \emptyset$$

である．

(2) $H_n(M,\, \partial M) = 0$ または $\mathbb{Z}$ である．特に

$$H_n(M,\, \partial M) = \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ はコンパクトかつ向き付け可能}$$

である．

2.6 チェイン複体上のテンソルと Hom 関手

この節は**普遍係数定理**への布石である．R 加群のチェイン複体 $\{C_q,\, \partial_q\}_q$ を与える．ここで，q チェインが自由加群であることは仮定しないものとする．

特異ホモロジーは二つの共変関手の合成であったことに注意する：

$$\begin{aligned} S_\bullet &\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain} \\ H_\bullet &\colon \mathbf{Chain} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod} \end{aligned}$$

ここで，新しい代数的対応

$$\mathbf{Chain} \longrightarrow \mathbf{Chain}$$

を $S_\bullet$ と $H_\bullet$ の間に挟んでみよう．

2.6.1 チェイン複体と R 加群のテンソル積

R 加群 M をとり，対応

$$\{C_q,\, \partial_q\}_q \longrightarrow \{C_q \otimes M,\, \partial_q \otimes \mathrm{id}_M\}_q$$

を考える．ただし

$$(\partial_\bullet \otimes \mathrm{id}_M)\left(\sum_i c_i \otimes m_i\right) := \sum_i \partial_\bullet(c_i) \otimes m_i$$

である．$(\partial \otimes \mathrm{id})^2 = 0$ なので $\{C_q \otimes M,\, \partial_q \otimes \mathrm{id}_M\}_q$ はチェイン複体である．この操作はホモロジー群の係数を取り替える操作に対応する．

補題 2.15:

この対応は共変関手である．

定義 2.20: M 係数ホモロジー

チェイン複体 $C_\bullet \otimes M$ のホモロジー群は**係数 M のホモロジー群**を作る：

$$H_q(C_\bullet;\, M) := \frac{\mathrm{Ker}\,\partial_q\big(C_q \otimes M \to C_{q-1} \otimes M\big)}{\mathrm{Im}\,\partial_{q+1}\big(C_{q+1} \otimes M \to C_q \otimes M\big)}$$

2.6.2 $\mathrm{Hom}_R\,(C_\bullet,\, M)$

$$\{C_q,\, \partial_q\}_q \longrightarrow \{\mathrm{Hom}_R\,(C_q\, M),\, \delta_q\}_q$$

なる対応は関手である．ただし準同型 δ は ∂ の双対である．あからさまには次の通り：

$$\delta\colon \mathrm{Hom}_R\; C_\bullet,\, M \to \mathrm{Hom}_R\,(C_\bullet,\, M),$$
$$(\delta f)(c) := f(\partial c) \quad \forall f \in \mathrm{Hom}_R\,(C_\bullet,\, M),\ \forall c \in C_\bullet$$

このとき，

$$(\delta^2 f)(c) = f(\partial^2 c) = f(0) = 0$$

なので，δ もまた複体である．しかし，次の 2 点に注意：

(1) δ は添字を増加させる方向に作用する．i.e.

$$\delta\colon \mathrm{Hom}_R\,(C_q,\, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(C_{q+1},\, M)$$

(2) この対応は**反変関手**である．$\forall M \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に対して $\mathrm{Hom}(\text{-},\, M)\colon \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ なる関手が反変関手だからである．

詳細は次章に譲るが，コホモロジーの定義はここから生じる．

定義 2.21: コホモロジー

$$H^q(C_\bullet;\, M) := \frac{\mathrm{Ker}\big(\delta\colon \mathrm{Hom}_R\,(C_q,\, M) \to \mathrm{Hom}_R\,(C_{q+1},\, M)\big)}{\mathrm{Im}\big(\delta\colon \mathrm{Hom}_R\,(C_{q-1},\, M) \to \mathrm{Hom}_R\,(C_q,\, M)\big)}$$

は係数 M を持つ $(C_\bullet,\, \partial)$ **のコホモロジー**と呼ばれる．

2.7 Eilenberg-Steenrod 公理系

公理 2.1: ホモロジーの Eilenberg-Steenrod 公理系

ホモロジー理論は

$$H_\bullet\colon \{\text{pairs, ct. maps}\} \longrightarrow \{\text{graded } R \text{ modules, homomorphisms}\}$$

なる共変関手であって，以下の公理を充たすものである：

(ES-h1) 任意の空間対 $(X,\,A)$ および非負整数 $q \geq 0$ に対して**自然な**準同型

$$\partial\colon H_q(X,\,A) \longrightarrow H_{q-1}(A)$$

が存在して，包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X,\; j\colon X \hookrightarrow (X,\,A)$ を用いて次のホモロジー長完全列が誘導される：

$$\cdots \to H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,\,A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \to \cdots$$

(ES-h2) 2 つの連続写像 $f,\,g\colon (X,\,A) \to (Y,\,B)$ がホモトピックならば，誘導準同型 $f_*,\,g_*\colon H_q(X,\,A) \to H_q(Y,\,B)$ は

$$f_* = g_*$$

となる．

(ES-h3) $U \subset X$ かつ $\overline{U} \subset \mathrm{Int}(A)$ ならば，包含写像 $i\colon (X \setminus U,\, A \setminus U) \longrightarrow (X,\,A)$ が誘導する準同型

$$i_*\colon H_q(X \setminus U,\, A \setminus U) \longrightarrow H_q(X,\,A)$$

は $\forall q \geq 0$ に対して同型となる．

(ES-h4) $q \neq 0$ ならば $H_q(*) = 0$.

第 3 章

コホモロジーの定義

まず，純粋に代数的な準備をする．

補題 3.1: 分裂補題

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0 \tag{3.0.1}$$

が与えられたとする．このとき，以下の二つは同値である：

(1) 左 R 加群の準同型 $i_2\colon M_2 \longrightarrow M$ であって $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$ を充たすものが存在する
(2) 左 R 加群の準同型 $p_1\colon M \longrightarrow M_1$ であって $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$ を充たすものが存在する

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)**　写像

$$p'_1\colon M \longrightarrow M,\ x \longmapsto x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr)$$

を定義すると，

$$p_2\bigl(p'_1(x)\bigr) = p_2(x) - ((p_2 \circ i_2) \circ p_2)(x) = p_2(x) - p_2(x) = 0$$

が成り立つ．従って，(3.0.1) が完全列であることを使うと $p'_1(x) \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ である．さらに i_1 が単射であることから

$$\exists! y \in M_1,\ p'_1(x) = i_1(y)$$

が成り立つ．ここで写像

$$p_1\colon M \longrightarrow M_1,\ x \longmapsto y$$

を定義するとこれは準同型写像であり，$\forall x \in M_1$ に対して

$$p'_1\bigl(i_1(x)\bigr) = i_1(x) - (i_2 \circ (p_2 \circ i_1))(x) = i_1(x)$$

が成り立つ[*1]ことから

$$(p_1 \circ i_1)(x) = x$$

[*1] (3.0.1) が完全列であるため，$p_2 \circ i_1 = 0$

とわかる．i.e. $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$

(1) $\Longleftarrow$ **(2)** (3.0.1) は完全列であるから $M_2 = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Im} p_2$ である．従って $\forall x \in M_2 = \operatorname{Im} p_2$ に対して，$x = p_2(y)$ を充たす $y \in M$ が存在する．ここで写像

$$i_2 \colon M_2 \longrightarrow M,\ x \longmapsto y - i_1\big(p_1(y)\big)$$

は well-defined である．$x = p_2(y')$ を充たす勝手な元 $y' \in M$ をとってきたとき，$p_2(y - y') = 0$ より $y - y' \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ だから，i_1 の単射性から

$$\exists ! z \in M_1, \quad y - y' = i_1(z)$$

が成り立ち，このとき

$$\Big(y - i_1\big(p_1(y)\big)\Big) - \Big(y' - i_1\big(p_1(y')\big)\Big) = i_1(z) - (i_1 \circ (p_1 \circ i_1))(z) = i_1(z) - i_1(z) = 0$$

とわかるからである．i_2 は準同型写像であり，$\forall x \in M_2$ に対して

$$(p_2 \circ i_2)(x) = p_2(y) - ((p_2 \circ i_1) \circ p_1)(y) = p_2(y) = x$$

なので $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$.

■

系 3.1:

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が補題 3.1 の条件を充たすならば

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

証明 補題 3.1 の条件 (1) が満たされているとする．このとき補題 3.1 証明から $\forall x \in M$ に対して

$$i_1\big(p_1(x)\big) = p_1'(x) = x - i_2\big(p_2(x)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad i_1\big(p_1(x)\big) + i_2\big(p_2(x)\big) = x$$

また，完全列の定義から $p_2\big(i_1(x)\big) = 0$ であるから $\forall x \in M_2$ に対して

$$p_1'\big(i_2(x)\big) = i_2(x) - ((i_2 \circ p_2) \circ i_2)(x) = 0 = i_1(0)$$

であり，結局 $p_1\big(i_2(x)\big) = 0$ とわかる．

ここで準同型写像

$$\begin{aligned} f &\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M,\ (x,\, y) \longmapsto i_1(x) + i_2(y), \\ g &\colon M \longrightarrow M_1 \oplus M_2,\ x \longmapsto \big(p_1(x),\, p_2(x)\big) \end{aligned}$$

を定めると

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,\, y) &= \big(p_1(i_1(x)) + p_1(i_2(y)),\, p_2(i_1(x)) + p_2(i_2(x))\big) = (x,\, y), \\ (f \circ g)(x) &= i_1(p_1(x)) + i_2(p_2(x)) = x \end{aligned}$$

なので $f,\, g$ は同型写像.

■

定義 3.1: 分裂

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が**分裂** (split) するとは，補題 3.1 の条件を充たすことをいう．

左 R 加群 N および左 R 加群の準同型 $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ に対して

$$f_*\colon \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2),\ \varphi \longmapsto f\circ\varphi$$
$$f^*\colon \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_1,\, N),\ \varphi \longmapsto \varphi\circ f$$

とおく．$f_*,\, f^*$ は $\mathbb{Z}$ 加群の準同型である．

命題 3.1:

(1) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群[a]の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3)$$

が成り立つ．

(2) $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N)$$

が成り立つ．

(3) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**分裂する**左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1,\, N) \longrightarrow 0$$

が成り立つ．

[a] i.e. 和について可換群

<u>**証明**</u> (1) まず，$\varphi \in \mathrm{Ker}\, f_* \iff f\circ\varphi = 0$ かつ f は単射なので $\mathrm{Ker}\, f_* \subset \mathrm{Im}\, 0$ である[*2]．$\mathrm{Ker}\, f_* \supset \mathrm{Im}\, 0$ は明らかであり，$\mathrm{Ker}\, f_* = \mathrm{Im}\, 0$ が言えた．

次に，$g\circ f = 0$ なので

$$\psi \in \mathrm{Im}\, f_* \iff \exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1),\ \psi = f\circ\alpha \implies g_*(\psi) = g\circ f\circ\alpha = 0$$

が成り立ち，$\mathrm{Ker}\, g_* \supset \mathrm{Im}\, f_*$ がわかる．また，

$$\psi \in \mathrm{Ker}\, g_* \iff g\circ\psi = 0 \implies \mathrm{Im}\,\psi \subset \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$$

[*2] $f\colon M_1 \to M_2$ は単射だから $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$．故に $\forall x \in N$ に対して $f\big(\varphi(x)\big) = 0 \iff \varphi(x) \in \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$．i.e. $\varphi = 0$

が成り立つ．f は単射だから[*3]

$$\exists \beta \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2), \quad \psi = f\circ\beta = f_*(\beta) \in \mathrm{Im}\, f_*$$

が成り立つ．i.e. $\mathrm{Ker}\, g_* \subset \mathrm{Im}\, f_*$ である．

(2)　まず，$\varphi \in \mathrm{Ker}\, g^* \iff \varphi\circ g = 0$ かつ g が全射なので $\mathrm{Ker}\, g_* \subset \mathrm{Im}\, 0$ である[*4]．$\mathrm{Ker}\, g^* \supset \mathrm{Im}\, 0$ は自明なので $\mathrm{Ker}\, g^* = \mathrm{Im}\, 0$ が言えた．

次に，$g\circ f = 0$ より

$$\psi \in \mathrm{Im}\, g^* \iff \exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N),\ \psi = \alpha\circ g \implies f^*(\psi) = \alpha\circ g\circ f = 0$$

が成り立ち，$\mathrm{Ker}\, f^* \supset \mathrm{Im}\, g^*$ がわかる．また，

$$\psi \in \mathrm{Ker}\, f^* \iff \psi\circ f = 0 \implies \psi(\mathrm{Im}\, f) = 0$$

より $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, \psi$ であるから，商加群の普遍性より次の可換図式が成り立つ[*5]：

$$\begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & N \\ M_2/\,\mathrm{Im}\, f \cong M_3 \arrow[ur, "\exists! h"'] & \end{tikzcd}$$

i.e. $\psi = h\circ g = g^*(h) \in \mathrm{Im}\, g^*$ であり，$\mathrm{Ker}\, f^* \subset \mathrm{Im}\, g^*$ がわかった．

(3)　与えられた完全列が分裂するので，

$$\begin{aligned} &\exists i_2 \in \mathrm{Hom}_R(M_3,\, M_2),\ g\circ i_2 = 1_{M_3} \\ &\exists p_1 \in \mathrm{Hom}_R(M_2,\, M_1),\ p_1\circ f = 1_{M_1} \end{aligned}$$

である．故に

$$\begin{aligned} g_*\circ i_{2*} &= (g\circ i_2)_* = 1_{M_3 *} = 1_{\mathrm{Hom}_R(N,\, M_3)} \\ f^*\circ {p_1}^* &= (p_1\circ f)^* = {1_{M_1}}^* = 1_{\mathrm{Hom}_R(M_1,\, N)} \end{aligned}$$

なので，$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3)$, $\forall \psi \in \mathrm{Hom}_R(M_1,\, N)$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi &= g_*\bigl(i_{2*}(\varphi)\bigr) \in \mathrm{Im}\, g_* \\ \psi &= f^*\bigl({p_2}^*(\psi)\bigr) \in \mathrm{Im}\, f^* \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $\mathrm{Im}\, g_* = \mathrm{Ker}\, 0$, $\mathrm{Im}\, f^* = \mathrm{Ker}\, 0$ である．

残りは (1), (2) から従う．

■

[*3] したがって $\forall x \in N$ に対して $\exists! y \in \mathrm{Im}\, f \subset M_2$, $\psi(x) = f(y)$ であり，写像 $\beta\colon N \to M_2$, $x \mapsto y$ は well-defined.

[*4] $g\colon M_2 \to M_3$ が全射なので $\forall x \in M_3$, $\exists y \in M_2$, $x = g(y)$．故に $\varphi(x) = (\varphi\circ g)(y) = 0$．i.e. $\varphi = 0$.

[*5] $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ が完全列なので $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ かつ $M_3 = \mathrm{Im}\, g$．よって準同型定理から $M_2/\,\mathrm{Im}\, f = M_2/\,\mathrm{Ker}\, g \cong M_3$.

一般のコチェイン複体を定義する．

定義 3.2: コチェイン複体

R を可換環とする．加群と準同型の族 $C^\bullet = \left\{C^q,\, \delta^q \colon C^q \to C^{q+1}\right\}_{q\geq 0}$ が $\boldsymbol{R}$ **コチェイン複体**であるとは，$\forall q \geq 0$ について C^q が R-加群，δ^q が R 準同型であって

$$\delta^{q+1}\delta^q = 0$$

が成り立つことを言う．

- δ^q を**余境界写像** (coboundary map) と呼ぶ．
- C^q の部分加群

$$Z^q(C^\bullet) \coloneqq \mathrm{Ker}\bigl(\delta^q \colon C^q \to C^{q+1}\bigr)$$

を**第 $\boldsymbol{q}$ コサイクル群**，その元を **$\boldsymbol{q}$-コサイクル** (q-cocycle)，
- C^q の部分加群

$$B^q(C^\bullet) \coloneqq \mathrm{Im}\bigl(\delta^{q-1} \colon C^{q-1} \to C^q\bigr)$$

を**第 $\boldsymbol{q}$ コバウンダリー群**，その元を **$\boldsymbol{q}$-コバウンダリー** (q-coboundary) と呼ぶ．

3.1 コチェイン写像

$C^\bullet = \left\{C^q,\, \delta^q\right\}_{q\geq 0}$，$D^\bullet = \left\{D^q,\, \delta'^q\right\}_{q\geq 0}$ をチェイン複体とする．

定義 3.3: コチェイン写像

準同型 $f_q \colon C^q \to D^q$ の族 $f_\bullet \coloneqq \left\{f_q\right\}_{q\geq 0}$ が**コチェイン写像** (cochain map) であるとは，$\forall q \geq 0$ に対して

$$\delta'^q \circ f_q = f_{q+1} \circ \delta^q$$

が成り立つことを言う．i.e. 図式 3.1 が可換になると言うこと．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta^{q-2}"] & C^{q-1} \arrow[r, "\delta^{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & C^q \arrow[r, "\delta^q"] \arrow[d, "f_q"] & C^{q+1} \arrow[r, "\delta^{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta'^{q-2}"] & D^{q-1} \arrow[r, "\delta'^{q-1}"] & D^q \arrow[r, "\delta'^q"] & D^{q+1} \arrow[r, "\delta'^{q+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

図 3.1: コチェイン写像

補題 3.2:

$\forall q \geq 0$ について以下が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
f_q\bigl(Z^q(C^\bullet)\bigr) &\subset Z^q(D^\bullet) \\
f_q\bigl(B^q(C^\bullet)\bigr) &\subset B^q(D^\bullet)
\end{aligned}
$$

<u>**証明**</u> 一つ目は

$$
\begin{aligned}
z \in Z^q(C^\bullet) = \operatorname{Ker} \delta^q \quad &\iff \quad \delta^q(z) = 0 \\
&\implies \quad \delta'^q\bigl(f_q(z)\bigr) = f_{q+1}\bigl(\delta^q(z)\bigr) = 0 \\
&\iff \quad f_q(z) \in Z^q(D^\bullet) = \operatorname{Ker} \delta'^q
\end{aligned}
$$

二つ目は

$$
\begin{aligned}
b \in B^q(C^\bullet) = \operatorname{Ker} \delta^q \quad &\iff \quad \exists \beta \in C^{q-1},\ b = \delta^{q-1}(\beta) \\
&\implies \quad f_q(b) = \delta'^{q-1}\bigl(f_{q-1}(\beta)\bigr) \in B^q(D^\bullet) = \operatorname{Im} \delta'^{q-1}
\end{aligned}
$$

■

いま，コチェイン写像 $f_\bullet \coloneqq \bigl\{f_q \colon C^q \to D^q\bigr\}_{q \geq 0}$ を与える．標準射影を

$$
\pi \colon Z^q(D^\bullet) \to Z^q(D^\bullet)/B^q(D^\bullet), z \mapsto [z] = z + B^q(D^\bullet)
$$

とおくと，補題 3.2 から

$$
(\pi \circ f_q)\bigl(B^q(C^\bullet)\bigr) \subset \pi\bigl(B^q(D^\bullet)\bigr) = \{0_{Z^q(D^\bullet)/B^q(D^\bullet)}\}
$$

が成り立つ．i.e. $B^q(C^\bullet) \subset \operatorname{Ker} \pi \circ f_q$ である．よって商加群の普遍性から，次のような可換図式を書くことができる：

$$
\begin{tikzcd}
Z^q(C^\bullet) \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "p"'] & Z^q(D^\bullet) \arrow[r, "\pi"] & Z^q(D^\bullet)/B^q(D^\bullet) \\
Z^q(C^\bullet)/B^q(C^\bullet) \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f_q}"] \arrow[urr, dashed, "\exists!\overline{\pi\circ f_q}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

図 3.2: 誘導準同型

定義 3.4: コチェイン写像による誘導準同型

図式 3.2 中の赤字で示した準同型は**誘導準同型** (induced homomorphism) と呼ばれ，コホモロジー群の間の準同型を定める：

$$
f_* \coloneqq \overline{\pi \circ f_q} \colon H^q(C^\bullet) \to H^q(D^\bullet),\ [z] \mapsto [f_q(z)]
$$

3.2　特異コホモロジー

しばらくの間 $\mathbb{Z}$ 加群 M を一つ取って固定する．

定義 3.5: 特異 q コチェイン

位相空間 X および $\forall q \geq 0$ に対して

$$S^q(X;\, M) \coloneqq \mathrm{Hom}\big(S_q(X),\, M\big)$$

と定義される $S^q(X;\, M)$ の元は**特異 q コチェイン** (sigular q-cochain) と呼ばれる．

双線型写像

$$\langle\ ,\ \rangle \colon S^q(X;\, M) \times S_q(X) \to M,\ (u,\, c) \mapsto u(c)$$

は **Kronecker pairing** と呼ばれる．

定義 3.6: 特異コチェインの余境界写像

境界写像 $\partial_{q+1} \colon S_{q+1}(X) \to S_q(X)$ の双対写像を

$$\delta^q \colon S^q(X;\, M) \to S^{q+1}(X;\, M),\ u \mapsto u \circ \partial_{q+1}$$

と書く．

定義より以下が成り立つ：

$$\langle \delta^q u,\, c\rangle = \langle u,\, \partial_{q+1} c\rangle$$

前節の議論により

$$\delta^q \delta^{q-1} = 0$$

は分かっている．これは

$$\mathrm{Im}\, \delta^{q-1} \subset \mathrm{Ker}\, \delta^q$$

を意味するので，

$$\begin{aligned} Z^q\big(S^\bullet(X;\, M)\big) &\coloneqq \mathrm{Ker}\, \delta^q \\ B^q\big(S^\bullet(X;\, M)\big) &\coloneqq \mathrm{Im}\, \delta^{q-1} \end{aligned}$$

と書くと次のような構成ができる：

定義 3.7: 特異コホモロジー

族 $\left\{S^q(X;\, M),\, \delta^q\right\}_{q\geq 0}$ は位相空間 X の**特異コチェイン複体** (singular cochain complex) と呼ばれ，そのコホモロジーは

$$H^q(X;\, M) \coloneqq Z^q\bigl(S^\bullet(X;\, M)\bigr)/B^q\bigl(S^\bullet(X;\, M)\bigr)$$

と書かれる．$H^q(X;\, M)$ は $\mathbb{Z}$ 加群 M に値を持つ X の**特異コホモロジー群** (singular cohomology group with coefficients in the $\mathbb{Z}$ module M) と呼ばれる．

3.2.1 Kronecker 写像

Kronecker pairing は双線型写像

$$\langle\ ,\ \rangle\colon H^q(X;\, M) \times H_q(X) \to M,\ ([u],\, [z]) \mapsto u(z) \tag{3.2.1}$$

を誘導する．

補題 3.3:

上で定義した写像 $\langle\ ,\ \rangle\colon H^q(X;\, M) \times H_q(X) \to M$ は well-defined である．

<u>証明</u> $\forall f \in S^{q-1}(X;\, M)$, $\forall c \in S_{q+1}(X)$ に対して

$$u + \delta^{q-1} f \in [u] = u + \operatorname{Im} \delta^{q-1},$$
$$z + \partial_{q+1} c \in [z] = z + \operatorname{Im} \partial_{q+1}$$

である．これらの pairing を計算すると

$$\begin{aligned}(u + \delta^{q-1} f)(z + \partial_{q+1} c) &= (u + f\partial_q)(z + \partial_{q+1} c)\\ &= u(z) + f\bigl(\partial_q z\bigr) + u\bigl(\partial_{q+1} c\bigr) + \partial_q\partial_{q+1} c\\ &= u(z) + f\bigl(\partial_q z\bigr) + (\delta^q u)(c)\end{aligned}$$

$u \in \operatorname{Ker} \delta^q$, $z \in \operatorname{Ker} \partial_q$ なので結局

$$(u + \delta^{q-1} f)(z + \partial_{q+1} c) = u(z)$$

が従う． ■

定義 3.8: Kronecker 写像

(3.2.1) の双線型写像が定める準同型

$$\kappa\colon H^q(X;\, M) \to \operatorname{Hom}\bigl(H_q(X),\, M\bigr),\ [u] \mapsto \langle [u],\, \text{-}\rangle$$

を **Kronecker 写像** (Kronecker map) と呼ぶ．

3.2.2　関手性

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ をとる．補題 2.5 より，f はチェイン写像

$$f_*\colon S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(Y)$$

を誘導した．

一方，

$$f^*\colon S^q(Y;\, M) \longrightarrow S^q(X;\, M),\; u \longmapsto u \circ f_*$$

という準同型も考えられる．f_* がチェイン写像であることから

$$\begin{aligned}(\delta^q \circ f^*)(u) &= f^*(u) \circ \partial_{q+1} \\ &= u \circ (f_* \circ \partial_{q+1}) \\ &= (u \circ \partial'_{q+1}) \circ f_* \\ &= f^*(u \circ \partial'_{q+1}) \\ &= (f^* \circ \delta'^q)(u)\end{aligned}$$

が成立するので f^* はコチェイン写像の要件を充たす．従ってコチェイン写像による誘導準同型を考えることができる：

$$f^*\colon H^q(Y;\, M) \longrightarrow H^q(X;\, M),\; [u] \mapsto [f^*(u)]$$

$\forall [u] \in H^q(Y;\, M),\ [z] \in H_q(X)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle f^*[u],\, [z]\rangle &= \langle [f^*u],\, [z]\rangle \\ &= (f^* \circ u)(z) \\ &= (u \circ f_*)(z) \\ &= u\bigl(f_*(z)\bigr) \\ &= \langle [u],\, f_*[z]\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．この意味で f^* は f_* の一種の双対写像であると言える．

命題 3.2: コホモロジーの関手性

H^q は位相空間の圏 **Top** から $\mathbb{Z}$ 加群の圏 $\mathbb{Z}$-**Mod** への**反変**関手となる．i.e. $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と $\forall q \geq 0$ に対して以下が成り立つ：

(1) 恒等写像 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, X)$ について

$$(1_X)^* = 1_{H^q(X;\, M)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\bigl(H^q(X;\, M),\, H^q(X;\, M)\bigr)$$

(2) 連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$ について

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\bigl(H^q(Z;,\, M),\, H_q(X;\, M)\bigr)$$

3.3 コホモロジーの Eilenberg-Steenrod 公理系

公理 3.1: コホモロジーの Eilenberg-Steenrod 公理系

コホモロジー理論は

$$H^\bullet\colon \{\text{pairs, ct. maps}\} \longrightarrow \{\text{graded } R \text{ modules, homomorphisms}\}$$

なる反変関手であって，以下の公理を充たすものである：

(ES-ch1) 任意の空間対 $(X,\, A)$ および非負整数 $q \geq 0$ に対して**自然な**準同型

$$\delta\colon H^q(A) \longrightarrow H^{q+1}(X,\, A)$$

が存在して，包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X,\ j\colon X \hookrightarrow (X,\, A)$ を用いて次のホモロジー長完全列が誘導される：

$$\cdots \to H^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^q(X,\, A) \xrightarrow{j^*} H_q(X) \to \cdots$$

(ES-ch2) 2 つの連続写像 $f,\, g\colon (X,\, A) \to (Y,\, B)$ がホモトピックならば，誘導準同型 $f^*,\, g^*\colon H^q(Y,\, B) \to H^q(X,\, A)$ は

$$f^* = g^*$$

となる．

(ES-h3) $U \subset X$ かつ $\overline{U} \subset \mathrm{Int}(A)$ ならば，包含写像 $i\colon (X \setminus U,\, A \setminus U) \longrightarrow (X,\, A)$ が誘導する準同型

$$i^*\colon H^q(X,\, A) \longrightarrow H^q(X \setminus U,\, A \setminus U)$$

は $\forall q \geq 0$ に対して同型となる．

(ES-h4) $q \neq 0$ ならば $H^q(*) = 0$.

第 4 章

ホモロジー代数

この章の主目標は普遍係数定理を証明することである．**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) が重要となる．なお，この章の内容はほとんどが [11, 第 1, 3 章] に依存している．

まず，環 R の部分集合 $I \subset R$ が

(1) $0 \in I$

(2) $x, y \in I \implies x + y \in I$

(3) $a \in R,\ x \in I \implies ax \in I$ (resp. $xa \in I$)

を充たすとき，I は**左 (resp. 右) イデアル**であると言う[*1]．部分集合 $S = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset R$ を含む最小の左 (resp. 右) イデアル

$$\left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda x_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \in R,\ \text{有限個を除く } \lambda\in\Lambda \text{ に対して } a_\lambda = 0 \right\}$$

のことを S の生成する R の左 (resp. 右) イデアルと呼び，一つの元で生成される**可換環** R のイデアルを**単項イデアル** (principal ideal) と呼ぶ．

定義 4.1: 単項イデアル整域

- 零環でない環 R が**整域** (integral domain) であるとは，

$$a, b \in R,\ ab = 0 \implies a = 0 \text{ または } b = 0$$

  が成り立つことを言う．
- 任意のイデアルが単項イデアルである（可換）整域を**単項イデアル整域**と呼ぶ．

命題 4.1: 単項イデアル整域上の自由加群

R を単項イデアル整域とするとき，R 上の自由加群の任意の部分加群は自由加群である．

証明 $R^{\oplus\Lambda}$ の部分加群 M を任意にとる．

---

*1 R が可換環のときは左右の区別はないので単に**イデアル**と呼ぶ．

まず，Λ の任意の部分集合 $I \subset I' \subset \Lambda$ に対して自然な単射準同型

$$
\begin{aligned}
i_{II'} \colon R^{\oplus I} &\longrightarrow R^{\oplus I'},\ \left(x_i\right)_{i\in I} \longmapsto \left(y_{i'}\right)_{i'\in I'}, \\
\text{w/}\ \ y_{i'} &:= \begin{cases} x_{i'}, & i' \in I \\ 0, & i' \notin I \end{cases}
\end{aligned}
$$

が存在する．以降では $i_{I\Lambda} \colon R^{\oplus I} \longrightarrow R^{\oplus \Lambda}$ によって $R^{\oplus I}$ を $R^{\oplus \Lambda}$ の部分加群と見做す．

次に，集合 $\mathcal{S} \subset 2^{\Lambda} \times 2^{M}$ を次のように定義する：$\forall (I,\, J) \in \mathcal{S}$ は

(1)

$$
J \subset M \cap R^{\oplus I}
$$

(2) 準同型写像

$$
f_J \colon R^{\oplus J} \longrightarrow M \cap R^{\oplus I},\ \left(x_j\right)_{j\in J} \longmapsto \sum_{j\in J} x_j j \tag{4.0.1}
$$

は同型写像となる

を充たすとする．そして $\mathcal{S}$ の上の順序関係 $\le$ を

$$
(I,\, J) \le (I',\, J') \overset{\text{def}}{\iff} I \subset I' \ \text{かつ}\ J \subset J'
$$

で定義する．このとき $(\mathcal{S},\, \le)$ は順序集合で，かつ $(\emptyset,\, \emptyset) \in \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S}$ は空でない．

補題 4.1:

順序集合 $(\mathcal{S},\, \le)$ は帰納的順序集合である，i.e. $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合 $\mathcal{S}' := \left\{(I_\sigma,\, J_\sigma)\right\}_{\sigma\in\Sigma}$ が上限を持つ．

証明 $I := \bigcup_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma,\ J := \bigcup_{\sigma\in\Sigma} J_\sigma$ とおくと，明らかに $I \in 2^{\Lambda},\ J \in 2^{M}$ である．条件 (1) より $J_\sigma \subset M \cap R^{\oplus I_\sigma}$ で，かつ

$$
f_{J_\sigma} \colon R^{\oplus J_\sigma} \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_\sigma},\ \left(x_j\right)_{j\in J_\sigma} \longmapsto \sum_{j\in J_\sigma} x_j j
$$

は同型写像となる．これらの $\sigma \in \Sigma$ に関する和集合をとると $J = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \subset M \cap R^{\oplus I}$ かつ

$$
f_J \colon R^{\oplus J} \longrightarrow M \cap \left\{R\right\}_I,\ \left(x_j\right)_{j\in J} \longmapsto \sum_{j\in J} x_j j
$$

は同型写像となる．故に $(I,\, J) \in \mathcal{S}$ であり，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える． ■

この補題から $(\mathcal{S},\, \le)$ に対して Zorn の補題を適用でき，極大元 $(I_0,\, J_0) \in \mathcal{S}$ の存在が言える．$I_0 = \Lambda$ ならば性質 (2) から $M \cong R^{\oplus J_0}$ が言えるので題意が示されたことになる．

$I_0 \subsetneq \Lambda$ を仮定する．仮定より $\mu \in \Lambda \setminus I_0$ をとることができる．$I_1 := I_0 \cup \{\mu\}$ とおくと，μ 成分への標準的射影 $p_\mu\colon R^{\oplus I_1} \longrightarrow R$ を用いた完全列

$$0 \longrightarrow R^{\oplus I_0} \xrightarrow{i_{I_0 I_1}} R^{\oplus I_1} \xrightarrow{p_\mu} R \longrightarrow 0$$

が成り立つ．ここからさらに完全列

$$0 \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_0} \xrightarrow{i_{I_0 I_1}} M \cap R^{\oplus I_1} \xrightarrow{p_\mu} (M \cap R^{\oplus I_1}) \longrightarrow 0 \tag{4.0.2}$$

が誘導されるが，$p_\mu(M \cap R^{\oplus I_1})$ は R の部分加群，i.e. イデアルなので，$\boldsymbol{R}$ **が単項イデアル整域**であることから，ある $a \in R$ を用いて Ra という形にかける．

$a = 0$ の場合 $p_\mu(M \cap R^{\oplus I_1}) = 0$ なので，(4.0.2) の完全性から $M \cap R^{\oplus I_0} \cong M \cap R^{\oplus I_1}$ となる．このとき $I_0 \subsetneq I_1$ かつ $(I_1,\, J_0) \subset \mathcal{S}$ となり $(I_0,\, J_0)$ の極大性に矛盾．

$a \neq 0$ の場合 $p_\mu(M \cap R^{\oplus I_1}) = Ra$ の勝手な元は $x \in R$ を用いて xa と一意的に書ける．従って $p_\mu(b) = a$ を充たす $b \in M \cap R^{\oplus I_1}$ を一つ固定すると，

$$i\colon Ra \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_1},\; xa \longmapsto xb$$

と定義した写像 i は well-defined．このとき $p_\mu\big(i(xa)\big) = p_\mu(xb) = xa$ が成立するので完全列 (4.0.2) は分裂する．従って系 3.1 から同型写像

$$g\colon (M \cap R^{\oplus I_0}) \oplus Ra \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_1},\; (m,\, xa) \longmapsto i_{I_0 I_1}(m) + i(xa) = i_{I_0 I_1}(m) + xb$$

を得る．

ここで $J_1 := J_0 \cup \{b\}$ とおき，同型写像 $h'\colon R \longrightarrow Ra,\; x \longmapsto xa$ を定める．このとき

$$h := f_{J_0} \oplus h'\colon R^{\oplus J_1} = R^{\oplus J_0} \oplus R^{\oplus \{b\}} \longrightarrow (M \cap R^{\oplus I_0}) \oplus Ra$$

は同型写像で，定義 (4.0.1) から

$$\begin{aligned} g\Big(h\big((x_j)_{j\in J_0},\, x_b\big)\Big) &= g\Big(f_{J_0}\big((x_j)_{j\in J_0}\big),\, x_b a\Big) \\ &= f_{J_0}\big((x_j)_{j\in J_0}\big) + x_b b \\ &= f_{J_1}\Big(\big((x_j)_{j\in J_0},\, x_b\big)\Big) \end{aligned}$$

となる．よって $f_{J_1}\colon R^{\oplus J_1} \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_1}$ が同型写像となって (2) が充たされ，$I_0 \subsetneq I_1$, $J_0 \subsetneq J_1$ かつ $(I_1,\, J_1) \in \mathcal{S}$ となって $(I_0,\, J_0)$ の極大性に矛盾する．

以上より，背理法から $I_0 = \Lambda$ が言えて証明が完了する． ■

自由加群に関する次の命題は単純だが，後で使う：

命題 4.2:

任意の左 R 加群 M に対して，ある自由加群から M への全射準同型写像が存在する

__証明__ $R^{\oplus M}$ は自由加群であり，

$$f\colon R^{\oplus M} \longrightarrow M,\; \big(a_m\big)_{m\in M} \longmapsto \sum_{m\in M} a_m m$$

は全射準同型写像である． ■

4.1 諸定義

4.1.1 射影的加群

定義 4.2: 射影的加群

左 R 加群 P が**射影的加群** (projective module) であるとは，任意の左 R 加群の**全射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P \longrightarrow N$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon P \longrightarrow M$ であって $f \circ h = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 4.1）．

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \\ M \arrow[r, two heads, "f"] & N \end{tikzcd}$$

図 4.1: 射影的加群

命題 4.3:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，N が射影的加群ならば分裂する．

証明 射影的加群の定義において $P = N$ とすることで，左 R 加群の準同型写像 $s\colon N \longrightarrow M$ であって $g \circ s = 1_N$ を充たすものが存在する． ■

命題 4.4: 射影的加群の直和

左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して以下の 2 つは同値：

(1) $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が射影的加群

(2) $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ が射影的加群

証明 標準的包含を $\iota_\lambda\colon P_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ と書く．

(1)⟹(2) 仮定より，$\forall\lambda \in \lambda$ に対して，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$ に対して，準同型写像 $h_\lambda\colon P_\lambda \longrightarrow M$ であって $f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$ を充たすものが存在する．従って直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

であって $f \circ h_\lambda = h \circ \iota_\lambda$ を充たすものが一意的に存在する．このとき

$$(f \circ h) \circ \iota_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$$

であるから，h の一意性から $f \circ h = g$.

(1)⟸(2) $\lambda \in \Lambda$ を一つ固定し，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P_\lambda \longrightarrow M$ を与える．直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$$

であって $h \circ \iota_\lambda = g$（$\forall \mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\},\ h \circ \iota_\lambda = 0$）を充たすものが一意的に存在する．さらに仮定より，準同型写像

$$\alpha\colon \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \longrightarrow M$$

であって $f \circ \alpha = h$ を充たすものが存在する．このとき

$$f \circ (\alpha \circ \iota_\lambda) = h \circ \iota_\lambda = g$$

なので $\beta := h \circ \iota_\lambda$ とおけば良い．

■

系 4.1: 自由加群は射影的加群

環 R 上の自由加群は射影的加群である

<u>**証明**</u> R が射影的加群であることを示せば命題**??**より従う．

左 R 加群の全射準同型写像と準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N,\ g\colon R \longrightarrow N$ を任意に与える．このときある $x \in M$ が存在して $f(x) = g(1)$ となる．この x に対して準同型写像 $h\colon R \longrightarrow M,\ a \longmapsto ax$ を定めると，$\forall a \in R$ に対して

$$f\bigl(h(a)\bigr) = f(ax) = af(x) = ag(1) = g(a)$$

が成り立つので $f \circ h = g$ となる． ■

命題 4.5:

左 R 加群 P について，次の 3 条件は同値である：

(1) P は射影的加群
(2) 左 R 加群 Q であって $P \oplus Q$ が自由加群になるものが存在する
(3) 任意の左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，図式

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P,\, M_3) \longrightarrow 0 \tag{4.1.1}$$

は完全列である．

証明 **(1)** $\Longrightarrow$ **(2)** 全射準同型

$$f\colon R^{\oplus P} \longrightarrow P,\ (a_p)_{p\in P} \longmapsto \sum_{p\in P} a_p p$$

を考える．$Q := \mathrm{Ker}\, f$ とおくと，図式

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow R^{\oplus P} \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

は完全列になるが，命題 4.3 よりこれは分裂する．従って命題 3.1 より

$$P \oplus Q \cong R^{\oplus P}$$

(2) $\Longrightarrow$ **(1)** 命題 4.4, 4.1 より明らか．

(1) $\Longleftrightarrow$ **(3)** 命題 3.1 より図式 (4.1.2) の g_* の全射性のみ確認すれば良い．i.e. (3) は任意の全射準同型写像 $g\colon M_2 \longrightarrow M_3$ と任意の準同型写像 $\varphi\colon P \longrightarrow M_3$ に対してある準同型写像 $\psi\colon P \longrightarrow M_2$ であって $g_*(\psi) = g \circ \psi = \varphi$ を充たすものが存在することと同値．このことは P が射影的加群であることに他ならない．

■

R が PID のときは嬉しいことが起こる：

系 4.2:

R が単項イデアル整域ならば，
R 加群 P が射影的加群 $\Longleftrightarrow$ R が自由加群

証明 $\Longrightarrow$ 命題 4.1 より明らか．

$\Longleftarrow$ 命題 4.5 より，ある R 加群 Q が存在して $P \bigoplus Q$ が自由加群になるので P は自由加群の部分加群と同型である．R が PID なので命題 4.1 より P は自由加群．

■

4.1.2　単射的加群

次に，**単射的加群**の定義をする：

定義 4.3: 単射的加群

左 R 加群 I が**単射的加群** (injective module) であるとは，任意の左 R 加群の**単射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon M \longrightarrow I$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon N \longrightarrow I$ であって $h \circ f = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 4.2）.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

図 4.2: 単射的加群

命題 4.6:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，L が単射的加群ならば分裂する.

証明 単射的加群の定義において $I = L$ とすれば良い. ■

命題 4.7:

左 R 加群 P について，次の 2 条件は同値である：

(1) I は単射的加群

(2) 任意の左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，図式

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3, I) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2, I) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, I) \longrightarrow 0 \tag{4.1.2}$$

は完全列である.

証明 命題 3.1 より，f^* の全射性のみ確認すれば良い. (2) は任意の単射準同型写像 $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ および任意の準同型写像 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M_1, I)$ に対して，ある $\psi \in \mathrm{Hom}_R\, M_2, I$ が存在して $\psi \circ f = \varphi$ を充たすことと同値であるが，これは単射的加群の定義そのものである. ■

定義 4.4: 非零因子

環 R の元 $a \in R$ が**非零因子** (non zero-diviser) であるとは, $\forall x \in R \setminus \{0\}$ に対して $ax \neq$ かつ $xa \neq 0$ であることを言う.

定義 4.5: 可除加群

左 R 加群 M が**可除加群** (divisable module) であるとは, $\forall x \in M$ と任意の R の非零因子 a に対して

$$\exists y \in M,\ ay = x$$

が成立することを言う.

命題 4.8:

環 R 上の単射的加群は可除加群である.

証明 環 R 上の単射的加群 I を任意にとり, $\forall x \in I$ および任意の R の非零因子 a を一つ固定する. このとき写像

$$f\colon R \longrightarrow R,\ b \longmapsto ba$$

は左 R 加群 R の単射準同型写像である. ここで左 R 加群の準同型写像 $g\colon R \longrightarrow I,\ b \longmapsto bx$ を考えると, I が単射的加群であることからある準同型写像 $h\colon R \longrightarrow I$ であって $h \circ f = g$ を充たすものが存在する. 故に

$$x = g(1) = h\bigl(f(1)\bigr) = h(a) = ah(1)$$

となり, I は可除加群である. ■

R が PID のときは同値になる:

命題 4.9:

R が単項イデアル整域ならば, R 上の可除加群は単射的加群である.

証明 Zorn の補題を使って証明する. [11, 命題 1.98] を参照. ■

命題 4.10:

R を環とする. 任意の左 R 加群 M に対して, M からある単射的加群への単射準同型写像が存在する.

この命題の証明において, 単射的 $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が主要な役割を果たす.

証明

補題 4.2:

右 R 加群 P が射影的加群であるとき，左 R 加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は単射的加群である．

証明 $f\colon M \longrightarrow N$ を左 R 加群の単射準同型写像，$g\colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を左 R 加群の準同型写像とする．f を $\mathbb{Z}$ 加群の単射準同型写像と見做せば，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が単射的加群であることから

$$f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ h \longmapsto h \circ f$$

は右 R 加群の全射準同型写像となる．ここで右 R 加群の準同型写像

$$g'\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ x \longmapsto \bigl(m \mapsto g(m)(x)\bigr)$$

を定める．このとき P が射影的加群であることから，ある右 R 加群の準同型写像 $h'\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ であって $f^*(h') = g'$ を充たすものが存在する．さらにここで

$$h\colon N \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ n \longmapsto \bigl(x \mapsto h'(x)(n)\bigr)$$

と定義するとこれは左 R 加群の準同型写像となり，かつ

$$h\bigl(f(m)\bigr)(x) = h'(x)\bigl(f(m)\bigr) = (f^*(h'))(x)(m) = g'(x)(m) = g(m)(x)$$

だから $h \circ f = g$ となる．i.e. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は単射的加群である． ■

補題 4.3:

左 R 加群 M に対して

$$\Phi\colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\bigr),\ m \longmapsto \bigl(\varphi \mapsto \varphi(m)\bigr)$$

と定義した写像 Φ は左 R 加群の単射準同型である．

証明 $\forall a \in R,\ \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に対して

$$\bigl(a\Phi(m)\bigr)(\varepsilon) = \Phi(m)(\varphi a) = (\varphi a)(m) = \varphi(am) = \Phi(am)(\varphi)$$

より $a\Phi(m) = \Phi(am)$ となる．i.e. Φ は左 R 加群の準同型写像である．

次に $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ を示す．$\forall m \in M \setminus \{0\}$ に対して $\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像

$$f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow M,\ a \longmapsto am$$

を考える．$\mathbb{Z}$ が PID であることから，部分 $\mathbb{Z}$ 加群（i.e. $\mathbb{Z}$ のイデアル）$\mathrm{Ker}\,f$ はある非負整数 b を用いて $b\mathbb{Z}$ の形に書ける．特に $f(1) = m \neq 0$ なので $b = 0$ または $b \geq 2$ である．

$g\colon \mathrm{Im}\,f \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を

$$\mathrm{Im}\,f \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\,f = \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

で定める．ただし

$$i\colon \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ n + b\mathbb{Z} \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} + \mathbb{Z}, & b = 0 \\ \frac{n}{b} + \mathbb{Z}, & b \geq 2 \end{cases}$$

とする．$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が単射的加群なので，$\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像 $h\colon M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ であって $h\left|_{\mathrm{Im}\, f}\right. = g$ を充たすものが存在する．このとき

$$h(m) = g(m) = i(1 + b\mathbb{Z}) \neq 0$$

なので $\Phi(m)(h) = h(m) \neq 0$ となり，$\Phi(m)$ は零写像でないことが言えた．i.e. $\mathrm{Ker}\, \Phi = \{0\}$ ■

M を任意の左 R 加群とする．すると $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は右 R 加群だから，命題 4.2 よりある射影的右 R 加群 P からの全射準同型写像 $f\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が存在する．このとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}$ の左完全性から

$$f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

は左 R 加群の単射準同型なので，補題 4.3 の Φ との合成 $f^* \circ \Phi\colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は左 R 加群の単射準同型写像である．さらに補題 4.2 から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は単射的加群なので証明が終わる． ■

4.1.3 平坦加群・無捻加群

定義 4.6: 平坦加群

左 R 加群 N が**平坦加群** (flat module) であるとは，任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow M'$ に対して $f \otimes 1_N\colon M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N$ が単射であることを言う．

補題 4.4:

左 R 加群 N に対して以下の二つは同値．

(1) N は平坦加群
(2) 任意の右 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，図式

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

は完全列である

証明 テンソル積の右完全性より明らか． ■

命題 4.11: 平坦加群の直和

集合 Λ によって添字付けられた左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとる．このとき
$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が平坦加群 $\iff \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ が平坦加群

証明 ($\Longrightarrow$) $\forall\lambda\in\Lambda$ に対して P_λ が平坦加群ならば，任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon M\longrightarrow M'$ に対して $f\otimes 1_{P_\lambda}\colon M\otimes_R P_\lambda\longrightarrow M'\otimes_R P_\lambda$ は単射である．故に

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(f\otimes 1_{P_\lambda})\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M\otimes_R P_\lambda)\longrightarrow\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M'\otimes_R P_\lambda)$$

は単射である．ここで加群の直和が帰納極限であること，および命題 A.9 を用いると

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M\otimes_R P_\lambda)\cong M\otimes_R\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda\right)$$

がわかる．この同一視を通じて

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(f\otimes 1_{P_\lambda})=f\otimes 1_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda}$$

とすると右辺も単射であり，$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda$ は平坦加群である．

($\Longleftarrow$) $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda$ が平坦加群ならば任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon M\longrightarrow M'$ に対して $f\otimes 1_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda$ は単射となる．従って $\forall\lambda\in\Lambda$ に対して $f\otimes 1_{P_\lambda}$ も単射である．

■

系 4.3:

射影的加群 $\Longrightarrow$ 平坦加群

証明 任意の右 R 加群 M に対して $M\otimes_R R\cong M$ が成り立つことに注意する．従って任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon M\longrightarrow M'$ に対して $f\otimes 1_R\colon M\otimes_R R\longrightarrow M'\otimes_R R$ は f と同一視できるので単射である，i.e. R は平坦加群である．自由加群は R の直和と同型だから，命題 4.11 より自由加群は平坦加群である．

さて，N が射影的加群ならば命題 4.5 からある左 R 加群 N' であって $N\oplus N'$ が自由加群となるものが存在する．故に $N\oplus N'$ は平坦加群であり，命題 4.11 から N は平坦加群である． ■

系 4.4:

任意の左 R 加群 M に対して，ある平坦加群から M への全射準同型写像が存在する．

証明 命題 4.2 より，ある射影的加群から M への全射準同型写像が存在する．さらに系 4.3 から題意が示された． ■

無捻加群を定義し，平坦加群との関係を述べる：

定義 4.7: 捩れ元

左 R 加群 M の元 $x\in M$ が**捻れ元** (torsion element) であるとは，ある R の非零因子 a が存在して $ax=0$ となることを言う．

定義 4.8: 無捻加群

左 R 加群 M が**無捻加群** (torsion-free module) であるとは，M が 0 以外の捻れ元を持たないことを言う．

命題 4.12:

環 R 上の平坦加群は無捻加群である．

証明 M を平坦加群とし，$a \in R$ を任意の非零因子とする．このとき写像 $f\colon R \longrightarrow R,\ x \longmapsto ax$ は右 R 加群の単射準同型写像なので $f \otimes 1_M\colon R \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M$ は単射．

ここで $R \otimes_R M \cong M$ であることから $f \otimes 1_M$ は M 上の a 倍写像 $M \longrightarrow M,\ x \longmapsto ax$ と同一視できる．これが任意の非零因子 a に対して単射なので M は無捻加群である． ■

R が PID のときは嬉しいことが起こる：

命題 4.13:

R が単項イデアル整域ならば，左 R 加群 M について

M が無捻加群 $\iff$ M が平坦加群

証明 [11, 命題 1.109] を参照． ■

4.2 射影的分解と単射的分解

4.2.1 射影的分解

定義 4.9: 射影的分解

左（右）R 加群のチェイン複体

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

が完全列で，$\forall n \geq 0$ に対して P_n が射影的加群であるとき，組 $(P_\bullet, \partial_\bullet, \varepsilon)$ を M の**射影的分解** (projective resolution) と呼ぶ[a]．特に $\forall n \geq 0$ に対して P_n が自由加群ならば**自由分解** (free resolution) と呼ぶ．

[a] $(P_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} M$ とか $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ などと略記することがある．

命題 4.14:

任意の左（右）R 加群 M は射影的分解を持つ．

証明 n に関する数学的帰納法より示す．まず $n = 0$ のとき，命題 4.2 から，ある射影的加群 P_0 と全射準同型写像 $\varepsilon\colon P_0 \longrightarrow M$ が存在するので良い．

次に，射影的加群 $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ の図式

$$P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

が完全列であると仮定する．$K_{n-1} \coloneqq \operatorname{Ker}\partial_{n-1}$ とおき，命題 4.2 を使って射影的加群 P_n と全射準同型写像 $p_n\colon P_n \longrightarrow K_n$ をとると，2 つの図式

$$P_n \xrightarrow{p_n} K_{n-1} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow K_{n-1} \xrightarrow{\iota_{n-1}} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

はどちらも完全列である．ただし $\iota_{n-1}\colon K_{n-1} \hookrightarrow P_{n-1}$ は標準的包含とした．このとき $\partial_n \coloneqq \iota_{n-1} \circ p_n$ とおくと，$\operatorname{Im}\iota_{n-1} = \operatorname{Ker}\partial_{n-1}$ かつ $\operatorname{Im} p_n = K_{n-1}$ であることから $\operatorname{Im}\partial_n = \operatorname{Im}\iota_{n-1} = \operatorname{Ker}\partial_{n-1}$ が成り立つので

$$P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

は完全列である． ■

命題 4.14 の構成において，$K_n = \operatorname{Ker}\partial_n$ 自身が射影的加群ならば図式

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が M の射影的分解を与える．このような場合は K_n で完全列を打ち切ることができる．

定理 4.5:

任意の R 加群 M を与える．

(1) R が体ならば，M は図式

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{1} M \longrightarrow 0$$

を射影的分解にもつ．

(2) R が PID ならば，M は

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

の形の図式を射影的分解にもつ．

証明 (1) R が体ならば M はベクトル空間であり，基底を持つ．i.e. 自由 R 加群なので命題 4.1 より射影的加群である．

(2) R が単項イデアル整域ならば，系 4.2 より射影的加群 P_0 は自由加群でもある．さらに命題 4.1 から，自由加群 P_0 の任意の部分加群は自由加群となる．従って $P_1 \coloneqq \operatorname{Ker}\varepsilon$ とすればこれは自由加群であり，命題 4.1 より射影的加群でもある．

■

4.2.2 単射的分解

定義 4.10: 単射的分解

左（右）R 加群のコチェイン複体

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} I^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

が完全列で，$\forall n \geq 0$ に対して I^n が単射的加群であるとき，組 $(I^\bullet, d^\bullet, i)$ を M の**単射的分解** (injective resolution) と呼ぶ[a]．

[a] $M \xrightarrow{i} (I^\bullet, d^\bullet)$ とか $M \xrightarrow{i} I^\bullet$ などと略記することがある．

命題 4.15:

任意の左（右）R 加群 M は単射的分解を持つ．

証明 命題 4.10 より，命題 4.5 の証明において矢印の向きを逆にすればよい． ■

定理 4.6:

R が PID ならば，M は

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow 0$$

の形の図式を単射的分解にもつ．

証明 命題 4.8 より単射的加群 I^0 は可除加群である．従って $I^1 := \operatorname{Coker} i$ とおくとこれは可除加群だが[*2]，R が PID であることから命題 4.9 が使えて I^1 は単射的加群でもある．故に，標準的射影 $p\colon I^0 \longrightarrow I^1$ を用いた完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} i \longrightarrow 0$$

は M の単射的分解になる． ■

4.3 Tor と Ext

4.3.1 複体の圏

本題に入る前に，複体に関して記号を整理する．まず，チェイン複体 $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ は $M^n := M_{-n}$, $d^n := \partial_{-n}$ とおけばコチェイン複体 $(M^\bullet, d^\bullet)$ になる．このことを踏まえる場合は，今まではチェイン複体，コチェイン複体の圏を **Chain** と書いていたところを $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に書き換えることにする（添字を非負整数ではなく $\mathbb{Z}$ 全体にとれるようになったため）．また，便宜上ただ **複体** (complex) と呼んだ時はコチェイン複体を指すことにする．

[*2] 可除加群の剰余加群は可除加群になる：可除 R 加群 M と部分加群 $N \subset M$ をとる．$x + N \in M/N$ と R の非零因子 a を任意にとる．このとき M が可除加群であることから $\exists y \in M$, $ay = x$ が成立するが，剰余加群のスカラー乗法の定義から $a(y+N) = (ay) + N = x + N$ が言える．

チェイン写像・コチェイン写像もまとめて**複体の射**と呼ぶことがある：

定義 4.11: 複体の射

加群の圏 R-**Mod** における複体 $M := (M^\bullet,\ d^\bullet)$ から複体 $M' := (M'^\bullet,\ d'^\bullet)$ への**射**とは，R-**Mod** における図式としての M から M' への射のことを言う．
i.e. R-**Mod** における射の族 $f^\bullet := (f^q\colon M^q \longrightarrow M'^q)_{q\in\mathbb{Z}}$ であって

$$\forall q \in \mathbb{Z},\ d'^q \circ f^q = f^{q+1} \circ d^q$$

を充たすもののこと．

R-**Mod** の対象 M は $M^0 = M,\ M^{n\neq 0} = 0$ とおくことで自然に複体 $M^\bullet$ と見做すことができるので，R-**Mod** は $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ の充満部分圏とみなせる．

次の命題はひとまず証明なしに認めることにする．

命題 4.16:

$\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ はアーベル圏である．

複体の図式

$$M_1^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} M_2^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M_3^\bullet$$

が**完全列**であるとは，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$M_1^q \xrightarrow{f^q} M_2^q \xrightarrow{g^q} M_3^q$$

が R-**Mod** における完全列であることと同値である．以下では R-**Mod** における短完全列の圏を $\mathbf{SES}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ と書き，完全列の圏を $\mathbf{ES}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ と書くことにする．文脈上 R-**Mod** が明らかな時は $\mathbf{SES}(\mathbf{Chain})$ や $\mathbf{ES}(\mathbf{Chain})$ と書くこともある．

命題 4.17: コホモロジーの関手性

$f^\bullet\colon (M^\bullet,\ d^\bullet) \longrightarrow (M'^\bullet,\ d'^\bullet)$ を複体の射とする時，$f^\bullet$ は自然にコホモロジーの射

$$H^q(f^\bullet)\colon H^q(M^\bullet) \longrightarrow H^q(M'^\bullet)$$

を誘導し，これにより H^q は共変関手 $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ を定める．

<u>**証明**</u> 複体の射の定義より，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して R-**Mod** における次の可換図式がある：

$$\begin{tikzcd}
M^{q-1} \arrow[r, "d^{q-1}"] \arrow[d, "f^{q-1}"] & M^q \arrow[d, "f^q"] \\
M'^{q-1} \arrow[r, "d'^{q-1}"] & M'^q
\end{tikzcd}$$

これに命題 A.2 を適用することで可換図式

$$\begin{tikzcd}
M^{q-1} \arrow[r, "d^{q-1}"] \arrow[d, "f^{q-1}"] & M^q \arrow[r, "\operatorname{coker} d^{q-1}"] \arrow[d, "f^q"] & \operatorname{Coker} d^{q-1} \arrow[d, "\overline{f^q}"] \\
M'^{q-1} \arrow[r, "d'^{q-1}"] & M'^q \arrow[r, "\operatorname{coker} d'^{q-1}"] & \operatorname{Coker} d'^{q-1}
\end{tikzcd}$$

を得，さらに赤色をつけた部分の可換図式に命題 A.2 を適用することで，可換図式

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} d^{q-1} \arrow[r, "\operatorname{im} d^{q-1}"] \arrow[d, "\overline{\varphi^{q-1}}"] & M^q \arrow[r, "\operatorname{coker} d^{q-1}"] \arrow[d, "f^q"] & \operatorname{Coker} d^{q-1} \arrow[d, "\overline{f^q}"] \\
\operatorname{Im} d'^{q-1} \arrow[r, "\operatorname{im} d'^{q-1}"] & M'^q \arrow[r, "\operatorname{coker} d'^{q-1}"] & \operatorname{Coker} d'^{q-1}
\end{tikzcd}$$

が得られる．ただし $\operatorname{Ker}(\operatorname{coker} d^{q-1}) = \operatorname{Im} d^{q-1}$，$\ker(\operatorname{coker} d^{q-1}) = \operatorname{im} d^{q-1}$ を用いた．

一方，可換図式

$$\begin{tikzcd}
M^q \arrow[r, "d^q"] \arrow[d, "f^q"] & M^{q+1} \arrow[d, "f^{q+1}"] \\
M'^q \arrow[r, "d'^q"] & M'^{q+1}
\end{tikzcd}$$

に命題 A.2 を適用することで可換図式

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} d^q \arrow[r, "\ker d^q"] \arrow[d, "\overline{\psi^q}"] & M^q \arrow[r, "d^q"] \arrow[d, "f^q"] & M^{q+1} \arrow[d, "f^{q+1}"] \\
\operatorname{Ker} d'^q \arrow[r, "\ker d'^q"] & M'^q \arrow[r, "d'^q"] & M'^{q+1}
\end{tikzcd}$$

を得る．その上複体の定義から $d^q \circ d^{q-1} = 0$ なので，一意的に存在する全射 $q\colon M^q \longrightarrow \operatorname{Im} d^q$　s.t.　$d^q = \operatorname{im} d^q \circ q$ を使って $0 = (d^q \circ \operatorname{im} d^{q-1}) \circ q$，i.e. $d^q \circ \operatorname{im} d^{q-1} = 0$ がいえて，単射 $\iota^q\colon \operatorname{Im} d^{q-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d^q$ であって $\ker d^q \circ \iota^q = \operatorname{im} d^{q-1}$ となるものが一意的に存在することがわかる．$d'^{\bullet}$ に関しても同様の構成が可能なので，以上の議論をまとめると可換図式

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} d^q \arrow[dr, "\ker d^q"] \arrow[ddd, "\overline{\psi^q}"'] & & \operatorname{Im} d^{q-1} \arrow[ll, "\iota^q"'] \arrow[dl, "\operatorname{im} d^{q-1}"'] \arrow[ddd, "\overline{\varphi^{q-1}}"] \\
& M^q \arrow[d, "f^q"] & \\
& M'^q & \\
\operatorname{Ker} d'^q \arrow[ur, "\ker d'^q"] & & \operatorname{Im} d'^{q-1} \arrow[ll, "\iota'^q"] \arrow[ul, "\operatorname{im} d'^{q-1}"']
\end{tikzcd}$$

が得られた．さらに，赤色をつけた部分の可換図式に命題 A.2 を適用することで可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Im}\, d^{q-1} & \xrightarrow{\iota^q} & \mathrm{Ker}\, d^q & \xrightarrow{\mathrm{coker}\, \iota^q} & H^q(M^\bullet) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \overline{\varphi^{q-1}}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\psi^q}} & & \downarrow{\scriptstyle H^q(f^\bullet)} & & \\
\mathrm{Im}\, d'^{q-1} & \xrightarrow{\iota'^q} & \mathrm{Ker}\, d^q & \xrightarrow{\mathrm{coker}\, \iota'^q} & H^q(M'^\bullet) & \longrightarrow & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}(\text{exact})\\ \\ (\text{exact})\end{array}$$

が成り立つ．この構成は自然である． ■

命題 4.18: コホモロジー長完全列

SES$(R$-**Mod**$)$ の対象

$$0 \longrightarrow (M_1^\bullet,\, d_1^\bullet) \xrightarrow{f^\bullet} (M_2^\bullet,\, d_2^\bullet) \xrightarrow{g^\bullet} (M_3^\bullet,\, d_3^\bullet) \longrightarrow 0 \tag{4.3.1}$$

が与えられたとき，自然に完全列

$$\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^q(f^\bullet)} H^q(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^q(g^\bullet)} H^q(M_3^\bullet) \\
&\xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(f^\bullet)} H^{q+1}(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(g^\bullet)} H^{q+1}(M_3^\bullet) \\
&\xrightarrow{\delta^{q+1}} \cdots
\end{aligned}$$

が誘導される．これを短完全列 (4.3.1) に伴う **コホモロジー長完全列** (long exact sequence of cohomologies) と呼ぶ．δ^q $(\forall q \in \mathbb{Z})$ を**連結射** (connecting morphism) と呼ぶ．

証明 $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1^q & \xrightarrow{f^q} & M_2^q & \xrightarrow{g^q} & M_3^q & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow{\scriptstyle d_1^q} & & \downarrow{\scriptstyle d_2^q} & & \downarrow{\scriptstyle d_3^q} & & \\
0 & \longrightarrow & M_1^{q+1} & \xrightarrow{f^{q+1}} & M_2^{q+1} & \xrightarrow{g^{q+1}} & M_3^{q+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}(\text{exact})\\ \\ (\text{exact})\end{array}$$

が成り立つ．これに蛇の補題を用いて完全列

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_1^q \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_2^q \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_3^q,& \\
\mathrm{Coker}\, d_1^q \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_2^q \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_3^q \longrightarrow 0&
\end{aligned}$$

を得る．

$d_i^q \circ d_i^{q-1} = d_i^{q+1} \circ d_i^q = 0$, i.e. $\mathrm{Im}\, d_i^{q-1} \subset \mathrm{Ker}\, d_i^q$, $\mathrm{Im}\, d_i^q \subset \mathrm{Ker}\, d_i^{q+1}$ より射

$$d_i^q \colon M_i^q \longrightarrow M_i^{q+1}$$

から自然に well-defined な射

$$\overline{d_i^q} \colon \mathrm{Coker}\, d_i^{q-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_i^{q+1},\ x + \mathrm{Im}\, d_i^{q-1} \longmapsto d_i^q(x)$$

が誘導され，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\, \overline{d_i^q} &= \mathrm{Ker}\, d_i^q / \mathrm{Im}\, d_i^{q-1} = H^q(M_i^\bullet), \\
\mathrm{Coker}\, \overline{d_i^q} &= \mathrm{Ker}\, d_i^{q+1} / \mathrm{Im}\, d_i^q = H^{q+1}(M_i^\bullet)
\end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. 可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
& & \operatorname{Coker} d_1^{q-1} & \xrightarrow{\overline{f^q}} & \operatorname{Coker} d_2^{q-1} & \xrightarrow{\overline{g^q}} & \operatorname{Coker} d_3^{q-1} & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\
& & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{d_1^q}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{d_2^q}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{d_3^q}} & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_1^{q+1} & \xrightarrow{\overline{f^{q+1}}} & \operatorname{Ker} d_2^{q+1} & \xrightarrow{\overline{g^{q+1}}} & \operatorname{Ker} d_3^{q+1} & & \quad \text{(exact)}
\end{array}
$$

があるが，これに蛇の補題を用いると完全列

$$
\begin{aligned}
&H^q(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^q(f^\bullet)} H^q(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^q(g^\bullet)} H^q(M_3^\bullet) \\
&\xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(f^\bullet)} H^{q+1}(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(g^\bullet)} H^{q+1}(M_3^\bullet)
\end{aligned}
$$

が得られる． ■

チェイン・ホモトピーも再掲する：

定義 4.12: 複体の射の間のホモトピー

$(M^\bullet,\, d^\bullet),\ (M'^\bullet,\, d'^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ とし，$f^\bullet,\, g^\bullet \colon (M^\bullet,\, d^\bullet) \longrightarrow (M'^\bullet,\, d'^\bullet)$ を 2 つの複体の射とする．この時，$f^\bullet,\, g^\bullet$ の間の**ホモトピー** (homotopy) とは射の族 $(h^q \colon M^q \longrightarrow M'^{q-1})_{q\in\mathbb{Z}}$ であって

$$
\forall q \in \mathbb{Z},\ f^q - g^q = d'^{q-1} \circ h^q + h^{q+1} \circ d^q
$$

が成り立つもののこと．$f^\bullet,\, g^\bullet$ の間にホモトピーが存在する時，$f^\bullet$ と $g^\bullet$ は**ホモトピック** (homotopic) であるといい，$\boldsymbol{f^\bullet \simeq g^\bullet}$ と書く．

命題 4.19: コホモロジーのホモトピー不変性

$(M^\bullet,\, d^\bullet),\ (M'^\bullet,\, d'^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ とし，$f^\bullet,\, g^\bullet \colon (M^\bullet,\, d^\bullet) \longrightarrow (M'^\bullet,\, d'^\bullet)$ を 2 つの複体の射であって互いにホモトピックなものとする．このとき $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
H^q(f^\bullet) = H^q(g^\bullet) \colon H^q(M^\bullet) \longrightarrow H^q(M'^\bullet)
$$

が成り立つ．

<u>証明</u> 命題 4.17 および命題 A.2 より，コホモロジーの射は

$$
\begin{aligned}
H^q(f^\bullet) &\colon x + \operatorname{Im} d^{q-1} \longmapsto f^q(x) + \operatorname{Im} d'^{q-1}, \\
H^q(g^\bullet) &\colon x + \operatorname{Im} d^{q-1} \longmapsto g^q(x) + \operatorname{Im} d'^{q-1}
\end{aligned}
$$

と定義される．$\bigl(h^q \colon M^q \longrightarrow M'^{q-1}\bigr)_{q\in\mathbb{Z}}$ をホモトピーとすると，$\forall x \in \operatorname{Ker} d^q$ に対して

$$
\begin{aligned}
&H^q(f^\bullet)(x + \operatorname{Im} d^{q-1}) - H^q(g^\bullet)(x + \operatorname{Im} d^{q-1}) \\
&= \bigl(f^q(x) + \operatorname{Im} d'^{q-1}\bigr) - \bigl(g^q(x) + \operatorname{Im} d'^{q-1}\bigr) \\
&= \bigl(f^q(x) - g^q(x)\bigr) + \operatorname{Im} d'^{q-1} \\
&= \Bigl(d'^{q-1}\bigl(h^q(x)\bigr) + h^{q+1}\bigl(d^q(x)\bigr)\Bigr) + \operatorname{Im} d'^{q-1} \\
&= h^{q+1}(0) + \operatorname{Im} d'^{q-1} = \operatorname{Im} d'^{q-1}
\end{aligned}
$$

が成り立つので証明が完了する． ■

次に，**二重複体**を定義しておく：

定義 4.13: 二重複体

R-**Mod** における図式 4.3 が**二重複体** (double complex) であるとは，$\forall p,\, q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} d_1^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} + d_1^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つことを言う．これを $(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*})$ または $M^{\bullet,\,*}$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "d_2^{p-1,\,q-2}"] & {} \arrow[d, "d_2^{p,\,q-2}"] & {} \arrow[d, "d_2^{p+1,\,q-2}"] & \\
\cdots \arrow[r, "d_1^{p-2,\,q-1}"] & M^{p-1,\,q-1} \arrow[r, "d_1^{p-1,\,q-1}"] \arrow[d, "d_2^{p-1,\,q-1}"] & M^{p,\,q-1} \arrow[r, "d_1^{p,\,q-1}"] \arrow[d, "d_2^{p,\,q-1}"] & M^{p+1,\,q-1} \arrow[r, "d_1^{p+1,\,q-1}"] \arrow[d, "d_2^{p+1,\,q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_1^{p-2,\,q}"] & M^{p-1,\,q} \arrow[r, "d_1^{p-1,\,q}"] \arrow[d, "d_2^{p-1,\,q}"] & M^{p,\,q} \arrow[r, "d_1^{p,\,q}"] \arrow[d, "d_2^{p,\,q}"] & M^{p+1,\,q} \arrow[r, "d_1^{p+1,\,q}"] \arrow[d, "d_2^{p+1,\,q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_1^{p-2,\,q+1}"] & M^{p-1,\,q+1} \arrow[r, "d_1^{p-1,\,q+1}"] \arrow[d, "d_2^{p-1,\,q+1}"] & M^{p,\,q+1} \arrow[r, "d_1^{p,\,q+1}"] \arrow[d, "d_2^{p,\,q+1}"] & M^{p+1,\,q+1} \arrow[r, "d_1^{p+1,\,q+1}"] \arrow[d, "d_2^{p+1,\,q+1}"] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

図 4.3: 二重複体

二重複体の射は図式の射として定義する．この射によって R-**Mod** 上の二重複体全体は圏を成すので，これを $\mathrm{C}_2(R\text{-}\mathbf{Mod})$ と書く．$\mathrm{C}_2(R\text{-}\mathbf{Mod})$ はアーベル圏をなす．

!

二重複体の定義を少し変形して，図式 4.3 が

$$\begin{aligned} d_1^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} &= d_1^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} \end{aligned}$$

を充たすものを考えることができる．これは複体 $(M^{\bullet,\,q},\, d_1^{\bullet,\,q})$ の複体をなす，i.e. $\mathbf{C}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ の対象である．

さらに $\left(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, (-1)^{\bullet} d_2^{\bullet,\,*}\right)$ を考えると二重複体になる．この対応により $\mathrm{C}_2(R\text{-}\mathbf{Mod}) \cong \mathbf{C}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ である．

複体 $(M^{\bullet},\, d^{\bullet})$ は縦に見るか横に見るかの 2 通りの方法で二重複体になる

(1) 横に見る：

$$
\begin{aligned}
M^{p,\,q} &= \begin{cases} M^p, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}, \\
d_1^{p,\,q} &= \begin{cases} d^p, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}, \qquad\qquad d_2^{p,\,q} = 0
\end{aligned}
$$

この二重複体 $(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*})$ を $M^{\bullet}$ と書く.

(2) 横に見る：

$$
\begin{aligned}
M^{p,\,q} &= \begin{cases} M^q, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases}, \\
d_1^{p,\,q} &= 0, \qquad\qquad d_2^{p,\,q} = \begin{cases} d^q, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

この二重複体 $(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*})$ を M^{*} と書く.

すなわち，射

$$
\begin{aligned}
f\colon (M^{\bullet},\, d_M^{\bullet}) &\longrightarrow (N^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,1}^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,2}^{\bullet,\,*}), \\
g\colon (M^{*},\, d_M^{*}) &\longrightarrow (N^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,1}^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,2}^{\bullet,\,*})
\end{aligned}
$$

とはそれぞれ複体の射

$$
\begin{aligned}
f^{\bullet}\colon (M^{\bullet},\, d_M^{\bullet}) &\longrightarrow (N^{\bullet,\,0},\, d_{N,\,1}^{\bullet,\,0}), \\
g^{\bullet}\colon (M^{\bullet},\, d_M^{\bullet}) &\longrightarrow (N^{0,\,\bullet},\, d_{N,\,2}^{0,\,\bullet})
\end{aligned}
$$

であって

$$
\begin{aligned}
d_{N,\,2}^{\bullet,\,0} \circ f^{\bullet} &= 0, \\
d_{N,\,1}^{0,\,\bullet} \circ g^{\bullet} &= 0
\end{aligned}
$$

を充たすものを表す.

定義 4.14: 全複体

R-**Mod** の二重複体 $M \coloneqq \left(M^{\bullet,*},\, d_1^{\bullet,*},\, d_2^{\bullet,*}\right)$ が与えられ，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$n = p + q \text{ かつ } M^{p,q} \neq 0$$

を充たす整数の組 $(p,\, q)$ が有限個であると仮定する[a].

[a] 実のところ R-**Mod** の直和は添字集合が有限でなくとも定義されるので，R-**Mod** のみを考えるならこの仮定は無くても良い．しかし，一般のアーベル圏においては可算個の和が定義されているとは限らないので，この仮定が必要になる場合がある．

$$\mathrm{Tot}(M)^n \coloneqq \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

とおき，射

$$d^n\colon \mathrm{Tot}(M)^n \longrightarrow \mathrm{Tot}(M)^{n+1}$$

を，標準的包含 $\iota_{p,q}\colon M^{p,q} \hookrightarrow \mathrm{Tot}^{p+q} \quad {}^{\mathrm{w}/}\ p+q=n$ と書いたときに

$$d^n \circ \iota_{p,q} = \iota_{p+1,q} \circ d_1^{p,q} + \iota_{p,q+1} \circ d_2^{p,q}$$

を充たす唯一の射とする．このとき組 $\mathrm{Tot}(M) \coloneqq (\mathrm{Tot}(M)^\bullet,\, d^\bullet)$ がなす複体を二重複体 M の**全複体** (total complex) と呼ぶ.

4.3.2 Tor と Ext の定義

任意の右 R 加群 L および左 R 加群 M を与える．命題 4.14 より，$L,\, M$ の射影的分解

$$P^\bullet \longrightarrow L \longrightarrow 0, \quad Q^\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

をとることができる．このとき複体 $P^\bullet \otimes_R M$, $L \otimes_R Q^\bullet$，二重複体 $P^\bullet \otimes_R Q^*$ および射

$$P^\bullet \otimes_R Q^* \longrightarrow P^\bullet \otimes_R M, \tag{4.3.2}$$
$$P^\bullet \otimes_R Q^* \longrightarrow L \otimes_R Q^* \tag{4.3.3}$$

を構成することができる．

射影的加群は平坦加群だったので $\forall p,\, q \leq 0$ に対して P^p, Q^q は平坦加群．従って補題 4.4 より射 (4.3.2), (4.3.3) はそれぞれ完全列

$$\cdots \longrightarrow P^p \otimes_R Q^{-1} \longrightarrow P^p \otimes_R Q^0 \longrightarrow P^p \otimes_R M \longrightarrow 0,$$
$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \otimes_R Q^q \longrightarrow P^0 \otimes_R Q^q \longrightarrow L \otimes_R Q^q \longrightarrow 0$$

を誘導する．このような状況において，後述する二重複体がつくるスペクトル系列を考えることで，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対する自然な同型

$$H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) \cong H^{-n}\bigl(\mathrm{Tot}(P^\bullet \otimes_R Q^*)\bigr) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^\bullet) \tag{4.3.4}$$

が存在することがわかる．

定義 4.15: Tor

$\forall n \geq 0$ に対して

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) \coloneqq H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) \cong H^{-n}\bigl(\mathrm{Tot}(P^\bullet \otimes_R Q^*)\bigr) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^\bullet)$$

と定義する．

$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M)$ は右完全関手（系 A.7 参照）

$$\text{-} \otimes_R M \colon \mathbf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ L \longmapsto L \otimes_R M$$

の n 番目の左導来関手を L に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群であり，かつ右完全関手

$$L \otimes_R \text{-} \colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ M \longmapsto L \otimes_R M$$

の n 番目の左導来関手を M に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群である．従って左導来関手の一般論から以下が従う：

命題 4.20: Tor **の基本性質**

(1) $\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M)$ は射影的分解の取り方によらない．また，$M \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M)$，$L \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M)$ はそれぞれ関手

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, \text{-}) \colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},$$
$$\mathrm{Tor}_n^R(\text{-},\, M) \colon \mathbf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$$

を定める．

(2) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**左** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned} &\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_3) \\ &\cdots \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,\, M_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,\, M_3) \\ &\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\bigl(\mathrm{Tor}_n^R(L,\, \text{-})\bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(3) $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3 \longrightarrow 0$ を**右** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned} &\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(L_1,\, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L_2,\, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L_3,\, M) \\ &\cdots \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L_1,\, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L_2,\, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L_3,\, M) \\ &\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\left(\mathrm{Tor}_n^R(\text{-},\,M)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(\mathbf{Mod}\text{-}R) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(4) $\mathrm{Tor}_0^R(L,\,M) \cong L \otimes_R M$

同様にして Ext が定義される．

$\forall L,\,M \in R\text{-}\mathbf{Mod}$ または $\forall L,\,M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ を考える．命題 4.15 より，L の射影的分解

$$P^\bullet \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

および M の単射的分解

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^\bullet$$

をとることができる．このとき複体

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^0,\,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-1},\,M) \longrightarrow \cdots\\
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^1) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

ができるのでそれぞれ $\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,M)$, $\mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^\bullet)$ と書く．さらに二重複体 $\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*)$ および射

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*),\\
&\mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*)
\end{aligned}$$

を構成できる．$\forall p \geq 0$ に対して P^{-p} は射影的加群なので命題 4.5 から

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-p},\,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-p},\,I^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-p},\,I^1) \longrightarrow \cdots$$

は完全列になる．一方，$\forall p \geq 0$ に対して I^p は単射的加群なので命題 4.7 から

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^0,\,I^p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-1},\,I^p) \longrightarrow \cdots$$

もまた完全列になる．このような状況において，二重複体がつくるスペクトル系列を考えれば $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対する自然な同型

$$H^n\big(\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,M)\big) \cong H^n\big(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*))\big) \cong H^n\big(\mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^\bullet)\big) \tag{4.3.5}$$

が存在することがわかる．

定義 4.16: Ext

$\forall n \geq 0$ に対して

$$\mathrm{Ext}_R^n(L,\,M) \coloneqq H^n\big(\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,M)\big) \cong H^n\big(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*))\big) \cong H^n\big(\mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^\bullet)\big)$$

と定義する．

$\mathrm{Ext}_R^n(L,\,M)$ は左完全関手（命題 3.1 参照）

$$\mathrm{Hom}_R\,(\text{-},\,M)\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ L \longmapsto \mathrm{Hom}_R\,(L,\,M)$$

の n 番目の右導来関手を L に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群であり，かつ左完全関手（命題 3.1 参照）

$$\mathrm{Hom}_R\,(L,\,\text{-})\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ M \longmapsto \mathrm{Hom}_R\,(L,\,M)$$

の n 番目の右導来関手を M に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群である．従って右導来関手の一般論から以下が従う：

命題 4.21: Ext の基本性質

(1) $\mathrm{Ext}_R^n(L,\,M)$ は L の射影的分解および M の単射的分解の取り方によらない．また，$M \longmapsto \mathrm{Ext}_R^n(L,\,M)$, $L \longmapsto \mathrm{Ext}_R^n(L,\,M)$ はそれぞれ関手

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}_R^n(L,\,\text{-})\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\\ &\mathrm{Ext}_R^n(\text{-},\,M)\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}\end{aligned}$$

を定める．

(2) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**左** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned}&\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}_R^n(L,\,M_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L,\,M_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L,\,M_3)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta^{n}} \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,\,M_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,\,M_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,\,M_3)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots\end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\bigl(\mathrm{Ext}_R^n(L,\,\text{-})\bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(3) $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3 \longrightarrow 0$ を**右** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned}&\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}_R^n(L_3,\,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L_2,\,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L_1,\,M)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta^{n}} \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L_3,\,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L_2,\,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L_1,\,M)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots\end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\bigl(\mathrm{Ext}_R^n(\text{-},\,M)\bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(4) $\mathrm{Ext}_R^0(L,\,M) \cong \mathrm{Hom}_R\,(L,\,M)$

次の節ではまず導来関手の一般論を導入して命題 4.20, 4.21 を証明し，その後でスペクトル系列を導入して同型 (4.3.4), (4.3.5) を示す（後者の方が準備が大変）．

しかしその前に，定義 4.15, 4.16 から従ういくつかの事実を確認しておく．

4.3.3 Tor に関する小定理集

命題 4.22: Tor と直和の交換

- 右 R 加群の族 $\{L_i\}_{i\in I}$ および左 R 加群 M を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^R(L_i,\, M) \cong \mathrm{Tor}_n^R\left(\bigoplus_{i\in I} L_i,\, M\right) \tag{4.3.6}$$

- 右 R 加群 L および左 R 加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_i) \cong \mathrm{Tor}_n^R\left(L,\, \bigoplus_{i\in I} M_i\right) \tag{4.3.7}$$

証明 $Q^\bullet \longrightarrow M$ を M の射影的分解とする．テンソル積と直和は可換なので，$\forall p > 0$ に対して

$$\bigoplus_{i\in I}(L_i \otimes_R Q^{-p}) \cong \left(\bigoplus_{i\in I} L_i\right) \otimes_R Q^{-p}$$

が成り立つ．フィルタードな圏 $\mathcal{I}$ 上の R-$\mathbf{Mod}$ の図式において，コホモロジーをとる関手 H^{-n} と帰納極限は交換するので

$$\bigoplus_{i\in I} H^{-n}(L_i \otimes_R Q^\bullet) \cong H^{-n}\left(\left(\bigoplus_{i\in I} L_i\right) \otimes_R Q^\bullet\right)$$

がわかり，同型 (4.3.6) が言えた．同型 (4.3.7) に関しても同様である． ■

命題 4.23: 平坦性による Tor の特徴付け

任意の左 R 加群 M を与える．このとき以下は互いに同値である：

(1) M は平坦加群
(2) 任意の**右** R 加群 L と $\forall n \geq 1$ に対して $\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) = 0$
(3) 任意の**右** R 加群 L に対して $\mathrm{Tor}_1^R(L,\, M) = 0$
(4) 任意の R の右イデアル I に対して $\mathrm{Tor}_1^R(R/I,\, M) = 0$

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)** M が平坦加群であるとする．

任意の右 R 加群 L と，その射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \longrightarrow L$ をとる．定義より，次数が 0 以下の部分のみをとった複体 $(P^\bullet,\, d^\bullet)$ は完全列だから，平坦加群の定義より $(P^\bullet \otimes_R M,\, d^\bullet \otimes_R 1_M)$ も完全列である．従って $\forall n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) = H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) = \frac{\mathrm{Ker}(d^{-n} \otimes_R 1_M)}{\mathrm{Im}(d^{-n+1} \otimes_R 1_M)} = 0$$

である．

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) R/I は右 R 加群になるのでよい．

(4) $\Longrightarrow$ (1) 左 R 加群 M が条件 (4) を充たしているとする．また，任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon L \longrightarrow L'$ を与える．示すべきは $f \otimes_R 1_M\colon L \otimes_R M \longrightarrow L' \otimes_R M$ が単射になることである．

単射 f を通して L を L' の部分加群と見做す．そして集合 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} := \left\{ N \in \textbf{Mod-}R \;\middle|\; L \subset N \subset L',\ N/L \text{ は有限生成} \right\}$$

とおき，$\mathcal{S}$ 上の順序 $\le$ を

$$\le := \left\{ (N,\ N') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \;\middle|\; N \subset N' \right\}$$

と定義する．さらに $\forall N,\ N' \in \mathcal{S}$ に対して集合

$$J(N,\ N') := \begin{cases} \{*_{N,\,N'}\}, & N \le N' \\ \emptyset, & N \not\le N' \end{cases}$$

を定義し，合成を

$$\circ\colon J(N',\ N'') \times J(N,\ N') \longrightarrow J(N,\ N''),$$
$$\begin{cases} (*_{N',\,N''},\ *_{N,\,N'}) \longmapsto *_{N,\,N''}, & N \le N' \le N'' \\ \text{empty map}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると $\bigl(\mathcal{S},\ \{\, J(N,\ N') \,\}_{N,\,N' \in \mathcal{S}}\bigr)$ はフィルタードな圏になる．$N \le N'$ のときの包含写像を $i_{N,\,N'}\colon N \hookrightarrow N'$ とかくと $\bigl(\{N\}_{N\in\mathcal{S}},\ \{i_{N,\,N'}\}_{N \le N'}\bigr)$ はフィルタードな圏 $\mathcal{S}$ 上の図式となり，命題 A.7 の形をした帰納極限 $\varinjlim_{N\in\mathcal{S}} N$ が定義される．このとき $\mathcal{S}$ の定義より $\forall x \in L'$ に対して $x \in xR + L$ だが $xR + L \in \mathcal{S}$ なので $\varinjlim_{N\in\mathcal{S}} N \cong \bigcup_{N\in\mathcal{S}} N = L'$ となる．ここで，帰納極限とテンソル積は可換だから $L' \otimes_R M \cong \varinjlim_{N\in\mathcal{S}} (N \otimes_R M)$ であり，命題??の記号を用いて

$$f \otimes 1_M\colon L \otimes_R M \longrightarrow L' \otimes_R M,\ x \longmapsto [x]$$

とかける．従って

$$x \in \operatorname{Ker}(f \otimes_R 1_M) \quad\Longleftrightarrow\quad [x] = [0] \quad\Longleftrightarrow\quad \exists N \in \mathcal{S},\ (i_{L,\,N} \otimes 1_M)(x) = 0$$

が言える．

以上の考察から，$\forall N \in \mathcal{S}$ に対して $\operatorname{Ker}(i_{L,\,N} \otimes 1_M) = \{0\}$ であること，i.e. $i_{L,\,N} \otimes 1_M$ が単射であることを示せば良いとわかった．さらに話を簡単にすると，L'/L が有限生成であるような任意の単射準同型写像 $f\colon L \longrightarrow L'$ に対して $f \otimes_R 1_M$ が単射になることを示せば良いということになる．このようなとき $L' = L + x_1R + \cdots + x_nR$ と書けるが，$0 \le i \le n$ に対して $L'_i := L + x_1R + \cdots + x_iR$ とおき，標準的包含を $f_i\colon L'_{i-1} \hookrightarrow L'_i$ と書くと，$f \otimes_R 1_M$ の単射性は各 i についての $f_i \otimes_R 1_M$ の単射性に帰着される．その上 $L'_i/L'_{i-1} = (x_i + L'_{i-1})R$ なので，結局 $L'/L = xR$ と書けるような場合に，任意の単射準同型 $f\colon L \longrightarrow L'$ に対して $f \otimes 1_M$ も単射となることを示しさえすれば良い．

さて，$L' = L + xR$ と仮定しよう．すると右 R 加群の準同型 $g\colon R \longrightarrow L'/L,\ a \longmapsto xa + L$ は全射であるから，準同型定理により同型 $\overline{g}\colon R/\operatorname{Ker} g \xrightarrow{\cong} L'/L$ が誘導される．このとき $I := \operatorname{Ker} g$ は右イデアルである．よって短完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} L' \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

があるが，これを元に Tor の基本性質-(3) の長完全列を構成して 1 次から 0 次にかけた部分を取ることで完全列

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I,\,M) \longrightarrow L\otimes_R M \xrightarrow{f\otimes 1_M} L'\otimes_R M$$

が得られる（基本性質-(4) も使った）．ここに仮定 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I,\,M)=0$ を使って $f\otimes 1_M$ が単射であることが示された．

■

定義 4.17: 平坦分解

左 R 加群 M の**平坦分解** (flat resolution) とは，左 R 加群の**完全列**

$$\cdots \longrightarrow Q^{-1} \longrightarrow Q^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

であって，$\forall n\geq 0$ に対して Q^{-n} が平坦加群であるようなもののこと．

命題 4.24: 平坦分解と Tor

(1) 任意の左 R 加群 M およびその平坦分解 $Q^\bullet \longrightarrow M$ を与える．このとき，任意の右 R 加群 L に対して

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\,M)\cong H^{-n}(L\otimes_R Q^\bullet)$$

が成り立つ[a]．

(2) 左 R 加群の短完全列

$$0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$$

であって，M_3 が平坦加群であるようなものを与える．このとき，任意の右 R 加群 L に対して

$$0\longrightarrow L\otimes_R M_1\longrightarrow L\otimes_R M_2\longrightarrow L\otimes_R M_3\longrightarrow 0$$

は $\mathbb{Z}$ 加群の短完全列となる．

(3) 左 R 加群の短完全列

$$0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$$

であって，$M_2,\,M_3$ ($M_1,\,M_3$) が平坦加群であるようなものを与える．このとき，M_1 (M_2) もまた平坦加群である．

[a] 平坦加群は射影的加群とは限らない！

証明 (1) 命題 4.23 より，平坦加群は R-**Mod** の $L\otimes_R$ - 非輪状対象である．従って $Q^\bullet\longrightarrow M$ は M の $L\otimes_R$ - 非輪状分解であり，左導来関手の一般論から

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\,M)\cong H^{-n}(L\otimes_R Q^\bullet)$$

が成り立つ．

(2) Tor の基本性質-(2) の長完全列の一部をとってくると，完全列

$$\mathrm{Tor}_1^R(L,\,M_3) \longrightarrow L \otimes_R M_1 \longrightarrow L \otimes_R M_2 \longrightarrow L \otimes_R M_3 \longrightarrow 0$$

を得る．命題 4.23-(3) より $\mathrm{Tor}_1^R(L,\,M_3) = 0$ だから示された．

(3) $M_2,\,M_3$ が平坦加群とする．Tor の基本性質より完全列

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(L,\,M_3) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\,M_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\,M_2)$$

があるが, 仮定と命題 4.23 より $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(L,\,M_3) = \mathrm{Tor}_n^R(L,\,M_2) = 0$ となる．よって $\mathrm{Tor}_n^R(L,\,M_1) = 0$ であり，命題 4.23 から M_1 が平坦加群であるとわかる．

■

4.3.4 Ext に関する小定理集

命題 4.25: Ext と直積

- 左 R 加群の族 $\{L_i\}_{i\in I}$ および左 R 加群 M を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Ext}_R^n(L_i,\,M) \cong \mathrm{Ext}_R^n\left(\bigoplus_{i\in I} L_i,\,M\right)$$

- 左 R 加群 L および左 R 加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Ext}_R^n(L,\,M_i) \cong \mathrm{Ext}_R^n\left(L,\,\prod_{i\in I} M_i\right)$$

命題 4.26: 単射的加群による Ext の特徴付け

任意の左 R 加群 M を与える．このとき以下は互いに同値である：

(1) M は単射的加群

(2) 任意の左 R 加群 L と $\forall n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}_R^n(L,\,M) = 0$

(3) 任意の左 R 加群 L に対して $\mathrm{Ext}_R^1(L,\,M) = 0$

(4) 任意の R の左イデアル I に対して $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,\,M) = 0$

命題 4.27: 射影的加群による Ext の特徴付け

任意の左 R 加群 L を与える．このとき以下は互いに同値である：

(1) L は射影的加群

(2) 任意の左 R 加群 M と $\forall n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}_R^n(L,\,M) = 0$

(3) 任意の左 R 加群 M に対して $\mathrm{Ext}_R^1(L,\,M) = 0$

4.4　導来関手

この節では $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を充分射影的対象を持つアーベル圏とし，アーベル圏でも通用する証明を目指す．

4.4.1　左導来関手

定義 4.18:

$F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を加法的関手とする．このとき $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して $L_nF(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を次のように対応づける：

A の射影的分解 $(P^\bullet, d^\bullet) \longrightarrow A$ をとり，

$$L_nF(A) \coloneqq H^{-n}\bigl(F(P^\bullet)\bigr)$$

とする．

命題 4.28: 左導来関手の定義と基本性質

(1) 定義 4.18 の $L_nF(A)$ は射影的分解の取り方によらない．また，射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ に対して自然に $L_nF(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\bigl(L_nF(A) \longrightarrow L_nF(A')\bigr)$ が定まり，この対応によって L_nF は関手 $L_nF\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を定める．この関手を**左導来関手** (left derived functor) と呼ぶ．

(2) $\mathcal{A}$ における短完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$ に対して，自然に長完全列

$$\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{\delta_{n+1}} L_nF(A_1) \xrightarrow{L_nF(f)} L_nF(A_2) \xrightarrow{L_nF(g)} L_nF(A_3) \\
&\xrightarrow{\delta_n} L_{n-1}F(A_1) \xrightarrow{L_{n-1}F(f)} L_{n-1}F(A_2) \xrightarrow{L_{n-1}F(g)} L_{n-1}F(A_3) \\
&\xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots
\end{aligned}$$

が誘導される．この対応により関手の族 $\{L_nF\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathcal{B})$$

を定める．

(3) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が射影的ならば $L_{n\geq 1}F(A) = 0$

(4) 自然変換 $\tau\colon L_0F \longrightarrow F$ があり，F が右完全ならばこれは自然同値である．

(5) F が完全ならば $L_{n\geq 1}F(A) = 0,\ \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

命題??を示すために，いくつかの補題を用意する．

補題 4.5:

- 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,\, N)$
- 射影的対象の族 $(P^{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ によって構成された複体

$$\cdots \xrightarrow{d^{-(n+1)}} P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} P^{-(n-1)} \xrightarrow{d^{-(n-1)}} \cdots \xrightarrow{d^{-1}} P^{0} \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

- $\mathcal{A}$ における完全列

$$\cdots \xrightarrow{e^{-(n+1)}} Q^{-n} \xrightarrow{e^{-n}} Q^{-(n-1)} \xrightarrow{e^{-(n-1)}} \cdots \xrightarrow{e^{-1}} Q^{0} \xrightarrow{e} N \longrightarrow 0$$

を与える．このとき，図式 4.4 を可換にする複体の射 $f^\bullet \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ がホモトピーを除いて一意に存在する．

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & M \arrow[d, "f"] \\
Q^\bullet \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}$$

図 4.4

証明 ***$f^\bullet$* の構成**

まず P^0 が射影的かつ $e\colon Q^0 \longrightarrow N$ が全射なので次の図式を可換にする f^0 が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & P^0 \arrow[dl, dashed, "\exists f^0"'] \arrow[d, "f\circ d"] \\
Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}$$

このとき命題 A.2 より次の図式を可換にする $\overline{f^0}$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
P^{-1} \arrow[r, "\mathrm{coim}\, d^{-1}"] & \mathrm{Ker}\, d \arrow[r, "\ker d"] \arrow[d, dashed, "\exists\overline{f^0}"] & P^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^0"] & M \arrow[d, "f"] \\
Q^{-1} \arrow[r, "\mathrm{coim}\, e^{-1}"] & \mathrm{Ker}\, e \arrow[r, "\ker e"] & Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}$$

$Q^\bullet$ の完全性より $\mathrm{coim}\, e^{-1} \colon Q^{-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, e = \mathrm{Im}\, e^{-1}$ は全射である．これと P^{-1} が射影的であることを使うと次の図式を可換にする f^{-1} が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & P^{-1} \arrow[dl, dashed, "\exists f^1"'] \arrow[d, "\overline{f^0}\circ\mathrm{coim}^{-1} d^{-1}"] \\
Q \arrow[r, "\mathrm{coim}\, e^{-1}"] & N
\end{tikzcd}$$

この f^{-1} は，$d^{-1} = \ker d \circ \operatorname{coim} d^{-1}$, $e^{-1} = \ker e \circ \operatorname{coim} e^{-1}$ および上 2 つの図式の可換性から

$$e^{-1} \circ f^{-1} = \ker e \circ (\operatorname{coim} e^{-1} \circ f^{-1}) = (\ker e \circ \overline{f^0}) \circ \operatorname{coim} d^{-1} = f^0 \circ \ker d \circ \operatorname{coim} d^{-1} = f^0 \circ d^{-1}$$

を充し，図式 4.4 の該当する部分を可換にする．以上の議論を繰り返せばよい．

ホモトピーを除いて一意

もう一つの複体の射 $g^\bullet \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ が図式 4.4 を可換にするとする．

$\varphi^{-n} := f^{-n} - g^{-n}$ とおく．$e \circ \varphi^0 = e \circ f^0 - e \circ g^0 = f \circ d - f \circ d = 0$ なので，ある射 $\overline{h^0} \colon P^0 \longrightarrow \operatorname{Ker} e$ で $\ker e \circ \overline{h^0} = \varphi^0$ を充たすものがある：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^0 \arrow[dl, dashed, "\exists \overline{h^0}"'] \arrow[d, "\varphi^0"] & \\
Q^{-1} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-1}"] & \operatorname{Ker} e \arrow[r, "\ker e"] & Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}$$

さらに $\operatorname{coim} e^{-1}$ は全射かつ P^0 が射影的なので次の図式を可換にする射 h^0 が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^0 \arrow[dll, dashed, "\exists h^0"'] \arrow[dl, "\overline{h^0}"] \arrow[d, "\varphi^0"] & \\
Q^{-1} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-1}"] & \operatorname{Ker} e \arrow[r, "\ker e"] & Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}$$

このとき

$$e^{-1} \circ h^0 = \ker e \circ \operatorname{coim} e^{-1} \circ h^0 = \ker e \circ \overline{h^0} = \varphi^0$$

なので h^0 は 0 次のホモトピーである．

次に $\psi^{-1} := \varphi^{-1} - h^0 \circ d^{-1}$ とおく．すると

$$e^{-1} \circ \psi^{-1} = e^{-1} \circ \varphi^{-1} - e^{-1} \circ h^0 \circ d^{-1} = \varphi^0 \circ d^{-1} - \varphi^0 \circ d^{-1} = 0$$

なので，ある射 $\overline{h^{-1}} \colon P^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} e^{-1}$ で $\ker e^{-1} \circ \overline{h^{-1}} = \psi^{-1}$ を充たすものがある：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^{-1} \arrow[dl, dashed, "\exists \overline{h^{-1}}"'] \arrow[d, "\psi^{-1}"] & \\
Q^{-2} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-2}"] & \operatorname{Ker} e^{-1} \arrow[r, "\ker e^{-1}"] & Q^{-1} \arrow[r, "e^{-1}"] & Q^0
\end{tikzcd}$$

さらに $\operatorname{coim} e^{-2}$ は全射かつ P^{-1} が射影的なので次の図式を可換にする射 h^{-1} が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^{-1} \arrow[dll, dashed, "\exists h^{-1}"'] \arrow[dl, "\overline{h^{-1}}"] \arrow[d, "\psi^{-1}"] & \\
Q^{-2} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-2}"] & \operatorname{Ker} e^{-1} \arrow[r, "\ker e^{-1}"] & Q^{-1} \arrow[r, "e^{-1}"] & Q^0
\end{tikzcd}$$

このとき

$$e^{-2} \circ h^{-1} = \ker e^{-1} \circ \operatorname{coim} e^{-2} \circ h^{-1} = \ker e^{-1} \circ \overline{h^{-1}} = \psi^{-1}$$

が成り立つ．i.e.

$$\varphi^{-1} = \psi^{-1} + h^0 \circ d^{-1} = e^{-2} \circ h^{-1} + h^0 \circ d^{-1}$$

であり，h^{-1} が 1 次のホモトピーであることがわかった．あとは同様の議論を繰り返せばよい．

■

補題 4.6: Horseshoe lemma

- $\mathcal{A}$ における完全列 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$
- 射影的分解 $(P^\bullet,\, d_P^\bullet) \xrightarrow{d_P} L \longrightarrow 0, \quad (R^\bullet,\, d_R^\bullet) \xrightarrow{d_R} N \longrightarrow 0$
- $Q^{-n} \coloneqq P^{-n} \oplus R^{-n}$

を与える．このとき以下の条件を充たす可換図式 4.5 が存在する：

(1) $(Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) \xrightarrow{d_Q} M \longrightarrow 0$ は M の 射影的分解

(2) 1 行目は複体の完全列である．特に $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$0 \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{f^{-n}} Q^{-n} \xrightarrow{g^{-n}} R^{-n} \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

は，f^{-n} が $Q^{-n} = P^{-n} \oplus Q^{-n}$ の第 1 成分への標準的包含，g^{-n} が第 2 成分への標準的射影となる．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (P^\bullet,\, d_P^\bullet) \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] & (Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "d_Q"] & (R^\bullet,\, d_R^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

図 4.5

<u>**証明**</u> $\mathrm{pr}^{-n} \colon Q^{-n} \longrightarrow P^{-n},\ (x,\, y) \longmapsto x$ とおく．g は全射かつ R^0 は射影的なので次の図式を可換にする射 $h^0 \colon R^0 \longrightarrow M$ が存在する：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^0 \arrow[r, "f^0"] \arrow[d, "d_P"] & Q^0 \arrow[r, "g^0"] & R^0 \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] \arrow[dl, dashed, "\exists h^0"'] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
& 0 & & 0 & & \\
& \text{(exact)} & & \text{(exact)} & &
\end{tikzcd}
$$

ここで $d_Q\colon Q^0 \longrightarrow M$ を $d_Q := f \circ d_P \circ \mathrm{pr}^0 + h^0 \circ g^0$ とおく．このとき直上の図式の可換性と行の完全性から

$$
\begin{aligned}
d_Q \circ f^0 &= f \circ d_P \circ (\mathrm{pr}^0 \circ f^0) + h^0 \circ (g^0 \circ f^0) = f \circ d_P, \\
g \circ d_Q &= (g \circ f) \circ d_P \circ \mathrm{pr}^0 + (g \circ h^0) \circ g^0 = d_R \circ g^0
\end{aligned}
$$

が成立するので d_Q は可換性を崩さない．

また，上の図式に蛇の補題を適用すると 2 つの完全列

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ker}\, d_P \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_Q \xrightarrow{\overline{g^0}} \mathrm{Ker}\, d_R \\
&\xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, d_P \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_Q\, \mathrm{Coker}\, d_R
\end{aligned}
\tag{4.4.1}
$$

が得られるが，列の完全性から d_P, d_R が全射で $\mathrm{Coker}\, d_P = \mathrm{Coker}\, d_R = 0$ となるから，(4.4.1) から $\mathrm{Coker}\, d_Q = 0. \iff d_Q$ が全射であるとわかる．また，このとき $\overline{g^0}$ が全射になる．

一方，(**??**) と射影的分解の完全性より，次の図式を可換にする射 $h^{-1}\colon R^{-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_Q$ が存在する[*3]：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "d_P"] & Q^{-1} \arrow[r, "g^{-1}"] & R^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] \arrow[dl, dashed, "\exists h^{-1}"'] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, d_P \arrow[r, "\overline{f^0}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\, d_Q \arrow[r, "\overline{g^0}"] & \mathrm{Ker}\, d_R \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
& 0 & & 0 & & \\
& \text{(exact)} & & \text{(exact)} & &
\end{tikzcd}
$$

ここで $d'^{-1}_Q\colon Q^{-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_Q$ を $d'^{-1}_Q := \overline{f^0} \circ \mathrm{coim}\, d_P^{-1} \circ \mathrm{pr}^{-1} + h^{-1} \circ g^{-1}$ とおくと，$\overline{g^0} \circ \overline{f^0} = 0$ より

$$
\begin{aligned}
d'^{-1}_Q \circ f^{-1} &= \overline{f^0} \circ \mathrm{coim}\, d_P^{-1} \circ (\mathrm{pr}^{-1} \circ f^{-1}) + h^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = \overline{f^0} \circ \mathrm{coim}\, d_P^{-1}, \\
\overline{g^0} \circ d'^{-1}_Q &= (\overline{g^0} \circ \overline{f^0}) \circ \mathrm{coim}\, d_P^{-1} \circ \mathrm{pr}^{-1} + (\overline{g^0} \circ h^{-1}) \circ g^{-1} = \mathrm{coim}\, d_R^{-1} \circ g^{-1}
\end{aligned}
$$

[*3] P^{-1} が射影的かつ $\overline{g^0}$ が全射なので．

なので上の図式の可換性を崩さない．再び蛇の補題を適用すると ${d'}_Q^{-1}$ が全射であることが言える．すると $d_Q^{-1} \coloneqq \ker d_Q \circ {d'}_Q^{-1}$ とおくことで図式

$$Q^{-1} \xrightarrow{d_Q^{-1}} Q^0 \xrightarrow{d_Q} M \longrightarrow 0$$

は完全列になる．以上の議論を繰り返すことで，性質 (1), (2) を充たす可換図式 4.5 が構成される． ■

系 4.7:

- $\mathcal{A}$ における図式 4.6
- 射影的分解

$$(P^\bullet,\, d_P^\bullet) \xrightarrow{d_P} L \longrightarrow 0,$$
$$(R^\bullet,\, d_R^\bullet) \xrightarrow{d_R} N \longrightarrow 0$$

- $Q^{-n} \coloneqq P^{-n} \oplus R^{-n}, \quad Q'^{-n} \coloneqq P'^{-n} \oplus R'^{-n}$

を与える．このとき可換図式 4.7 が存在し，上 2 行と下 2 行はそれぞれ図式 4.6 の上の行と下の行から補題 4.6 の方法で構成したものになっている．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] & M \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

図 4.6

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (P^\bullet,\, d_P^\bullet) \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] \arrow[ddr, dashed, "\alpha^\bullet"] & (Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "d_Q"] \arrow[ddr, dashed, "\beta^\bullet"] & (R^\bullet,\, d_R^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] \arrow[ddr, dashed, "\gamma^\bullet"] & 0 & & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, dashed, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[ddr, dashed, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[ddr, dashed, "\gamma"] & 0 & & \text{(exact)} \\
& 0 \arrow[r] & (P'^\bullet,\, d_{P'}^\bullet) \arrow[r, "f'^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] & (Q'^\bullet,\, d_{Q'}^\bullet) \arrow[r, "g'^\bullet"] \arrow[d, "d'_Q"] & (R'^\bullet,\, d_{R'}^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_{R'}"] & 0 & \text{(exact)} \\
& 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

図 4.7

__証明__ [11, 命題 3.21] を参照 ■

ここまでの準備の下，命題 4.28 を示す．

証明 (1) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ の二つの射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A,\ (Q^\bullet,\, e^\bullet) \xrightarrow{e} A$ をとると，補題 4.5 より複体の射 $\varphi^\bullet \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet,\ \psi^\bullet \colon Q^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ であって $e \circ \varphi = d,\ d \circ \psi = e$ を充たすものが存在して

$$\psi \circ \varphi \simeq 1_{P^\bullet}, \quad \varphi \circ \psi \simeq 1_{Q^\bullet}$$

となる．加法的関手によってホモトピーは保存されるから

$$F(\psi) \circ F(\varphi) \simeq 1_{F(P^\bullet)}, \quad F(\varphi) \circ F(\psi) \simeq 1_{F(Q^\bullet)}$$

となり，

$$H^{-n}\big(F(\psi)\big) \circ H^{-n}\big(F(\varphi)\big) = 1_{H^{-n}(F(P^\bullet))}, \quad H^{-n}(F(\varphi)) \circ H^{-n}(F(\psi)) = 1_{H^{-n}(F(Q^\bullet))}$$

がわかる．i.e. $H^{-n}\big(F(P^\bullet)\big),\, H^{-n}\big(F(Q^\bullet)\big)$ は同型である．
$e \circ \varphi' = d$ を充たす別の複体の射 $\varphi' \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ があるとしても命題 4.5 より $\varphi \simeq \varphi'$ なので，$H^{-n}\big(F(P^\bullet)\big),\, H^{-n}\big(F(Q^\bullet)\big)$ の同型は φ の取り方に依らない．従って定義 4.18 の $L_nF(A) \coloneqq H^{-n}\big(F(P^\bullet)\big)$ の右辺は A の射影的分解の取り方に依らない．
次に射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,\, A')$ がある場合を考える．$A,\, A'$ の射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A,\ (P'^\bullet,\, d'^\bullet) \xrightarrow{d'} A'$ をとると命題 4.5 より複体の射 $\varphi \coloneqq P^\bullet \longrightarrow P'^\bullet$ で $d' \circ \varphi = f \circ d$ を充たすものがホモトピーを除いて一意に定まる．このとき

$$H^{-n}\big(F(\varphi)\big) \colon L_nF(A) \longrightarrow L_nF(A')$$

が射 φ の取り方に依らずに定まる．

$$\begin{gathered} L_nF(1_A) = 1_{L_nF(A)}, \\ L_nF(g \circ f) = L_nF(g) \circ L_nF(f) \end{gathered}$$

も言えるので L_nF は関手である．

(2) 補題 4.6 より可換図式

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & (P^\bullet,\, d_P^\bullet) & \xrightarrow{f^\bullet} & (Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) & \xrightarrow{g^\bullet} & (R^\bullet,\, d_R^\bullet) & \longrightarrow & 0 & & \text{(exact)} \\ & & \downarrow{\scriptstyle d_P} & & \downarrow{\scriptstyle d_Q} & & \downarrow{\scriptstyle d_R} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 & \xrightarrow{g} & A_3 & \longrightarrow & 0 & & \text{(exact)} \end{array}$$

で，$\forall n \geq 0$ に対して

$$0 \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{f^{-n}} Q^{-n} \xrightarrow{g^{-n}} R^{-n} \longrightarrow 0$$

が分裂完全列であり，全ての列が射影的分解となるようなものが存在する．加法的関手によって複体は保存されるので

$$0 \longrightarrow \big(F(P^\bullet),\, F(d_P^\bullet)\big) \longrightarrow \big(F(Q^\bullet),\, F(d_Q^\bullet)\big) \longrightarrow \big(F(R^\bullet),\, F(d_R^\bullet)\big) \longrightarrow 0$$

も完全列となるので，これのコホモロジー長完全列をとることで題意の長完全列を得る．
系 4.7 を使うと $\{L_nF\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が関手 $\mathbf{SES}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathcal{A})$ を定めることもわかる．

(3) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が射影的ならば $A \xrightarrow{1_A} A$ が A の射影的分解になるので $n \geq 1$ に対して $L_nF(A) = H^{-n}(A) = 0$.

(4) A の射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A \longrightarrow 0$ をとると

$$F(d) \circ F(d^{-1}) = F(d \circ d^{-1}) = F(0) = 0$$

となる[*4]ので $F(d)$ は射

$$\mathrm{Coker}\, F(d^{-1}) \longrightarrow F(A)$$

を誘導するが，$L_0F(A) = \mathrm{Coker}\, F(d^{-1})$ であり，これが自然変換 $\tau\colon L_0F \longrightarrow F$ を定める．

F が右完全関手ならば

$$F(P^{-1}) \xrightarrow{F(d^{-1})} F(P^0) \xrightarrow{F(d)} F(A) \longrightarrow 0$$

が完全なので命題 A.1-(2) より上述の射 $L_0F(A) \longrightarrow F(A)$ は同型となる．

(5) A の射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A \longrightarrow 0$ をとると F が完全関手ならば複体 $\left\{F(P^{-p}),\, F(d^{-p})\right\}_{p\geq 1}$ は完全になる．従って $n \geq 1$ に対して $L_nF(A) = H^{-n}(F(P^\bullet)) = 0$ となる．

■

4.4.2 左 Cartan-Eilenberg 分解

次の命題は Künneth スペクトル系列を示す際に使う：

命題 4.29: 左 Cartan-Eilenberg 分解

$\mathcal{A}$ における複体 $(C^\bullet,\, d^\bullet)$ を任意に与える．このとき，ある二重複体からの射

$$(P^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*}) \longrightarrow (C^\bullet,\, d^\bullet) \tag{4.4.2}$$

が存在して，

$$\begin{aligned} Z^{-n,\,-m} &:= \mathrm{Ker}\, d_1^{-n,\,-m}, \\ B^{-n,\,-m} &:= \mathrm{Im}\, d_1^{-n-1,\,-m}, \\ H^{-n,\,-m} &:= Z^{-n,\,-m}/B^{-n,\,-m} \end{aligned}$$

とおいたとき以下の条件を充たす：

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $(P^{-n,\,\bullet},\, d_2^{-n,\,\bullet})$ は射影的分解．

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，$d_2^{-n,\,-m}$ が引き起こす射による複体

$$\begin{aligned} &(Z^{-n,\,-\bullet},\; d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}), \\ &(B^{-n,\,-\bullet},\; d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}), \\ &(H^{-n,\,-\bullet},\; d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) \end{aligned}$$

[*4] 逆射ではない！

から定まる図式

$$
\begin{aligned}
(Z^{-n,\,-\bullet},\ d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}) &\longrightarrow \operatorname{Ker} d^{-n},\\
(B^{-n,\,-\bullet},\ d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}) &\longrightarrow \operatorname{Im} d^{-n-1},\\
(H^{-n,\,-\bullet},\ d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) &\longrightarrow H^{-n}(C^\bullet)
\end{aligned}
$$

が全て射影的分解.

(3) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
\begin{aligned}
C^{-n} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad P^{-n,\,\bullet} = 0,\\
H^{-n}(C^\bullet) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad H^{-n,\,\bullet} = 0.
\end{aligned}
$$

証明 命題 4.5 より，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して射影的分解

$$
(B^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}) \longrightarrow \operatorname{Im} d^{-n-1}, \tag{4.4.3}
$$

$$
(H^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) \longrightarrow H^{-n}(C^\bullet) \tag{4.4.4}
$$

をとることができる[*5]．これらと完全列

$$
0 \longrightarrow \operatorname{Im} d^{-n-1} \xrightarrow{i^{-n}} \operatorname{Ker} d^{-n} \xrightarrow{\operatorname{coker} i^{-n}} H^{-n}(C^\bullet) \longrightarrow 0
$$

に対して補題 4.6 を適用すると，$Z^{-n,\,\bullet} := B^{-n,\,\bullet} \oplus H^{-n,\,\bullet}$ とした可換図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (B^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r, "i^{-n,\,\bullet}"] \arrow[d] & (Z^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r, "p^{-n,\,\bullet}"] \arrow[d] & (H^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)}\\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d^{-n-1} \arrow[r, "i^{-n}"] & \operatorname{Ker} d^{-n} \arrow[r, "\operatorname{coker} i^{-n}"] & H^{-n}(C^\bullet) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

で，真ん中の列が射影的分解となるようなものが存在する．

一方，命題 A.1-(3) より完全列

$$
0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d^{-n} \xrightarrow{\ker d^{-n}} C^{-n} \xrightarrow{\operatorname{coim} d^{-n}} \operatorname{Im} d^{-n} \longrightarrow 0
$$

があるので，これと (4.4.3), (4.4.4) に補題 4.6 を適用すると，$Q^{-n,\,\bullet} := Z^{-n,\,\bullet} \oplus B^{-n+1,\,\bullet}$ とした可換図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (Z^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r, "\iota^{-n,\,\bullet}"] \arrow[d] & (Q^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,Q}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r, "\pi^{-n,\,\bullet}"] \arrow[d] & (B^{-n+1,\,\bullet},\ d_{2,\,B}^{-n+1,\,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)}\\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d^{-n} \arrow[r, "\ker d^{-n}"] & C^{-n} \arrow[r, "\operatorname{coim} d^{-n}"] & \operatorname{Im} d^{-n} \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

で真ん中の列が射影的分解となるようなものが存在する．ここで

$$
d_{1,\,Q}^{-n,\,-m} := \iota^{-n+1,\,-m} \circ i^{-n+1,\,-m} \circ \pi^{-n,\,-m}
$$

[*5] この時点ではこのような記号でおいただけである．

とおくと，上の図式の行の完全性より

$$\begin{aligned}d_{1,\,Q}^{-n+1,\,-m}\circ d_{1,\,Q}^{-n,\,-m}&=(\iota^{-n+2,\,-m}\circ i^{-n+2,\,-m}\circ\pi^{-n+1,\,-m})\circ(\iota^{-n+1,\,-m}\circ i^{-n+1,\,-m}\circ\pi^{-n,\,-m})\\&=\iota^{-n+2,\,-m}\circ i^{-n+2,\,-m}\circ(\pi^{-n+1,\,-m}\circ\iota^{-n+1,\,-m})\circ i^{-n+1,\,-m}\circ\pi^{-n,\,-m}\\&=0\end{aligned}\tag{4.4.5}$$

が，射影的分解の完全性から

$$d_{2,\,Q}^{-n,\,-m+1}\circ d_{2,\,Q}^{-n,\,-m+1}=0\tag{4.4.6}$$

が，上の 2 つの図式の可換性から

$$\begin{aligned}d_{2,\,Q}^{-n+1,\,-m}\circ d_{1,\,Q}^{-n,\,-m}&=(d_{2,\,Q}^{-n+1,\,-m}\circ\iota^{-n+1,\,-m})\circ i^{-n+1,\,-m}\circ\pi^{-n,\,-m}\\&=\iota^{-n+1,\,-m+1}\circ(d_{2,\,Z}^{-n+1,\,-m}\circ i^{-n+1,\,-m})\circ\pi^{-n,\,-m}\\&=\iota^{-n+1,\,-m+1}\circ i^{-n+1,\,-m+1}\circ(d_{2,\,B}^{-n+1,\,-m}\circ\pi^{-n,\,-m})\\&=(\iota^{-n+1,\,-m+1}\circ i^{-n+1,\,-m+1}\circ\pi^{-n,\,-m+1})\circ d_{2,\,Q}^{-n,\,-m}\\&=d_{1,\,Q}^{-n,\,-m+1}\circ d_{2,\,Q}^{-n,\,-m}\end{aligned}\tag{4.4.7}$$

が従う．i.e. (4.4.5), (4.4.6), (4.4.7) より

$$(P^{\bullet,\,*},\,d_1^{\bullet,\,*},\,d_2^{\bullet,\,*})\coloneqq(Q^{\bullet,\,*},\,d_{1,\,Q}^{\bullet,\,*},\,(-1)^{\bullet}d_{2,\,Q}^{\bullet,\,*})$$

は $m>0$ を見ると二重複体になり[*6]，$m=0$ の部分から射 (4.4.2) が得られる．構成よりこの射は条件 (1), (2), (3) を充たす． ■

4.4.3 右導来関手

$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ に対して同様の議論をすれば右導来関手が得られる．ここでは結果だけ述べよう．

$\mathcal{A}$ を十分単射的対象を持つアーベル圏，$\mathcal{B}$ をアーベル圏とする．

定義 4.19:

$F\colon\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ をとする．このとき $\forall A\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して $R^nF(A)\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を次のように対応づける：

A の単射的分解 $A\longrightarrow(I^{\bullet},\,d^{\bullet})$ をとり，

$$R^nF(A)\coloneqq H^n\bigl(F(I^{\bullet})\bigr)$$

とする．

命題 4.30: 右導来関手の定義と基本性質

(1) 定義 4.19 の $R_nF(A)$ は射影的分解の取り方によらない．また，射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,\,A')$ に対して自然に $R^nF(f)\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\bigl(R^nF(A),\,R^nF(A')\bigr)$ が定まり，この対応によって L_nF は関手

[*6] 符号については二重複体の定義の直下の注を参照．

$L_nF\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ になる．これを**右導来関手** (right derived functor) と呼ぶ．

(2) $\mathcal{A}$ における短完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$ に対して，自然に長完全列

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\delta^{n-1}} R^nF(A_1) \xrightarrow{R^nF(f)} R^nF(A_2) \xrightarrow{R^nF(g)} R^nF(A_3) \\ &\xrightarrow{\delta^n} R^{n+1}F(A_1) \xrightarrow{R^{n+1}F(f)} R^{n+1}F(A_2) \xrightarrow{R^{n+1}F(g)} R^{n+1}F(A_3) \\ &\xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots \end{aligned}$$

が誘導される．この対応により関手の族 $\{R^nF\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathcal{B})$$

を定める．

(3) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が単射的ならば $R^{n\geq 1}F(A) = 0$

(4) 自然変換 $\tau\colon F \longrightarrow R^0F$ があり，F が右完全ならばこれは自然同値である．

(5) F が完全ならば $R^{n\geq 1}F(A) = 0,\ \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

4.5 スペクトル系列

同型 (4.3.4), (4.3.5) を示すためにスペクトル系列を考察する．また，Künneth スペクトル系列を構成することで普遍係数定理を証明する．

(2023/5/11) この節は未完である．

4.5.1 filtration とスペクトル系列の定義

この節では $\mathcal{A}$ をアーベル圏とするが，Mitchell の埋め込み定理を用いて $\mathcal{A} = R$-**Mod** の場合のみを考えることも多い．まずアーベル圏における filtration の概念を導入する．

定義 4.20: フィルター付け

(1) $\forall E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を 1 つとる．E の**フィルター付け** (filtration) とは，

- $\mathcal{A}$ の対象の族 $\left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}}$
- 単射の族 $\left(i^p\colon F^{p+1}E \longrightarrow F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}}$
- 単射の族 $\left(\iota^p\colon F^pE \longrightarrow E\right)_{p\in\mathbb{Z}}$

の 3 つ組であって，

$$\iota^p \circ i^p = \iota^{p+1}$$

を充たすもののことを言う．

(2) 4 つ組み

$$\left(E,\ \left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}},\ \left(i^p\colon F^{p+1}E \longrightarrow F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}},\ \left(\iota^p\colon F^pE \longrightarrow E\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$$

のことをアーベル圏 $\mathcal{A}$ における**フィルター付けされた対象** (filtered object) と呼ぶ．

(3) filtration が**有限** (finite) であるとは，ある $p_0,\ p_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して ι^{p_0} が同型，ι^{p_1} が零写像となること．このとき

$$F^pE = \begin{cases} E, & p \le p_0 \\ 0, & p \ge p_1 \end{cases}$$

となる．

filtration や filtered object のことをそれぞれ

$$\left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}}, \quad \left(E,\ \left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$$

と略記する．

定義 4.20 の単射 ι^p により F^pE は E の部分対象となる．特に $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ のとき，左 R 加群 E の filtration $\left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ とは，E の部分加群の列

$$\cdots \subset F^{p+1}E \subset F^pE \subset F^{p-1}E \subset \cdots$$

のことである．

複体の圏 $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ もアーベル圏なので，複体 $(E^\bullet,\ d^\bullet)$ の filtration$\left(F^pE^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ を考えることができる．$\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ のとき，それは

- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対する E^n の filtration

$$\cdots \subset F^{p+1}E^n \subset F^pE^n \subset F^{p-1}E^n \subset \cdots$$

  であって，
- $\forall n,\ p \in \mathbb{Z}$ に対して

$$d^n(F^pE^n) \subset F^pE^{n+1}$$

  が成り立つ

もののこと．

次に，スペクトル系列を定義する．この定義は [11, 定義 3.49] によるものであり，収束を比較的簡単に扱うことができる．

定義 4.21: スペクトル系列

アーベル圏 $\mathcal{A}$ における**スペクトル系列** (spectral sequence) とは，次の 5 つ組みのことを言う：

(1) $\mathcal{A}$ の対象の族 $\left(E_r^{p,\,q}\right)_{p,\,q,\,r\in\mathbb{Z},\,r\ge 1}$

(2) $\mathcal{A}$ の**有限に**フィルター付けされた対象の族 $\left(E^n,\ \left(F^pE^n\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$

(3) 射の族 $\left(d_r^{p,\,q}\colon E_r^{p,\,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}\right)_{p,\,q,\,r\in\mathbb{Z},\,r\ge 1}$

(4) 同型

$$\operatorname{Ker} d_r^{p,\,q} / \operatorname{Im} d_r^{p-r,\,q+r-1} \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,\,q}$$

(5) 同型

$$E_\infty^{p,\,q} \xrightarrow{\cong} F^p E^{p+q} / F^{p+1} E^{p+q}$$

ただし，(3) の射は以下の条件を充たす：

(SS1) $\forall p,\, q,\, r \in \mathbb{Z},\ r \geq 1$ に対して

$$d_r^{p,\,q} \circ d_r^{p-r,\,q+r-1} = 0.$$

(SS2) $\forall p,\, q \in \mathbb{Z}$ に対してある $r_0 \geq 1$ が存在し，

$$r \geq r_0 \quad \Longrightarrow \quad d_r^{p,\,q} = d_r^{p-r,\,q+r-1} = 0.$$

また，$E_\infty^{p,\,q}$ は次のように決める：

- 条件 **(SS1)** により射 $\operatorname{im} d_r^{p-r,\,q+r-1}$ は自然に単射

  $$\operatorname{Im} d_r^{p-r,\,q+r-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_r^{p,\,q}$$

  を誘導する．条件 **(SS2)** を充たす $\forall r \geq r_0$ において，この単射は零写像

  $$0 \longrightarrow E_r^{p,\,q} \quad (\forall p,\, q \in \mathbb{Z})$$

  となる．
- (4) の同型は，条件 **(SS2)** を充たす $\forall r \geq r_0$ に対しては

  $$\operatorname{Ker} d_r^{p,\,q} = E_r^{p,\,q} \cong E_{r+1}^{p,\,q}$$

  になる．このとき

  $$E_\infty^{p,\,q} := E_{r_0}^{p,\,q} = E_{r_0+1}^{p,\,q} = \cdots$$

  と定義する．

定義 4.21 を，ある $r \geq 1$ を固定して

$$\boldsymbol{E_r^{p,\,q} \Longrightarrow E^{p+q}}$$

と略記することがある．

- $E_r^{p,\,q}$ をスペクトル系列の $\boldsymbol{E_r}$ **項**
- $E_\infty^{p,\,q}$ をスペクトル系列の $\boldsymbol{E_\infty}$ **項**
- E^n のことをスペクトル系列の **極限**

と言う．また，$r \geq 1$ が条件

$$\forall p,\, q \in \mathbb{Z},\, \forall s \geq r,\ d_s^{p,\,q} = 0$$

を充たすとき，スペクトル系列は $\boldsymbol{E_r}$ **退化**すると言う．

4.5.2　完全対によるスペクトル系列の構成

2 重複体は filtration を持つので，スペクトル系列が定まる．このような状況を一般化すると有界な次数 1 の二重次数付き完全対の概念に到達する．

まず，完全対と導来対を定義する：

定義 4.22: 完全対

アーベル圏 $\mathcal{A}$ を考える．

- $D,\, E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$
- $i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D,\, D)$
- $j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D,\, E)$
- $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E,\, D)$

の 5 つ組み $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ が **完全対** (exact couple) であるとは，

$$\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, j, \quad \mathrm{Im}\, j = \mathrm{Ker}\, k, \quad \mathrm{Im}\, k = \mathrm{Ker}\, i$$

を充たすことを言う（可換図式 4.8)．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

図 4.8: 完全対

Mitchell の埋め込み定理によりアーベル圏 $\mathcal{A} = R$-$\mathbf{Mod}$ として考える．

命題 4.31: 導来対

$(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ を $\mathcal{A}$ における完全対とする．このとき

$$
\begin{aligned}
D' &:= \operatorname{Im} i, \\
E' &:= \operatorname{Coker}\bigl(\operatorname{Im}(j \circ k) \longrightarrow \operatorname{Ker}(j \circ k)\bigr), \\
i' &:= i|_{D'} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(D',\, D')
\end{aligned}
$$

とおく[a]．すると射

$$
\begin{aligned}
&j' \colon D' \longrightarrow E',\ a \longmapsto j(b) + \operatorname{Im}(j \circ k) \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ \ b \in i^{-1}(\{a\}) \\
&k' \colon E' \longrightarrow D',\ a + \operatorname{Im}(j \circ k) \longmapsto k(a)
\end{aligned}
$$

は well-defined で，5 つ組み $(D',\, E',\, i',\, j',\, k')$ は完全対である．

[a] $k \circ j = 0$ なので，自然に単射 $\operatorname{Im}(j \circ k) \longrightarrow \operatorname{Ker}(j \circ k)$ が誘導される．

<u>証明</u> $\mathcal{A} = R$-$\mathbf{Mod}$ として示せばよい．$\operatorname{Im} i' = \operatorname{Im} i^2$ に注意する．

well-definedness

別の $b' \in i^{-1}(\{a\})$ を任意にとると

$$
i(b' - b) = i(b') - i(b) = a - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b' - b \in \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k
$$

が成り立つので $j(b') \in j(b) + \operatorname{Im}(j \circ k)$，i.e. j' は well-defined.

一方，別の $a' \in a + \operatorname{Im}(j \circ k)$ はある $c \in E$ を用いて $a' = a + j\bigl(k(c)\bigr)$ と書けるので，$\operatorname{Im} j = \operatorname{Ker} k$ より

$$
k(a') = k(a) + k\bigl(j(k(c))\bigr) = k(a)
$$

がいえる．i.e. k' は well-defined.

完全対であること

$\operatorname{Im} i' = \operatorname{Ker} j'$

$\forall x \in \operatorname{Im} i'$ は，ある $y \in D$ を用いて $x = i\bigl(i(y)\bigr)$ と書けるので

$$
j'(x) = j\bigl(i(i(y))\bigr) + \operatorname{Im}(j \circ k) = \operatorname{Im}(j \circ k) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \operatorname{Ker} j'
$$

i.e. $\operatorname{Im} i' \subset \operatorname{Ker} j'$ が言えた．

$\forall x \in \operatorname{Ker} j'$ をとると $y \in D$ を用いて $x = i(y)$ と書ける．このとき $j'(x) = \operatorname{Im}(j \circ k)$．i.e. $j(y) \in \operatorname{Im}(j \circ k)$ が成り立つ．故にある $z \in E$ が存在して $j(y) = j\bigl(k(z)\bigr)$ と書ける．このとき $y - k(z) \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$ なので

$$
x = i(y) - i\bigl(k(z)\bigr) = i\bigl(y - k(z)\bigr) \in \operatorname{Im} i^2 = \operatorname{Im} i'
$$

i.e. $\operatorname{Ker} j' \subset \operatorname{Im} i'$ もわかった．

$\operatorname{Im} j' = \operatorname{Ker} k'$

$\forall j'(x) \in \operatorname{Im} j'$ は，$y \in i^{-1}(\{x\})$ を用いて $j'(x) = j(y) + \operatorname{Im}(j \circ k)$ と書かれる．このとき

$$
k'\bigl(j'(x)\bigr) = k\bigl(j(y)\bigr) = 0
$$

なので $j'(x) \in \mathrm{Ker}\, k'$．i.e. $\mathrm{Im}\, j' \subset \mathrm{Ker}\, k'$ が示された．

一方，$\forall x + \mathrm{Im}(j \circ k) \in \mathrm{Ker}\, k'$ $^{\mathrm{w}/}$ $x \in \mathrm{Ker}(j \circ k)$ に対して $k(x) = 0 \iff x \in \mathrm{Ker}\, k = \mathrm{Im}\, j$ が成り立つ．故にある $y \in D$ を用いて $x = j(y)$ と書かれるので

$$x + \mathrm{Im}(j \circ k) = j(y) + \mathrm{Im}(j \circ k) = j'\big(i(y)\big).$$

i.e. $\mathrm{Ker}\, k' \subset \mathrm{Im}\, j'$ が言えた．

$\mathrm{Im}\, k' = \mathrm{Ker}\, i'$

$\forall x \in \mathrm{Im}\, k'$ はある $y \in \mathrm{Ker}(j \circ k)$ を用いて $x = k'(y + \mathrm{Im}(j \circ k)) = k(y)$ と書ける．従って $i'(x) = i\big(k(y)\big) = 0$．i.e. $\mathrm{Im}\, k' \subset \mathrm{Ker}\, i'$．

一方，$\forall x \in \mathrm{Ker}\, i'$ はある $y \in D$ を用いて $x = i(y)$ と書けて，さらに $i(y) \in \mathrm{Ker}\, i = \mathrm{Im}\, k$ なのである $z \in E$ を用いて $x = i(y) = k(z)$ と書ける．このとき $j\big(k(z)\big) = j\big(i(y)\big) = 0 \iff z \in \mathrm{Ker}(j \circ k)$ なので $x = k'(z + \mathrm{Im}(j \circ k)) \in \mathrm{Im}\, k'$．i.e. $\mathrm{Ker}\, i' \subset \mathrm{Im}\, k'$ が言えた．

■

定義 4.23: 導来対

- 命題 4.31 の 5 つ組み $(D',\, E',\, i',\, j',\, k')$ は完全対 $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ の**導来対** (derived couple) と呼ばれる．
- $r \geq 1$ に対して，完全対 $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ から導来対を作る操作を $r - 1$ 回繰り返してできる完全対を $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ の**第 r 導来対**と呼ぶ．

完全対 $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ の第 r 導来対を直接定めることもできる．$r \geq 1$ を 1 つとって固定する．

$$D_r := \mathrm{Im}\, i^{r-1}$$

とおき，ファイバー積を使って

$$Z_r := \prod_{D,\ A \in \{\mathrm{Im}\, i^{r-1},\ E\}} A,$$

$$B_r := \mathrm{Im}\big(\mathrm{Ker}\, i^{r-1} \xrightarrow{\ker i^{r-1}} D \xrightarrow{j} E\big)$$

と定める．

$$\begin{tikzcd}
\forall X \arrow[r, "g_1"] \arrow[dd, dashed, "\exists ! g"'] \arrow[ddr] & \mathrm{Im}\, i^{r-1} \arrow[dr, "\mathrm{im}\, i^{r-1}"] & \\
& & D \\
Z_r \arrow[uur, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] & E \arrow[ur, "k"] &
\end{tikzcd}$$

図 4.9: ファイバー積による Z_r の定義

補題 4.7:

$\mathcal{A} = R$-**Mod** のとき，

$$Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}), \quad B_r = j(\operatorname{Ker} i^{r-1})$$

<u>**証明**</u> $B_r = j(\operatorname{Ker} i^{r-1})$ は $\ker i^{r-1}$ が包含写像であることから明らか．

図式 4.10 において $Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$, $p_1 = k$ とし，p_2 は包含写像 $\iota\colon k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}) \hookrightarrow E$ とする．すると $\forall x \in k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$ に対して $k(x) \in \operatorname{Im} i^{r-1}$ だから $k(x) = \operatorname{im} i^{r-1}\bigl(k(x)\bigr)$ であり

$$k\bigl(p_2(x)\bigr) = k(x) = \operatorname{im} i^{r-1}\bigl(p_1(x)\bigr)$$

が成り立つ．

次に，$\forall X \in R$-**Mod** および集合

$$\bigl\{\, (g_1,\, g_2) \in \operatorname{Hom}_R(X,\, \operatorname{Im} i^{r-1}) \times \operatorname{Hom}_R(X,\, E) \bigm| \operatorname{im} i^{r-1} \circ g_1 = k \circ g_2 \,\bigr\}$$

の任意の元 $(g_1,\, g_2)$ をとる．このとき $\operatorname{im} i^{r-1}$ は包含写像なので $g_1 = k \circ g_2$ であり，$\operatorname{Im} g_2 \subset k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$ とわかる．故に $g_2 = \iota \circ g_2$．ここで $p_i \circ g_2 = p_i \circ g' \quad (i = 1,\, 2)$ を充たす別の $g' \in \operatorname{Hom}_R\bigl(X,\, k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})\bigr)$ をとると，$p_2 = \iota$ が単射であることから $g_2 = g'$．以上の考察から写像

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R\bigl(X,\, k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})\bigr) &\longrightarrow \bigl\{\, (g_1,\, g_2) \in \operatorname{Hom}_R(X,\, \operatorname{Im} i^{r-1}) \times \operatorname{Hom}_R(X,\, E) \bigm| \operatorname{im} i^{r-1} \circ g_1 = k \circ g_2 \,\bigr\} \\ g &\longmapsto \bigl(p_i \circ g\bigr)_{i=1,\,2} = \bigl(k \circ g,\ \iota \circ g\bigr) \end{aligned}$$

が全単射であることがわかった．i.e. $k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}) = \prod_{D,\, A \in \{\operatorname{Im} i^{r-1},\, E\}} A$ である．

■

このとき合成射

$$B_r \xrightarrow{\operatorname{im}(j \circ \ker i^{r-1})} E \xrightarrow{k} D$$

は零写像となる[*7]ので，B_r が自然に Z_r の部分対象になる．

<u>**証明**</u> Mitchell の埋め込み定理によって $\mathcal{A} = R$-**Mod** の場合に確認すればよい．このとき

$$Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}), \quad B_r = j(\operatorname{Ker} i^{r-1})$$

であるから，$\forall x \in B_r$ をとってくると，ある $y \in \operatorname{Ker} i^{r-1}$ が存在して $x = j(y)$ と書ける．よって $k(x) = k\bigl(j(y)\bigr) = 0 \in \operatorname{Im} i^{r-1}$ なので $x \in Z_r$ でもある．i.e. $B_r \subset Z_r$． ■

自然な単射 $B_r \longrightarrow Z_r$ に対して

$$E_r \coloneqq \operatorname{Coker}(B_r \longrightarrow Z_r)$$

と定める．

---

*7 まず完全対の定義から $k \circ j = 0$ なので $k \circ j \circ \ker i^{r-1} = 0$ が成り立つ．Abel 圏における任意の射は coim と im の合成で書けるので $k \circ \operatorname{im}(j \circ \ker i^{r-1}) \circ \operatorname{coim}(j \circ \ker i^{r-1}) = 0$ だが，coim は全射なので結局 $k \circ \operatorname{im}(j \circ \ker i^{r-1}) = 0$ が言えた．

命題 4.32: 第 r 導来対の同型

記号を上述の通りとし，さらに

$$i_r \coloneqq i|_{D_r} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(D_r,\, D_r)$$

とおく．すると射

$$\begin{aligned} j_r\colon D_r &\longrightarrow E_r,\ a \longmapsto j(b) + B_r \qquad ^{\mathrm{w}/}\ b \in (i^{r-1})^{-1}(\{a\}) \\ k_r\colon E_r &\longrightarrow D_r,\ a + B_r \longmapsto k(a) \end{aligned}$$

は well-defined であり，5 つ組み $(D_r,\, E_r,\, i_r,\, j_r,\, k_r)$ は完全対 $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ の第 $\boldsymbol{r}$ 導来対と同型である．

証明 **well-definedness**

別の $b' \in (i^{r-1})^{-1}(\{a\})$ を任意にとると

$$i^{r-1}(b'-b) = i^{r-1}(b') - i^{r-1}(b) = a - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b' - b \in \operatorname{Ker} i^{r-1}$$

なので，$j(b') - j(b) \in j(\operatorname{Ker} i^{r-1}) = B_r$ が言える．i.e. j_r は well-defined.

一方，別の $a' \in Z_r$ であって $a' \in a + B_r$ を充たすものをとると $a' - a \in B_r$ より

$$k(a') - k(a) \in k(B_r) \subset \operatorname{Im}(k \circ j) = 0$$

なので k' も well-defined.

同型であること

$r \geq 2$ とし，$(D_{r-1},\, E_{r-1},\, i_{r-1},\, j_{r-1},\, k_{r-1})$ の導来対 $(D'_{r-1},\, E'_{r-1},\, i'_{r-1},\, j'_{r-1},\, k'_{r-1})$ が $(D_r,\, E_r,\, i_r,\, j_r,\, k_r)$ と同型であることを示す．また，Mitchell の埋め込み定理によって $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ の場合に示せばよい．まず定義から即座に

$$\begin{aligned} D_r &= D'_r = \operatorname{Im} i^{r-1}, \\ i_r &= i'_r = i|_{\operatorname{Im} i^{r-1}} \end{aligned}$$

が従う．

$\boldsymbol{E_r \cong E'_{r-1}}$

示すべきは

$$E_r = Z_r/B_r \cong \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})/\operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) = E'_{r-1} \tag{4.5.1}$$

である．そのために全射

$$g\colon Z_r \longrightarrow \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})/\operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$$

であって，$\operatorname{Ker} g = B_r$ を充たすものを構成する．

$$f\colon Z_r \longrightarrow E_{r-1},\ a \longmapsto a + B_{r-1}$$

と定める．$a \in Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$ なので，ある $b \in D$ があって $k(a) = i^{r-1}(b)$ を充たす．すると

$$(j_{r-1} \circ k_{r-1})\big(f(a)\big) = j_{r-1}\big(k(a)\big) = j\big(i(b)\big) + B_{r-1} = B_{r-1}.$$

i.e. $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ である．よって次のような射を定義できる：

$$\begin{aligned} g \colon Z_r &\longrightarrow \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) / \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}), \\ a &\longmapsto f(a) + \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) = (a + B_{r-1}) + \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) \end{aligned}$$

g は全射

$\forall a + B_{r-1} \in \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ を一つとる．$\operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) \subset E_{r-1} = Z_{r-1}/B_{r-1}$ なので $a \in Z_{r-1}$ であるから，ある $b \in D$ が存在して $k(a) = i^{r-2}(b)$ と書ける．また，$(j_{r-1} \circ k_{r-1})(a + B_{r-1}) = j\big(b\big) + B_{r-1} = B_{r-1}$ なので $j(b) \in B_{r-1} = j(\operatorname{Ker} i^{r-2})$ である．故にある $c \in \operatorname{Ker} i^{r-2}$ が存在して $j(b) = j(c)$ と書ける．すると

$$j(b - c) = j(b) - j(c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b - c \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$$

となるのである $d \in D$ が存在して $b - c = i(d)$ と書ける．すると

$$k(a) = i^{r-2}(b) = i^{r-2}(b) - i^{r-2}(c) = i^{r-2}(b - c) = i^{r-1}(d) \in \operatorname{Im} i^{r-1}$$

なので $a \in Z_r$ が言えた．i.e. g は全射である．

$\operatorname{Ker} g \subset B_r$

$\forall a \in \operatorname{Ker} g$ を一つとる．すると $a + B_{r-1} \in \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ だから，ある $b \in Z_{r-1}$ と $c \in D$ が存在して $k(b) = i^{r-2}(c)$ かつ $a - j(c) \in B_{r-1}$ を充たす．i.e. ある $d \in \operatorname{Ker} i^{r-2}$ が存在して $j(d) = a - j(c)$ を充たす．よって $a = j(c + d)$ と書けるが，

$$i^{r-1}(c + d) = i\big(i^{r-2}(c)\big) + i\big(i^{r-2}(d)\big) = i\big(k(b)\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a \in j(\operatorname{Ker} i^{r-1}) = B_r$$

とわかる．i.e. $\operatorname{Ker} g \subset B_r$ が言えた．

$\operatorname{Ker} g \supset B_r$

$\forall a \in B_r$ を一つとると，ある $b \in \operatorname{Ker} i^{r-1}$ を用いて $a = j(b)$ と書ける．$i^{r-2}(b) \in \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k$ だからある $c \in E$ があって $i^{r-2}(b) = k(c)$ と書けるが，このとき $c \in k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-2}) = Z_{r-1}$ である．よって

$$(j_{r-1} \circ k_{r-1})(c + B_{r-1}) = j_{r-1}\big(k(c)\big) = j_{r-1}\big(i^{r-2}(b)\big) = j(b) + B_{r-1} = a + B_{r-1}$$

i.e. $a + B_{r-1} \in \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ であり，$\operatorname{Ker} g \supset B_r$ が言えた．

このようにして構成された g に準同型定理を使うことで目的の同型 (4.5.1) が示された．

$j_r = j'_{r-1}$

g によって誘導される同型を

$$\begin{aligned} \psi \colon E_r &\xrightarrow{\cong} E'_{r-1}, \\ a + B_r &\longmapsto (a + B_{r-1}) + \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) \end{aligned}$$

とおくと $j'_{r-1} = \psi \circ j_r$ である．

$k_r = k'_{r-1}$

同様に $k'_{r-1} \circ \psi = k_r$ がわかる．

■

二重次数付き完全対を定義する：

定義 4.24: 二重次数付き完全対

$r_0 \geq 1$ とする．

- $\mathcal{A}$ の対象の族 $\left(D^{p,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}$, $\left(E^{p,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}$
- $\mathcal{A}$ の射の族

$$\left(i^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow D^{p-1,\,q+1}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}},$$
$$\left(j^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+r_0-1,\,q-r_0+1}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}},$$
$$\left(k^{p,\,q}\colon E^{p,\,q} \longrightarrow D^{p+1,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}$$

を与える．このとき，5 つ組み $\Big((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Big)$ が次数 r_0 の **二重次数付き完全対** (bigraded exact couple) であるとは，$\forall p,\,q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} i^{p,\,q} &= \operatorname{Ker} j^{p-1,\,q+1},\\ \operatorname{Im} j^{p,\,q} &= \operatorname{Ker} k^{p+r_0-1,\,q-r_0+1},\\ \operatorname{Im} k^{p,\,q} &= \operatorname{Ker} i^{p+1,\,q}\end{aligned}$$

が成り立つこと．

二重次数付き完全対が**有界**であるとは，

$$\begin{aligned}&\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists p_0,\,p_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad p_0 \geq p_1,\\ &p \geq p_0 \quad \Longrightarrow \quad D^{p,\,n-p} = 0,\\ &p \leq p_1 \quad \Longrightarrow \quad i^{p,\,n-p}\ \text{が同型}\end{aligned}$$

が成り立つこと．

補題 4.8:

$\mathcal{A}$ 上の二重次数付き完全対 $\Big((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Big)$ を与える．

(1) $\mathcal{A} = R$-$\mathbf{Mod}$ とすると

$$\left(\bigoplus_{p,\,q} D^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} E^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} j^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} k^{p,\,q}\right)$$

は完全対である．

(2) $\mathcal{A}$ における有向グラフ $(\mathbb{Z},\,\leq)$ 上の図式

$$\left(\left(D^{-p,\,n+p}\right)_{p\in\mathbb{Z}},\ \left(\iota_{p,\,p'}\colon D^{-p,\,n+p} \longrightarrow D^{-p',\,n+p'}\right)_{(p,\,p')\in\mathbb{Z}^2,\,p\leq p'}\right)$$

を次のように定める：

$$\iota_{p,\,p'} := i^{-(p'-1),\,n+(p'-1)} \circ \cdots \circ i^{-p,\,n+p}.$$

このとき，与えられた二重次数付き完全対が有界ならば，充分大きな $p_\infty \in \mathbb{Z}$ をとると

$$\varinjlim_{p\in\mathbb{Z}} D^{-p,\,n+p} = D^{-p_\infty,\,n+p_\infty}$$

が成り立つ．

---

(2) において $E^n := \varinjlim_{p\in\mathbb{Z}} D^{-p,\,n+p}$ とおき，標準的包含を $\iota^{p,\,q} \colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+q}$ と書いて

$$F^pE := \mathrm{Im}\big(\iota^{p,\,n-p} \colon D^{p,\,n-p} \longrightarrow E^n\big)$$

と定義すると，$\big(E^n,\, (F^pE^n)_{p\in\mathbb{Z}}\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ は filtrered object になる．

証明　(1) 明らか

(2)　二重次数付き完全対 $\Big((D^{p,\,q}),\, (E^{p,\,q}),\, (i^{p,\,q}),\, (j^{p,\,q}),\, (k^{p,\,q})\Big)$ の有界性から，ある $p_\infty \in \mathbb{Z}$ が存在して $\forall p \geq p_\infty$ に対して $\iota_{p_\infty,\,p}$ は同型となる．ここで $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ および集合

$$\left\{ \big(f_p\big)_{p\in\mathbb{Z}} \in \prod_{\pi\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p,\,n+p},\, X\right) \;\middle|\; \forall p,\, p' \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p \leq p',\quad f_{p'} \circ \iota_{p,\,p'} = f_p \right\}$$

の勝手な元 $\big(f_p\big)_{p\in\mathbb{Z}}$ をとる．すると $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f_p = f_{p_\infty} \circ \iota_{p,\,p_\infty}$$

が成り立つ．

$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p_\infty,\,n+p_\infty},\, X\right)$ であって，$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $g \circ \iota_{p,\,p_\infty} = f_p$ を充たすものをもう一つとる．ここで $g \neq f_{p_\infty}$ と仮定すると，$\forall p \geq p_\infty$ に対して

$$f_{p_\infty} \neq g = f_p \circ (\iota_{p,\,p_\infty})^{-1} = f_{p_\infty}$$

となり矛盾．従って $g = f_{p_\infty}$ がわかった．これは写像

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p_\infty,\,n+p_\infty},\, X\right) &\longrightarrow \left\{ \big(f_p\big)_{p\in\mathbb{Z}} \in \prod_{\pi\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p,\,n+p},\, X\right) \;\middle|\; \forall p,\, p' \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p \leq p',\quad f_{p'} \circ \iota_{p,\,p'} = f_p \right\}, \\ g &\longmapsto (g \circ \iota_{p,\,p_\infty})_{p\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

が全単射であることを意味する．i.e. $\varinjlim_{p\in\mathbb{Z}} D^{-p,\,n+p} = D^{-p_\infty,\,n+p_\infty}$ である．

■

二重次数付き完全対の導来対を考えることもできる：

命題 4.33: 二重次数付き完全対の導来対

次数 r_0 の二重次数付き完全対 $\bigl((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\bigr)$ を与える．

$$\begin{aligned} D'^{p,\,q} &:= \operatorname{Im} i^{p+1,\,q-1}, \\ Z'^{p,\,q} &:= \operatorname{Ker}(j^{p+1,\,q} \circ k^{p,\,q}), \\ B'^{p,\,q} &:= \operatorname{Im}(j^{p-r_0+1,\,q+r_0-1} \circ k^{p-r_0,\,q+r_0-1}) \end{aligned}$$

とおくと自然な単射 $B'^{p,\,q} \longrightarrow Z'^{p,\,q}$ がある．この単射を使って

$$E'^{p,\,q} := \operatorname{Coker}(B'^{p,\,q} \longrightarrow Z'^{p,\,q})$$

とおく．さらに

$$(D,\,E,\,i,\,j,\,k) := \Bigl(\bigoplus_{p,\,q} D^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} E^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} j^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} k^{p,\,q}\Bigr)$$

の導来対を $(D',\,E',\,i',\,j',\,k')$ とおいて

$$\begin{aligned} i'^{p,\,q} &:= i'|_{D'^{p,\,q}}, \\ j'^{p,\,q} &:= j'|_{D'^{p,\,q}}, \\ k'^{p,\,q} &:= k'|_{E'^{p,\,q}} \end{aligned}$$

と定めると well-defined である．このとき 5 つ組み

$$\bigl((D'^{p,\,q}),\,(E'^{p,\,q}),\,(i'^{p,\,q}),\,(j'^{p,\,q}),\,(k'^{p,\,q})\bigr)$$

は次数 r_0+1 の二重次数付き完全対である（**導来対**）．

次数 r_0 の二重次数付き完全対 $\bigl((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\bigr)$ から導来対を得る操作を $r-1$ 回繰り返してできる次数 r_0+r-1 の二重次数付き完全対を**第 r 導来対**と呼ぶ．

証明 まず二重次数付き完全対の定義から $k^{p,\,q} \circ j^{p-r_0+1,\,q+r_0-1} = 0$ が成り立つので $B'^{p,\,q}$ は $Z'^{p,\,q}$ の部分対象であり，自然な単射 $B'^{p,\,q} \longrightarrow Z'^{p,\,q}$ がある．

以下では Mitchell の埋め込み定理より $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ として考える．補題 4.8-(1) より $(D,\,E,\,i,\,j,\,k)$ は完全対である．$(D',\,E',\,i',\,j',\,k')$ をその導来対とすると，帰納極限同士が交換することから

$$\begin{aligned} D' &= \operatorname{Im}\Bigl(\bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q}\Bigr) = \bigoplus_{p,\,q} \operatorname{Im} i^{p,\,q} = \bigoplus_{p,\,q} D'^{p,\,q}, \\ E' &= \bigoplus_{p,\,q} E'^{p,\,q} \end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{aligned} i'(D'^{p,\,q}) &\subset D'^{p-1,\,q+1}, \\ j'(D'^{p,\,q}) &\subset E'^{p+r_0,\,q-r_0}, \\ k'(E'^{p,\,q}) &\subset D'^{p+1,\,q} \end{aligned}$$

が成り立つので

$$(D',\, E',\, i',\, j',\, k') = \left(\bigoplus_{p,\,q} D'^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} E'^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} i'^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} j'^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} k'^{p,\,q} \right)$$

である. ■

完全対の第 r 導来対の場合と同様にして，二重次数付き完全対 $\left((D^{p,\,q}),\, (E^{p,\,q}),\, (i^{p,\,q}),\, (j^{p,\,q}),\, (k^{p,\,q}) \right)$ の第 r 導来対を直接定めることもできる．簡単のため，二重次数付き完全対の次数は 1 とする.

まず記号として，射

$$i^{p,\,q} \colon D^{p,\,q} \longrightarrow D^{p-1,\,q+1}$$

を上手く $r-1$ 回合成した写像

$$i^{p+1,\,q-1} \circ i^{p+2,\,q-2} \circ \cdots \circ i^{p+(r-1),\,q-(r-1)} \colon D^{p+(r-1),\,q-(r-1)} \longrightarrow D^{p,\,q}$$

のことを $(i^{p,\,q})^{r-1}$ と略記する．そして

$$D_r^{p,\,q} := \mathrm{Im}\Big((i^{p,\,q})^{r-1} \colon D^{p+(r-1),\,q-(r-1)} \longrightarrow D^{p,\,q} \Big)$$

とおく.

次に $E_r^{p,\,q}$ であるが，完全対の第 r 導来対の場合と同様にファイバー積を使って

$$Z_r := \prod_{D^{p+1,\,q},\; A \in \{\mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1},\, E^{p,\,q}\}} A,$$

$$B_r := \mathrm{Im}\Big(\mathrm{Ker}(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1} \xrightarrow{\ker(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}} D^{p,\,q} \xrightarrow{j^{p,\,q}} E^{p,\,q} \Big)$$

と定める.

$$\begin{tikzcd}
\forall X \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, dashed, "\exists! g"'] \arrow[dr] & \mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1} \arrow[r, "\mathrm{im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}"] & D^{p+1,\,q} \\
Z_r^{p,\,q} \arrow[r, "p_2"'] \arrow[ur, "p_1"] & E^{p,\,q} \arrow[ur, "k^{p,\,q}"'] &
\end{tikzcd}$$

図 4.10: ファイバー積による $Z_r^{p,\,q}$ の定義

次の補題は補題 4.9 と同様に示される.

補題 4.9:

$\mathcal{A} = R$-**Mod** のとき,

$$Z_r^{p,\,q} = (k^{p,\,q})^{-1}\big(\mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}\big), \quad B_r^{p,\,q} = j^{p,\,q}\big(\mathrm{Ker}(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}\big)$$

もとの二重次数付き完全対の次数が 1 なので $\operatorname{Im} j^{p,\,q} = \operatorname{Ker} k^{p,\,q}$ が成り立つことから，合成射

$$B_r \xrightarrow{\operatorname{im}\left(j^{p,\,q}\circ\operatorname{ker}(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}\right)} E^{p,\,q} \xrightarrow{k^{p,\,q}} D^{p+1,\,q}$$

は零写像となり，B_r が自然に Z_r の部分対象になる．ここで，自然な単射 $B_r^{p,\,q} \longrightarrow Z_r^{p,\,q}$ に対して

$$E_r^{p,\,q} \coloneqq \operatorname{Coker}(B_r^{p,\,q} \longrightarrow Z_r^{p,\,q})$$

と定める．

射 $i_r^{p,\,q}$, $j_r^{p,\,q}$, $k_r^{p,\,q}$ は次のように定義する[*8]．まず

$$(D,\,E,\,i,\,j,\,k) \coloneqq \left(\bigoplus_{p,\,q} D^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} E^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} j^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} k^{p,\,q}\right)$$

とおくと，補題 4.8-(1) よりこれは完全対である．命題 4.32 を使うと，その第 r 導来対を直接構成できる[*9]：

$$\begin{aligned}
D_r &\coloneqq \bigoplus_{p,\,q} \operatorname{Im}(i^{p,\,q})^{r-1},\\
B_r &\coloneqq \bigoplus_{p,\,q} \operatorname{Im}\left(\operatorname{Ker}\left(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)}\right)^{r-1} \xrightarrow{\ker\left(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)}\right)^{r-1}} D^{p,\,q} \xrightarrow{j^{p,\,q}} E^{p,\,q}\right),\\
Z_r &\coloneqq \bigoplus_{p,\,q} (k^{p,\,q})^{-1}\left(\operatorname{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}\right),\\
E_r &\coloneqq \operatorname{Coker}(B_r \hookrightarrow Z_r) = Z_r/B_r,\\
i_r &\coloneqq i|_{D_r} \colon D_r \longrightarrow D_r,\\
j_r &\colon D_r \longrightarrow E_r,\ \longmapsto j(b) + B_r \quad {}^{\mathrm{w}/}\ \ b \in (i^{r-1})^{-1}(\{a\}), && (4.5.2)\\
k_r &\colon E_r \longrightarrow D_r,\ a + B_r \longmapsto k(a) \quad {}^{\mathrm{w}/}\ \ a \in Z_r && (4.5.3)
\end{aligned}$$

射 i_r, j_r, k_r は直和 $\bigoplus_{p,\,q}$ の形をしているので，第 p, q 成分を取り出して

$$\begin{aligned}
i_r^{p,\,q} &\coloneqq i_r|_{D_r^{p,\,q}},\\
j_r^{p,\,q} &\coloneqq j_r|_{D_r^{p,\,q}},\\
k_r^{p,\,q} &\coloneqq k_r|_{E_r^{p,\,q}},
\end{aligned}$$

とおく[*10]．このとき[*11]

$$(D_r,\,E_r,\,i_r,\,j_r,\,k_r) \coloneqq \left(\bigoplus_{p,\,q} D_r^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} E_r^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} i_r^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} j_r^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} k_r^{p,\,q}\right)$$

なので，$\left((D_r^{p,\,q}),\,(E_r^{p,\,q}),\,(i_r^{p,\,q}),\,(j_r^{p,\,q}),\,(k_r^{p,\,q})\right)$ が次数 r の[*12]二重次数付き完全対だとわかる．さらに命題 4.32 の同型を使うことで次の命題が成り立つことが言える：

[*8] 以降では $\mathcal{A} = R$-**Mod** とする．

[*9] フィルタードな帰納極限（i.e. 直和）と有限な射影極限（i.e. Ker）が可換であることを暗に使っている

[*10] より厳密には，i_r の定義域の制限は第 $(p,\,q)$ 成分への標準的包含 $\iota_{p,\,q} \coloneqq D_r^{p,\,q} \hookrightarrow D_r$ を用いて $\iota_{p,\,q}(D_r^{p,\,q})$ とする．j_r, k_r の制限も同様．

[*11] E_r に関しては，射影極限（i.e. 直和）と射影極限（i.e. Coker）が交換することを用いている．

[*12] 素材となる $\left((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\right)$ の次数は 1 としていたのだった．

命題 4.34: 二重次数付き完全対の第 r 導来対の表示

記号を上述の通りとする．このとき，$\Bigl((D_r^{p,\,q}),\,(E_r^{p,\,q}),\,(i_r^{p,\,q}),\,(j_r^{p,\,q}),\,(k_r^{p,\,q})\Bigr)$ は $\Bigl((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Bigr)$ の第 r 導来対と同型である．

次の定理は，有界な次数 1 の二重次数付き完全対が与えられると自然にスペクトル系列が構成されることを主張する：

定理 4.8: スペクトル系列の構成

次数 1 の 有界な 二重次数付き完全対 $\Bigl((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Bigr)$ を与え，これの第 r 導来対を $\Bigl((D_r^{p,\,q}),\,(E_r^{p,\,q}),\,(i_r^{p,\,q}),\,(j_r^{p,\,q}),\,(k_r^{p,\,q})\Bigr)$ とおく．

$$d_r^{p,\,q} := j_r^{p+1,\,q}\circ k_r^{p,\,q} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(E_r^{p,\,q},\, E_r^{p+r,\,q-r+1}\right)$$

と定め，filtered object を補題 4.8-(2) の通りに定める．このとき，

(1) 対象の族 $(E_r^{p,\,q})$
(2) **有限に**フィルター付けされた対象の族 $\Bigl(E^n,\,\bigl(F^pE\bigr)_{p\in\mathbb{Z}}\Bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$
(3) 射の族 $\bigl(d_r^{p,\,q}\colon E_r^{p,\,q}\longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}\bigr)_{p,\,q,\,r\in\mathbb{Z},\,r\geq 1}$

はスペクトル系列

$$E_1^{p,\,q} \quad\Longrightarrow\quad E^{p+q}$$

を自然に定める．

<u>証明</u> スペクトル系列の定義の条件と同型 (4), (5) を確認すればよい．$\mathcal{A} = R$-**Mod** として考える．

(SS1)

定義 (4.5.3) より，$\forall a + B_r^{p,\,q} \in E_r^{p,\,q}$ に対して

$$k_r^{p,\,q}(a + B_r^{p,\,q}) = k^{p,\,q}(a) \in \mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}$$

が成り立つ．故に定義 (4.5.2) より，$b \in (i^{p+1,\,q})^{-1}(\{k^{p,\,q}(a)\}) \subset D^{p+r,\,q-r+1}$ を任意にとると

$$\begin{aligned} d_r^{p,\,q}(a + B_r^{p,\,q}) &= (j_r^{p+1,\,q}\circ k_r^{p,\,q})(a + B_r^{p,\,q}) = j_r\bigl(k^{p,\,q}(a)\bigr) \\ &= j^{p+r,\,q-r+1}(b) + B_r^{p+r,\,q-r+1} \in E^{p+r,\,q-r+1} \end{aligned}$$

となる．これと $\mathrm{Im}\, j^{p+r,\,q-r+1} = \mathrm{Ker}\, k^{p+r,\,q-r+1}$ より，

$$\begin{aligned} (d_r^{p+r,\,q-r+1}\circ d_r^{p,\,q})(a + B_r^{p,\,q}) &= (j_r^{p+r+1,\,q-r+1}\circ (k_r^{p+r,\,q-r+1}\circ j_r^{p+1,\,q})\circ k_r^{p,\,q})(a + B_r^{p,\,q}) \\ &= j_r^{p+r+1,\,q-r+1}\Bigl(k_r^{p+r,\,q-r+1}\bigl(j^{p+r,\,q-r+1}(b)\bigr)\Bigr) = 0 \end{aligned}$$

i.e. $d_r^{p+r,\,q-r+1}\circ d_r^{p,\,q} = 0$ が示された．

(SS2)

与えられた二重次数付き完全対 $\big((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\big)$ が有界であるという仮定より，$p \gg 0$ および $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$D^{p,\,n-p} = D^{p+1,\,n-p} = 0$$

が成り立つ．従って

$$E^{p,\,n-p} = \mathrm{Ker}(k^{p,\,n-p}\colon E^{p,\,n-p} \longrightarrow 0) = \mathrm{Im}(j^{p,\,n-p}\colon 0 \longrightarrow E^{p,\,n-p}) = 0.$$

である．また，$p \ll 0$ に対して $i^{p+1,\,n-p},\, i^{p+1,\,n-p-1}$ が同型，i.e. 単射かつ全射であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,k^{p,\,n-p} &= \mathrm{Ker}\,i^{p+1,\,n-p} = 0,\\ \mathrm{Ker}\,j^{p,\,n-p} &= \mathrm{Im}\,i^{p+1,\,n-p-1} = D^{p,\,n-p}\end{aligned}$$

が成り立つ．故に

$$E^{p,\,n-p} = \mathrm{Ker}\,k^{p,\,n-p} = \mathrm{Im}(j^{p,\,n-p\colon D^{p,\,n-p} \longrightarrow E^{p,\,n-p}}) = 0$$

が言えた．

以上の考察から，$r \gg 0$ および $\forall (p,\,q) \in \mathbb{Z}^2$ に対して $E^{p+r,\,q-r+1} = E^{p-r,\,q+r-1} = 0$ がわかり，従って $d_r^{p,\,q} = d_r^{p-r,\,q+r-1} = 0$ である．

同型 (4)

二重次数付き完全対の第 r 導来対（これは次数 r の二重次数付き完全対である）から第 $r+1$ 導来対を構成する操作の定義より

$$E_{r+1}^{p,\,q} = \frac{\mathrm{Ker}(j_r^{p+1} \circ k_r^{p,\,q})}{\mathrm{Im}(j_r^{p-r+1,\,q+r-1} \circ k^{p-r,\,q+r-1})} = \frac{\mathrm{Ker}\,d_r^{p,\,q}}{\mathrm{Im}\,d_r^{p-r,\,q+r-1}}$$

が言えるが，これがまさに所望の同型である．

同型 (5)

与えられた二重次数付き完全対 $\big((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\big)$ が有界であるという仮定より，$r \gg 0$ および $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $D^{p+r,\,q-r+1} = 0$ なので

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\big((i^{p+1,\,q})^{r-1}\colon 0 \longrightarrow D^{p+1,\,q}\big) = 0.\\ \therefore\quad &Z_r^{p,\,q} = (k^{p,\,q})^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Ker}\,k^{p,\,q}.\end{aligned}\tag{4.5.4}$$

また，補題 4.8 より $E^{p+q} = D^{p-r+1,\,q+r-1}$ なので

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ker}\big((i^{p-r+1,\,q+r-1})^{r-1}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+q}\big) = \mathrm{Ker}(\iota^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+q}).\\ \therefore\quad &B_r^{p,\,q} = j^{p,\,q}(\mathrm{Ker}\,\iota^{p,\,q}).\end{aligned}\tag{4.5.5}$$

(4.5.5), (4.5.4) より，十分大きな r および $\forall p,\, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$E_r^{p,\,n-p} = \frac{Z_r^{p,\,n-p}}{B_r^{p,\,n-p}} = \frac{\mathrm{Ker}\,k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\mathrm{Ker}\,\iota^{p,\,n-p})}$$

となることがわかった．従って示すべきは

$$E_r^{p,\,n-p} \cong \frac{F^pE^n}{F^{p+1}E^n} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\mathrm{Ker}\,k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\mathrm{Ker}\,\iota^{p,\,n-p})} \cong \frac{\mathrm{Im}\,\iota^{p,\,n-p}}{\mathrm{Im}\,\iota^{p+1,\,n-p-1}}$$

である．

　ここで合成射

$$
\begin{aligned}
f_1 \colon D^{p,\,n-p} &\xrightarrow{\iota^{p,\,n-p}} \operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p} \twoheadrightarrow \frac{\operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p}}{\operatorname{Im} \iota^{p+1,\,n-(p+1)}}, \\
f_2 \colon D^{p,\,n-p} &\xrightarrow{j^{p,\,n-p}} \operatorname{Im} j^{p,\,n-p} = \operatorname{Ker} k^{p,\,n-p} \twoheadrightarrow \frac{\operatorname{Ker} k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p})}
\end{aligned}
$$

を考えると，$f_1,\, f_2$ はどちらも全射で

$$
\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p} + \operatorname{Im} i^{p+1,\,n-p-1}
$$

が成り立つ．故に準同型定理から $f_1,\, f_2$ はそれぞれ同型

$$
\begin{aligned}
\overline{f_1} \colon \frac{D^{p,\,n-p}}{\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p} + \operatorname{Im} i^{p+1,\,n-p-1}} &\xrightarrow{\cong} \frac{\operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p}}{\operatorname{Im} \iota^{p+1,\,n-(p+1)}}, \\
\overline{f_2} \colon \frac{D^{p,\,n-p}}{\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p} + \operatorname{Im} i^{p+1,\,n-p-1}} &\xrightarrow{\cong} \frac{\operatorname{Ker} k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p})}
\end{aligned}
$$

を誘導する．このとき $\overline{f_1} \circ \overline{f_2}^{-1}$ が欲しかった同型となる．

■

　さらに，filtered な複体から自然にスペクトル系列が構成されることもわかる：

定理 4.9: フィルター付けされた複体によるスペクトル系列

$(K^\bullet,\, (F^p K^\bullet)_{p\in\mathbb{Z}})$ を，$\mathcal{A}$ における filtered な複体であって，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して K^n の**有限な** filtration が $(F^p K^n)_{p\in\mathbb{Z}}$ であるようなものとする．このとき，自然にスペクトル系列

$$
E_1^{p,\,q} = H^{p+q}(F^p K^\bullet / F^{p+1} K^\bullet) \quad \Longrightarrow \quad E^{p+q} = H^{p+q}(K^\bullet)
$$

が構成される．

証明

$$
\begin{aligned}
D^{p,\,q} &:= H^{p+q}(F^p K^\bullet), \\
E^{p,\,q} &:= H^{p+q}(F^p K^\bullet / F^{p+1} K^\bullet)
\end{aligned}
$$

とおくと，複体の完全列

$$
0 \longrightarrow F^{p+1} K^\bullet \longrightarrow F^p K^\bullet \longrightarrow F^p K^\bullet / F^{p+1} K^\bullet \longrightarrow 0
$$

がある．これのコホモロジー長完全列

$$
\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{k^{p,\,q-1}} D^{p+1,\,q-1} \xrightarrow{i^{p+1,\,q-1}} D^{p,\,q} \xrightarrow{j^{p,\,q}} E^{p,\,q} \\
&\xrightarrow{k^{p,\,q}} D^{p+1,\,q} \xrightarrow{i^{p+1,\,q}} D^{p,\,q+1} \xrightarrow{j^{p,\,q+1}} E^{p,\,q+1} \\
&\xrightarrow{k^{p,\,q+1}} \cdots
\end{aligned}
\tag{4.5.6}
$$

によって射の族

$$
\begin{aligned}
&\left(i^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow D^{p-1,\,q+1}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}},\\
&\left(j^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}},\\
&\left(k^{p,\,q}\colon E^{p,\,q} \longrightarrow D^{p+1,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

が定まる．図式 (4.5.6) の完全性から $\bigl((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\bigr)$ が次数 1 の 二重次数付き完全対であることがわかる．有界性は，filtration が有限であることから従う．よって定理 4.8 が使えて題意のスペクトル系列が構成される． ■

4.6 スペクトル系列の計算例

4.6.1 E_r 項が疎な場合

4.6.2 二重複体によるスペクトル系列

アーベル圏 $\mathcal{A}$ における二重複体 $(K^{\bullet,\,*},\,\delta_1^{\bullet,\,*},\,\delta_2^{\bullet,\,*})$ は，$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$
K^{a,\,b}\neq 0 \ \text{かつ}\ a+b=n
$$

を充たす $(a,\,b)\in\mathbb{Z}^2$ が有限個であると仮定する．

定理 4.10: 二重複体によるスペクトル系列

$\forall p\in\mathbb{Z}$ に対して $K^{\bullet,\,*}$ の部分対象 $F^pK^{\bullet,\,*}$ を

$$
F^pK^{a,\,b} := \begin{cases} K^{a,\,b}, & a\geq p\\ 0, & a<p\end{cases}
$$

と定義し，

$$
\begin{aligned}
K^{\bullet} &:= \mathrm{Tot}(K^{\bullet,\,*}),\\
F^pK^{\bullet} &:= \mathrm{Tot}(F^pK^{\bullet,\,*})
\end{aligned}
$$

とおく．このとき組 $\bigl(K^{\bullet},\,(F^pK^{\bullet})_{p\in\mathbb{Z}}\bigr)$ は filtered な複体で，$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して $\bigl(F^pK^n\bigr)_{p\in\mathbb{Z}}$ は K^n の**有限な** filtration になる．また，自然にスペクトル系列

$$
E_1^{p,\,q}=H^q(K^{p,\,\bullet}) \quad\Longrightarrow\quad E^{p+q}=H^{p+q}(K^{\bullet})
$$

が構成される．

証明 $\mathcal{A}=R\text{-}\mathbf{Mod}$ とする．$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して，構成より明らかに

$$
\cdots\subset F^{p+1}K^n\subset F^pK^n\subset F^{p-1}K^n\subset\cdots\subset K^n
$$

が成り立つ．さらに二重複体 $(K^{\bullet,*},\ \delta_1^{\bullet,*},\ \delta_2^{\bullet,*})$ の全複体の射 $d^n\colon K^n = \mathrm{Tot}(K^{\bullet,*})^n \longrightarrow K^{n+1} = \mathrm{Tot}(K^{\bullet,*})^{n+1}$ の定義より，$\forall p\in\mathbb{Z}$ を一つ固定したときに

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ d^n(F^pK^n)\subset F^pK^{n+1}$$

が成り立つ．i.e. $\left(K^\bullet,\ \left(F^pK^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$ は filtered な複体で，$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して $\left(F^pK^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ は K^n の**有限な** filtration になっている．

また，$\forall p\in\mathbb{Z}$ を一つ固定すると $\forall n\in\mathbb{Z},\ F^pK^n=\bigoplus_{a+b=n,\,a\geq p}K^{a,b},\quad F^{p+1}K^n=\bigoplus_{a+b=n,\,a\geq p+1}K^{a,b}$ だから $F^pK^n/F^{p+1}K^n=K^{p,n-p}$ である．従って $F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet=\left(K^{p,\bullet-p},\ \delta_2^{p,\bullet-p}\right)$ であることがわかるが，$H^{p+q}(K^{p,\bullet-p})=H^q(K^{p,\bullet})$ なので，定理 4.9 より題意が従う． ■

系 4.11:

$\forall p\in\mathbb{Z}$ に対して $K^{\bullet,*}$ の部分対象 $F^pK^{\bullet,*}$ を

$$F^pK^{a,b}:=\begin{cases}K^{a,b}, & b\geq p\\ 0, & b<p\end{cases}$$

と定義し，

$$K^\bullet:=\mathrm{Tot}(K^{\bullet,*}),$$
$$F^pK^\bullet:=\mathrm{Tot}(F^pK^{\bullet,*})$$

とおく．このとき組 $\left(K^\bullet,\ \left(F^pK^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$ は filtered な複体で，$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して $\left(F^pK^n\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ は K^n の**有限な** filtration になる．また，自然にスペクトル系列

$$E_1^{p,q}=H^q(K^{\bullet,p})\quad\Longrightarrow\quad E^{p+q}=H^{p+q}(K^\bullet)$$

が構成される．

証明 定理 4.10 と全く同様にして示せる． ■

定理 4.10 のスペクトル系列の E_2 項を計算しよう．E_1 項がわかっているのでスペクトル系列の定義の **同型 (4)** を使えば良い．スペクトル系列の定義の **(3) の射**は

$$d_1^{p,q}\colon E_1^{p,q}=H^q(K^{p,\bullet})\longrightarrow E_1^{p+1,q}=H^q(K^{p+1,\bullet})$$

となるが，系 4.11 の構成より

$$d_1^{p,q}=H^q(\delta_1^{p,\bullet})$$

がわかる．よって

$$E_2^{p,q}=\frac{\mathrm{Ker}\,d_1^{p,q}}{\mathrm{Im}\,d_1^{p-1,q}}=\frac{\mathrm{Ker}\,H^q(\delta_1^{p,\bullet})}{\mathrm{Im}\,H^q(\delta_1^{p-1,\bullet})}$$

と求まった．これは，複体

$${H^q}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,*}):=\cdots\xrightarrow{H^q(\delta_1^{p-1,\bullet})}H^q(K^{p,\bullet})\xrightarrow{H^q(\delta_1^{p,\bullet})}H^q(K^{p+1,\bullet})\xrightarrow{H^q(\delta_1^{p+1,\bullet})}\cdots$$

の p 次コホモロジーを $H^p{}_{\mathrm{I}}\big(H^q{}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,*})\big)$ と書いたときに

$$E_2^{p,q} = H^p{}_{\mathrm{I}}\big(H^q{}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,*})\big) \tag{4.6.1}$$

が成り立つことを意味する．

添字の役割を逆にすることで

$$E_2^{p,q} = H^p{}_{\mathrm{II}}\big(H^q{}_{\mathrm{I}}(K^{\bullet,*})\big) \tag{4.6.2}$$

もわかる．

系 4.12:

$A^\bullet$ をアーベル圏 $\mathcal{A}$ における複体，$K^{\bullet,*}$ を二重複体とする[a]．

(1) 次のどちらか一方を仮定する：

(a) 射 $f^\bullet\colon A^\bullet \longrightarrow K^{\bullet,*}$ であって，$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $f^p\colon A^p \longrightarrow K^{p,\bullet}$ がコホモロジーの同型

$$\left.\begin{matrix} A^p, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cong} H^n(K^{p,\bullet})$$

を誘導するようなものが存在する．

(b) 二重複体の射 $f^{\bullet,*}\colon K^{\bullet,*} \longrightarrow A^\bullet$ であって，$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $f^{p,\bullet}\colon K^{p,\bullet} \longrightarrow A^p$ がコホモロジーの同型

$$H^n(K^{p,\bullet}) \xrightarrow{\cong} \begin{cases} A^p, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

を誘導するようなものが存在する．

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H^n(A^\bullet) \cong H^n(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,*})$$

がある．

(2) 次のどちらか一方を仮定する：

(a) 射 $f^*\colon A^\bullet \longrightarrow K^{\bullet,*}$ であって，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して $f^q\colon A^q \longrightarrow K^{\bullet,q}$ がコホモロジーの同型

$$\left.\begin{matrix} A^q, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cong} H^n(K^{\bullet,q})$$

を誘導するようなものが存在する．

(b) 二重複体の射 $f^{\bullet,*}\colon K^{\bullet,*} \longrightarrow A^\bullet$ であって，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して $f^{\bullet,q}\colon K^{\bullet,q} \longrightarrow A^q$ がコホモロジーの同型

$$H^n(K^{\bullet,q}) \xrightarrow{\cong} \begin{cases} A^q, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

を誘導するようなものが存在する．

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H^n(A^\bullet) \cong H^n(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,*})$$

がある．

[a] $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，$K^{a,\,b} \neq 0$，$a+b=n$ を充たす $(a,\,b) \in \mathbb{Z}^2$ が有限個であると仮定する．

系 4.12 の条件を少し強めて，より見やすい形に直してみる．

(1)（a）(1)-(a) の条件に，さらに条件

$$b < 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{f^p} K^{p,\,0} \longrightarrow K^{p,\,1} \longrightarrow K^{p,\,2} \longrightarrow \cdots$$

が完全であることと同値である．

（b）(1)-(b) の条件に，さらに条件

$$b > 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$\cdots \longrightarrow K^{p,\,-2} \longrightarrow K^{p,\,-1} \longrightarrow K^{p,\,0} \xrightarrow{f^{p,\,0}} A^p \longrightarrow 0$$

が完全であることと同値である．

(2)（a）(2)-(a) の条件に，さらに条件

$$a < 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$0 \longrightarrow A^q \xrightarrow{f^q} K^{0,\,q} \longrightarrow K^{1,\,q} \longrightarrow K^{2,\,q} \longrightarrow \cdots$$

が完全であることと同値である．

（b）(2)-(b) の条件に，さらに条件

$$a > 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$\cdots \longrightarrow K^{-2,\,q} \longrightarrow K^{-1,\,q} \longrightarrow K^{0,\,q} \xrightarrow{f^{0,\,q}} A^q \longrightarrow 0$$

が完全であることと同値である．

<u>証明</u>　(1) 仮定より複体の同型

$$H^q{}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,\,*}) \cong \begin{cases} \cdots \longrightarrow A^{p-1} \longrightarrow A^p \longrightarrow A^{p+1} \longrightarrow \cdots, & q = 0 \\ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots, & q \neq 0 \end{cases}$$

が成り立つ．よって (4.6.1) から従うスペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = H^p{}_{\mathrm{I}}\bigl(H^q{}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,\,*})\bigr) \quad \Longrightarrow \quad H^{p+q}(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,\,*})$$

において

$$E_2^{p,\,q} = \begin{cases} H^q(A^\bullet), & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

となるので $H^n(A^\bullet) = E_2^{p,\,0} \cong E^n = H^n(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,\,*})$ となる．

(2) (4.6.2) から従うスペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = H^p{}_{\mathrm{II}}\bigl(H^q{}_{\mathrm{I}}(K^{\bullet,\,*})\bigr) \quad \Longrightarrow \quad H^{p+q}(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,\,*})$$

を用いて (1) と同様の議論をすれば証明できる．

■

(4.3.4) はまさに系 4.12 の条件を充たしており，同型 (4.3.4) が示されたことになる．

4.6.3 Künneth スペクトル系列と普遍係数定理

補題 4.10:

右 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ と左 R 加群の複体 $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Im}\, d_M^n,\, H^n(M^\bullet)$ が平坦加群であると仮定する．

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr)$$

が成り立つ．

証明 $Z^n := \mathrm{Ker}\, d_M^n,\ B^n := \mathrm{Im}\, d_M^{n-1}$ とおく．するとコホモロジーの定義により，$\forall j \in \mathbb{Z}$ に対して短完全列

$$0 \longrightarrow B^j \longrightarrow Z^j \longrightarrow H^j(M^\bullet) \longrightarrow 0 \tag{4.6.3}$$

がある．仮定より $H^j(M^\bullet)$ は平坦加群なので，(4.6.3) に命題 4.24-(2) を使うことができて，$\forall i,\, j \in \mathbb{Z}$ に対して短完全列

$$0 \longrightarrow H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \xrightarrow{\alpha_{i,\,j}} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \longrightarrow H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \longrightarrow 0$$

を得る．さらに，直和は完全列を保存するので $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して短完全列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \xrightarrow{\bigoplus_{i+j=n} \alpha_{i,\,j}} \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \longrightarrow 0$$

を得る．

次に，$(B^\bullet,\, 0)$, $(Z^\bullet,\, 0)$ を複体と見做すことで，標準的包含 $Z^n \hookrightarrow M^n$ および $d^n = d_M^n \colon M^n \longrightarrow B^{n+1}$ は自然に複体の射 $Z^\bullet \to M^\bullet,\ d^\bullet \colon M^\bullet,\, B^{\bullet+1}$ を定める．また，複体の短完全列

$$0 \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow M^\bullet \xrightarrow{d^\bullet} B^{\bullet+1} \longrightarrow 0 \tag{4.6.4}$$

がある．仮定より B^n は平坦加群なので，(4.6.4) に命題 4.24-(2) を使うことができて，二重複体の短完全列

$$0 \longrightarrow L^\bullet \otimes_R Z^* \longrightarrow L^\bullet \otimes_R M^* \xrightarrow{1_{L^\bullet}\otimes d^*} L^\bullet \otimes_R B^{*+1} \longrightarrow 0$$

を得る．全複体をとる操作は完全関手なので[13]短完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*) \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*) \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1}) \longrightarrow 0$$

があるが，これのコホモロジー長完全列を取ることで

$$\begin{aligned}
\cdot &\longrightarrow H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*)\big) \longrightarrow H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \longrightarrow H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1})\big)\\
&\xrightarrow{\beta} H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*)\big) \longrightarrow H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \longrightarrow H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1})\big)\\
&\longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

を得る．然るに複体 $B^\bullet$, $Z^\bullet$ を構成する準同型写像は零写像だから

$$\begin{aligned}
H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1})\big) &= \bigoplus_{i+j=n-1} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^{j+1}\\
&= \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^{j},\\
H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*)\big) &= \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^{j}
\end{aligned}$$

が成り立つ．このとき

$$\beta = \bigoplus_{i+j=n} (-1)^i \alpha_{ij} \colon \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j$$

とかけ，かつ β は $\forall n$ に対して単射である．よって，横の 2 つの写像が同型であるような次の可換図式がある：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \arrow[r, "\bigoplus_{i+j=n}(-1)^i"] \arrow[d, "\bigoplus_{i+j=n}\alpha_{ij}"] & \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \arrow[d, "\beta"] \\
\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \arrow[r, "1"] \arrow[d] & \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \arrow[d] \\
\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \arrow[d] & H^n\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

(exact) (exact)

[13] R-**Mod** においては単に直和である．

この可換図式から同型

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet)\otimes_R H^j(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R M^*)\bigr)$$

が誘導される（ホモロジー長完全列と 5 項補題による）． ■

定理 4.13: Künneth スペクトル系列

右 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ と左 R 加群の複体 $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．次の条件のいずれかが満たされているとする：

(1) $L^\bullet$ または $M^\bullet$ が平坦加群からなる複体であり，かつ $L^\bullet,\, M^\bullet$ の両方が上に有界である．

(2) $L^\bullet$ が平坦加群からなる複体であり，かつある $N\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ が存在して，$\forall M\in R$-**Mod** が $\forall n<-N,\ P^n=0$ を充たすような射影的分解 $P^\bullet\longrightarrow M$ を持つ．

(3) $M^\bullet$ が平坦加群からなる複体であり，かつある $N\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ が存在して，$\forall M\in$ **Mod**-R が $\forall n<-N,\ P^n=0$ を充たすような射影的分解 $P^\bullet\longrightarrow M$ を持つ．

このとき，スペクトル系列

$$E_2^{p,\,q}=\bigoplus_{i+j=n}\mathrm{Tor}_{-p}^R\bigl(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\bigr) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R M^*)\bigr)$$

が構成される．

R が単項イデアル整域のとき，$N=1$ として条件 (2), (3) の後半が充たされる（定理 4.5）．

<u>証明</u> 条件 (1), (2) において $L^\bullet$ が平坦加群からなる複体であるとして証明する．

複体 $M^\bullet$ の左 Cartan-Eilenberg 分解 $Q^{\bullet,\,*}\longrightarrow M^\bullet$ をとる．ただし条件 (2) の場合は $\forall n\in\mathbb{Z},\,\forall m<-N,\ Q^{n,\,m}=0$ を充たすようにとる．三重複体 $L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle}$ の 3 つ目の添字 n を固定したときにできる二重複体たちの全複体 $\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,n})$ は，n を動かすことで二重複体

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,n-1})\longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,n})\longrightarrow\cdots$$

になる[*14]．これを $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})$ と書き，その次数 $(a,\,b)$ の項を $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}:=\bigoplus_{i+j=a}L^i\otimes_R Q^{j,\,b}$ とおく．

仮定 (1) のとき $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}$ は $a\gg 0$ または $b>0$ のとき 0

仮定 (2) のとき $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}$ は $b<-N$ または $b>0$ のとき 0

だから，$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}\neq 0,\ a+b=n$ を充たす $(a,\,b)\in\mathbb{Z}^2$ は有限個である．

左 Cartan-Eilenberg 分解の定義より，$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して $Q^{n,\,\bullet}\longrightarrow M^n\longrightarrow 0$ は完全列で，かつ仮定より $\forall m\in\mathbb{Z},\ L^m$ は平坦加群なので，$\forall m,\,n\in\mathbb{Z}$ に対して命題 4.24-(2) より完全列

$$\cdots\longrightarrow L^m\otimes_R Q^{n,\,-1}\longrightarrow L^m\otimes_R Q^{n,\,0}\longrightarrow L^m\otimes_R M^n\longrightarrow 0$$

[*14] $\mathrm{Tot}\bigl(\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})\bigr)=\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})$ となるような二重複体．

を得る．これの直和を取る事で，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して完全列

$$\cdots \mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})^{n,-1} \longrightarrow \mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})^{n,0} \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n \longrightarrow 0$$

が得られる．

以上の考察より，複体 $\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)$ と二重複体 $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})$ の組に対して系 4.12 を使うことができて，自然な同型

$$H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr) \cong H^n\Bigl(\mathrm{Tot}\bigl(\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})\bigr)\Bigr) = H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})\bigr)$$

があるとわかった．

一方，$Q^{\bullet,*} \longrightarrow M^\bullet$ が左 Cartan-Eilenberg 分解なので補題 4.10 を使うことができて[*15]同型

$$H^q\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p})\bigr) \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p})$$

がわかる．従って $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})$ の 1 つ目の添字について第 q 次コホモロジーをとると複体

$$\cdots \longrightarrow H^q\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p-1})\bigr) \longrightarrow H^q\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p})\bigr) \longrightarrow H^q\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p+1})\bigr) \longrightarrow \cdots$$

が得られるが，これは複体

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p-1}) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p}) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p+1}) \longrightarrow \cdots$$

に等しい．さらにこの複体の p 次コホモロジーをとると，$H^j(Q^{\bullet,*}) \longrightarrow H^j(M^\bullet)$ が射影的分解であることと H^p と直和が交換することから，Tor の定義より

$$H^p{}_{\mathrm{II}}\Bigl(H^q{}_{\mathrm{I}}\bigl(\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})\bigr)\Bigr) = \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}^R_{-p}\bigl(H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\bigr)$$

が言える．左辺は $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})$ により構成される二重複体によるスペクトル系列の E_2 項だから，スペクトル系列

$$\bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}^R_{-p}\bigl(H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\bigr) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr)$$

がある． ■

[*15] 射影的加群は平坦加群（系 4.3）

系 4.14: Künneth 公式

R を単項イデアル整域とし，2 つの R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet),\, (M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ であって，いずれかが無捻加群からなるようなものを与える．

- このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の完全列が存在する：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \xrightarrow{f} H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr) \\ \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}_1^R\bigl(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\bigr) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

- さらに $L^\bullet,\, M^\bullet$ が**共に**自由加群からなる複体ならば完全列 (4.6.5) は分裂し，同型

$$H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr) \cong \left(\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}_1^R\bigl(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\bigr)\right)$$

が成り立つ．

証明 R が P.I.D. なので，定理 4.13 の条件 (2) または (3) が充たされて Künneth スペクトル系列が存在する．さらに定理 4.5 より $\forall n \geq 2,\ \mathrm{Tor}_n^R(\text{-},\,\text{-}) = 0$ が言える．よって $p \neq -1,\, 0$ のとき $E_2^{p,\,q} = 0$ となり，完全列 (4.6.5) を得る．

後半を示す．仮定より自由加群の部分加群 $\mathrm{Im}\, d_L^i \subset L^{i+1}$ もまた自由加群になる（命題 4.1）．故に命題??から完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_L^i \xrightarrow{\ker d_L^i} L^i \xrightarrow{\mathrm{coim}\, d_L^i} \mathrm{Im}\, d_L^i \longrightarrow 0$$

は分裂する．i.e. 準同型写像 $s_i\colon L^i \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_L^i$ が存在して $s_i \circ \ker d_L^i = 1_{\mathrm{Ker}\, d_L^i}$ を充たす．d_M^j についても同様に，準同型写像 $s'_j\colon M^j \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_M^j$ が存在して $s'_j \circ \ker d_M^j = 1_{\mathrm{Ker}\, d_M^j}$ を充たす．

写像 $t_i,\, t'_j$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} t_i &\colon L^i \xrightarrow{s_i} \mathrm{Ker}\, d_L^i \hookrightarrow H^i(L^\bullet), \\ t'_j &\colon M^j \xrightarrow{s'_j} \mathrm{Ker}\, d_M^j \hookrightarrow H^j(M^\bullet) \end{aligned}$$

で定義し，

$$g_n \coloneqq \bigoplus_{i+j=n} t_i \otimes t'_j$$

とおく．$\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n = \bigoplus_{i+j=n} L^i \otimes_R M^j$ だから

$$g_n\colon \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)$$

である．このとき $\forall x \in L^i$ に対して $d_L^i(x) \in \mathrm{Im}\, d_L^i \subset \mathrm{Ker}\, d_L^{i+1}$ だから $s_{i+1}\bigl(d_L^i(x)\bigr) = d_L^i(x) \in \mathrm{Im}\, d_L^i$ であり，$t_{i+1}\bigl(d_L^i(x)\bigr) = 0 + \mathrm{Im}\, d_L^i (= 0)$ が言える．同様にして $\forall y \in M^j$ に対して $t'_{j+1}\bigl(d_M^j(y)\bigr) = 0$ が言えるので，結局

$$(t_{i+1} \otimes t'_j) \circ (d_L^i \otimes 1) = (t_i \otimes t'_{j+1}) \circ (1 \otimes d_M^j) = 0$$

がわかった．故に全複体の射 $d^{n-1}\colon \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n$ に対して $g_n \circ d^{n-1} = 0$ であるから，準同型定理（第 3 同型定理）により g_n は準同型

$$\overline{g_n}\colon H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)$$

を自然に誘導する．

$\forall x \in \mathrm{Ker}\, d_L^i$ に対して $s_i(x) = x$ だから $t_i(x) = x + \mathrm{Im}\, d_L^{i-1}$ であり，同様に $\forall y \in \mathrm{Ker}\, d_M^j$ に対して $t'_j(y) = y + \mathrm{Im}\, d_M^{j-1}$ である．よって $i + j = n$ ならば，$\forall x \otimes y \in L^i \otimes_R M^j \subset \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n$ に対して

$$g_n(x \otimes y) = (x + \mathrm{Im}\, d_L^{i-1}) \otimes (y + \mathrm{Im}\, d_M^{j-1})$$

が成り立つ．従って $\forall x \otimes y \in \mathrm{Ker}\bigl(d^n\colon \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^{n+1}\bigr)$ に対して

$$\overline{g_n}\bigl(x \otimes y + \mathrm{Im}\, d^{n-1}\bigr) = (x + \mathrm{Im}\, d_L^{i-1}) \otimes (y + \mathrm{Im}\, d_M^{j-1})$$

が成り立つので $\overline{g_n} \circ f = 1$ が言えた．i.e. 完全列 (4.6.5) は分裂する． ■

系 4.15: 普遍係数定理

R を単項イデアル整域とし，R 加群 M および R 加群の複体 $(L^\bullet, d_L^\bullet)$ であって，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して L^n が無捻加群であるようなものを与える．

- このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の完全列が存在する：

$$0 \longrightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{f} H^n(L^\bullet \otimes_R M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R\bigl(H^{n+1}(L^\bullet), M\bigr) \longrightarrow 0 \tag{4.6.6}$$

- さらに $L^\bullet$ が自由加群からなる複体ならば完全列 (4.6.6) は分裂し，同型

$$H^n\bigl(L^\bullet \otimes_R M\bigr) \cong \bigl(H^n(L^\bullet) \otimes_R M\bigr) \oplus \mathrm{Tor}_1^R\bigl(H^{n+1}(L^\bullet), M\bigr)$$

が成り立つ．

証明 Künneth 公式において，複体 $M^\bullet = M$ とおけば完全列 (4.6.6) が得られる．

後半を示す．系 4.14 と同様に準同型 $s_n\colon L^n \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_L^n$ であって $s_n \circ \ker d_L^n = 1$ となるものが存在する．ここで写像 g_n を

$$g_n\colon L^n \otimes_R M \xrightarrow{s_n \otimes 1_M} \mathrm{Ker}\, d_L^n \otimes M \hookrightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_R M$$

と定義すると，$\forall x \in L^n$ に対して $d_L^n(x) \in \mathrm{Ker}\, d_L^{n+1}$ より $s_{n+1}\bigl(d_L^n(x)\bigr) = d_L^n(x)$ であり，$g_n \circ (d_L^{n-1} \otimes 1_M) = 0$ が従う．よって g_n は自然に準同型写像

$$\overline{g_n}\colon H^n(L^\bullet \otimes M) \longrightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_R M$$

を引き起こす．これは $\forall x \otimes y \in \mathrm{Ker}(d_L^n \otimes 1_M)$ に対して

$$\overline{g_n}\bigl(x \otimes y + \mathrm{Im}(d_L^{n-1} \otimes 1_M)\bigr) = (x + \mathrm{Im}\, d_L^{n-1}) \otimes y$$

と作用するので $\overline{g_n} \circ f = 1$ が言えた． ■

Ext に関してもほとんど同様である：

補題 4.11:

左 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．次の 2 条件のいずれかを仮定する：

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{Im} d_L^n$, $H^n(L^\bullet)$ が射影的加群

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{Im} d_M^n$, $H^n(M^\bullet)$ が単射的加群

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H^n\Big(\mathrm{Tot}\big(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M^*)\big)\Big) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j-i=n} \mathrm{Hom}_R\left(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\right)$$

が成り立つ．

定理 4.16: Künneth スペクトル系列

右 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．次の条件のいずれかが満たされているとする：

(1) $L^\bullet$ が射影的加群からなる複体であるか，または $M^\bullet$ が単射的加群からなる複体であり，$L^\bullet$ が上に有界かつ $M^\bullet$ が下に有界である．

(2) $L^\bullet$ が射影的加群からなる複体であり，かつある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M \in R$-**Mod** が $\forall n > N,\ I^n = 0$ を充たすような単射的分解 $M \longrightarrow I^\bullet$ を持つ．

(3) $M^\bullet$ が単射的加群からなる複体であり，かつある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M \in$ **Mod**-R が $\forall n < -N,\ P^n = 0$ を充たすような射影的分解 $P^\bullet \longrightarrow M$ を持つ．

このとき，スペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = \bigoplus_{-i+j=n} \mathrm{Ext}_R^p\big(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\big) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}\Big(\mathrm{Tot}\big(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M^*)\big)\Big)$$

が構成される．

系 4.17: Künneth 公式

R を単項イデアル整域とし，2 つの R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ であって，

(1) $L^\bullet$ は自由加群からなる複体であるか，

(2) $M^\bullet$ は可除加群からなる複体であるか

のどちらかであるとする．

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の分裂する完全列が存在する：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow &\bigoplus_{-i+j=n-1} \mathrm{Ext}_R^1\big(H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\big) \longrightarrow H^n\Big(\mathrm{Tot}\big(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M^*)\big)\Big) \\ \longrightarrow &\bigoplus_{-i+j=n} \mathrm{Hom}_R\left(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\right) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

系 4.18: 普遍係数定理

R を単項イデアル整域とし，R 加群 M および R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ であって，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して L^n が自由加群であるようなものを与える．このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の分裂する短完全列が存在する：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1\bigl(H^{-n+1}(L^\bullet),\, M\bigr) \longrightarrow H^n\bigl(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M)\bigr) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,\bigl(H^{-n}(L^\bullet),\, M\bigr) \longrightarrow 0$$

第 5 章

積

この章では R を環とし，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y)$ および $M \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に対して次のような記法を使う：

- 位相空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して M 係数特異チェイン複体を $S_\bullet(X; M) \coloneqq S_\bullet(X) \otimes_R M$ と書く．
- M 係数特異チェイン複体をとる関手 $S_\bullet(\text{-}; M)\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ の，$\mathbf{Top}$ における射 f に対する作用を
$$f_\bullet \coloneqq S_\bullet(f; M) = S_\bullet(f) \otimes_R 1_M \colon S_\bullet(X; M) \longrightarrow S_\bullet(Y; M)$$
と書き，そこからさらに関手 $H_q\colon \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ を作用させるときも
$$f_q \coloneqq H_q\big(S_\bullet(f; M)\big)\colon H_q\big(S_\bullet(X; M)\big) \longrightarrow H_q\big(S_\bullet(Y; M)\big)$$
と略記する．
- 反変関手 $\mathrm{Hom}_R(\text{-},\ M)\colon \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ の，$\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ における射 $f_\bullet\colon S_\bullet(X; R) \longrightarrow S_\bullet(Y; R)$ に対する作用を
$$\begin{aligned} f^\bullet \coloneqq \mathrm{Hom}_R\big(S_\bullet(f; R),\ M\big)\colon \mathrm{Hom}_R\big(S_\bullet(Y; R),\ M\big) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(S_\bullet(X; R),\ M\big), \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f_\bullet \end{aligned} \tag{5.0.1}$$
と書く．そこからさらに関手 $H^q\colon \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ を作用させるときも
$$f^q \coloneqq H^q\Big(\mathrm{Hom}_R\big(S_\bullet(f; R),\ M\big)\Big)\colon H^q\Big(\mathrm{Hom}_R\big(S_\bullet(Y; R),\ M\big)\Big) \longrightarrow H^q\Big(\mathrm{Hom}_R\big(S_\bullet(X; R),\ M\big)\Big) \tag{5.0.2}$$
と書く．
- 余計な煩雑さを避けるために
$$S_\bullet X \coloneqq S_\bullet(X; R), \tag{5.0.3}$$
$$H_q X \coloneqq H_q\big(S_\bullet(X; R)\big), \tag{5.0.4}$$
$$S^\bullet X \coloneqq \mathrm{Hom}_R\big(S_\bullet(X; R),\ R\big),$$
$$H^q X \coloneqq H^q\Big(\mathrm{Hom}_R\big(S_\bullet(X; R),\ R\big)\Big)$$
と略記することがある．

定義 5.1: 次数付き加群

(1) **次数付き左 $\boldsymbol{R}$ 加群** (graded left R module) $A_\bullet$ とは，左 R 加群の族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ であるか，または 左 R 加群の直和分解 $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ のこと．

(2) 次数付き左 R 加群の準同型写像とは，集合 $\prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(A_n,\, B_n)$ の元のこと．

(3) 次数付き左 R 加群 $A_\bullet$ と次数付き右 R 加群 $B_\bullet$ のテンソル積とは，次数付き左 R 加群

$$(A_\bullet \otimes_R B_\bullet)_n := \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes_R B_q$$

のこと．

(4) 次数付き左 R 加群 $\mathrm{Hom}_R(A_\bullet,\, B_\bullet)$ を

$$\mathrm{Hom}_R(A_\bullet,\, B_\bullet)_n := \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(A_k,\, B_{k+n})$$

と定める．

(5) **次数付き環** (graded ring) $R_\bullet$ とは，アーベル群の族 $\{R_n\}_{n\mathbb{Z}}$ であって，写像

$$R_\bullet \otimes R_\bullet \longrightarrow R_\bullet,\ a\otimes b \longmapsto ab$$

を持ち，$(ab)c = a(bc)$ が成り立つもののこと．i.e. 環 R であって直和分解 $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ を持ち，$R_k \cdot R_l \subset R_{k+l}$ を充たすもののこと．

(6) 次数付き環が**可換** (commutative) であるとは，$\forall a \in R_{|a|}$，$\forall b \in R_{|b|}$ に対して

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba$$

が成り立つこと．

(7) 次数付き環 $R_\bullet$ 上の次数付き加群 $M_\bullet$ とは，環 $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ 上の加群であって $R_k \cdot M_l \subset M_{k+l}$ を充たすもの．

二重複体の全複体を複体のテンソル積として定める[*1]：

定義 5.2: 複体のテンソル積

複体 $(C^\bullet,\, d^\bullet)$，$(C'^\bullet,\, d'^\bullet)$ の**テンソル積** $(C^\bullet \otimes C'^\bullet,\, \delta^\bullet)$ とは，次数付き加群のテンソル積

$$(C^\bullet \otimes C'^\bullet)^n := \bigoplus_{p+q=n} C^p \otimes_R C'^q = \mathrm{Tot}(C^\bullet \otimes_R C'^*)$$

および射

$$\delta(z\otimes w) := dz \otimes w + (-1)^p z \otimes d'w \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ \ z \in C^p$$

の組のこと．

[*1] $(d^{-p}\otimes 1_{C'^{-q+1}}) \circ (1_{C^{-p}} \otimes d'^{-q}) = d^{-p}\otimes d'^{-q} = (1_{C^{-p+1}} \otimes d'^{-q}) \circ (d^{-p}\otimes 1_{C'^{-q+1}})$ なので，$\left(C^\bullet \otimes_R C'^*,\, d^\bullet \otimes 1_{C'^*},\, (-1)^\bullet 1_{C^\bullet} \otimes d'^*\right)$ が二重複体になる．従って全複体の射の定義と定義 5.2 の δ の第 2 項の符号は整合的である．

5.1 Eilenberg-Zilber 写像

圏 $\mathbf{Top}^2$ を次のように定める[*2]：

- 位相空間の組 (X, Y) を対象とする．空間対ではなく，必ずしも $Y \subset X$ でなくて良い．
- 連続写像の組 (f, g) $^{\mathrm{w}/}$ $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X', X)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y', Y)$ を射とする．つまり，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^2}\big((X, Y), (X', Y')\big) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, X') \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Y')$$

  とする．
- 合成は $(f, g) \circ (f', g') \coloneqq (f \circ f', g \circ g')$ と定める．

まず，非輪状モデル定理を述べる．

定理 5.1: 非輪状モデル定理

任意の圏 $\mathcal{C}$ および関手 $F, F' \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を与える．$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる複体 $F(X)$ の第 $-n$ 項を $F^{-n}(X)$ と書く．
与えられた関手 $F, F' \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ は以下の条件を充たすとする：

(1) $\forall n < 0,\ F^{-n} = F'^{-n} = 0$

(2) $\mathcal{C}$ の一部の対象の集まり $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して以下を充たす：

(F) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall n \geq 0$ に対して，左 R 加群 $F^{-n}(X)$ は集合

$$\left\{ F^{-n}(u)\big(F^{-n}(M)\big) \;\middle|\; u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X),\ M \in \mathcal{M} \right\}$$

のある部分集合を基底にもつ自由 R 加群となる．このとき関手 $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ は **自由** (free) であると言われる．

(A) $\forall M \in \mathcal{M}$ および $\forall n \geq 1$ に対して $H^{-n}\big(F'(M)\big) = 0$ が成り立つ[a]このとき関手 $F' \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ は **非輪状** (acyclic) と呼ばれる．

このとき，自然変換 $\Phi \colon F \longrightarrow F'$ が自然なチェイン・ホモトピーを除いて一意に定まる．
特に，F, F' がどちらも自由かつ非輪状ならば $F \simeq F'$ であり，F, F' を結ぶどの自然変換も互いにチェイン・ホモトピックである．

[a] i.e. F' の左導来関手 $L_n F'$ に対して，$\forall M \in \mathcal{M},\ L_n F'(M) = 0$ が成り立つ．

<u>証明</u> [7, p.165 thorem 8] を参照． ■

***R* 係数**特異チェイン複体をとる関手 $S_\bullet(\text{-}; R) \colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ が自由かつ非輪状であることは，$\mathcal{M} = \left\{\Delta^q\right\}_{q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ おくと確認できる．

[*2] 要は 2 つの $\mathbf{Top}$ を「直積」してできる圏．

定理 5.2: Eilenberg-Zilber の定理

2 つの関手 $F,\, F' \colon \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を

$$\begin{aligned} F\big((X,\, Y)\big) &:= S_\bullet(X \times Y), \\ F'\big((X,\, Y)\big) &:= S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) \end{aligned}$$

と定めると，これらは自然同値である．i.e. 自然変換 $A\colon F \longrightarrow F'$，$B\colon F' \longrightarrow F$ が存在して，$\forall (X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^2)$ に対して合成

$$\begin{aligned} S_\bullet(X \times Y) \xrightarrow{A} S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) \xrightarrow{B} S_\bullet(X \times Y), \\ S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) \xrightarrow{B} S_\bullet(X \times Y) \xrightarrow{B} S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) \end{aligned}$$

が恒等写像にチェイン・ホモトピックで，かつ A (resp. B) は<u>自然な</u>チェイン・ホモトピックを除いて一意に定まる．特に，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H_n(X \times Y) \xrightarrow{\cong} H_n\big(S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)\big) \tag{5.1.1}$$

がある．

<u>**証明**</u> $\mathcal{M} := \big\{\, (\Delta^p\, \Delta^q) \,\big|\, p,\, q \geq 0 \,\big\}$ とおく．

(A) $\Delta^p \times \Delta^q \approx D^{p+q}$ であるから $\forall M \in \mathcal{M}$ は一点に可縮である．よって $\forall n \geq 1$ に対して $H^{-n}\big(F(M)\big) = 0$ であり F は非輪状．

一方，Künneth 公式より

$$\begin{aligned} H^{-n}\big(S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)\big) \cong &\left(\bigoplus_{p+q=n} H^{-p}\big(S_\bullet(X)\big) \otimes_R H^{-q}\big(S_\bullet(Y)\big) \right) \\ &\oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\Big(H^{-p}\big(S_\bullet(X)\big),\, H^{-q}\big(S_\bullet(Y)\big)\Big) \right) \end{aligned}$$

がわかるが，$\Delta^p \cong D^p$ より $\forall n \geq 1$ に対して右辺は 0 となり，F' が非輪状であることがわかった．

(F) $S_q(X \times Y)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^2}\big((\Delta^q,\, \Delta^q),\, (X,\, Y)\big)$ を基底にもち，$S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) = \bigoplus_{p+q=n} S_p(X) \otimes_R S_q(Y)$ は $\coprod_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^2}\big((\Delta^p,\, \Delta^q),\, (X,\, Y)\big)$ を基底に持つ．i.e. $F,\, F'$ はどちらも自由である．

以上より非輪状モデル定理を使うことができて所望の自然変換 $A\colon F \longrightarrow F', B\colon F' \longrightarrow F$ の存在と，自然なチェイン・ホモトピックを除いた一意性が言えた．

同型 (5.1.1) は命題??より従う． ■

簡単のため，以降では Eilenberg-Zilber の定理における自然変換 $A,\, B$ を一つに固定する．複体をとる段階では積は $A,\, B$ に依存するが，命題??よりホモロジー・コホモロジーをとってしまえばこの依存性は消えるので問題ない．

5.2 クロス積

5.2.1 ホモロジーのクロス積

定義 5.3: ホモロジーの代数的クロス積

チェイン複体 $C_\bullet$, $D_\bullet$ を与える．自然な写像

$$\times_{\mathrm{alg}} \colon H_p(C_\bullet) \otimes_R H_q(D_\bullet) \longrightarrow H_{p+q}(C_\bullet \otimes D_\bullet)$$

を，well-defined な対応

$$[z] \otimes [w] \longmapsto [z \otimes w]$$

を線型に拡張することによって定義し[a]，ホモロジーの**代数的クロス積**と呼ぶ．$\times_{\mathrm{alg}}([z]\otimes[w]) = [z\otimes w]$ のことを $[z] \times_{\mathrm{alg}} [w]$ と書く．

[a] [-] はホモロジー類をとることを意味する．

<u>**証明**</u> 複体 $C_\bullet$, $D_\bullet$ の射をそれぞれ $\partial_\bullet$, $\partial'_\bullet$ と書き，複体のテンソル積の射を $\delta_\bullet$ と書く．$\forall z \in \operatorname{Ker}\partial_p$, $\forall w \in \operatorname{Ker}\partial_q$ および $\forall \bar{z} \in C_{p+1}$, $\forall \bar{w} \in D_{q+1}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&(z + \partial_{p+1}\bar{z}) \otimes (w + \partial'_{q+1}\bar{w}) - z \otimes w = z \otimes \partial'_{q+1}\bar{w} + \partial_{p+1}\bar{z} \otimes w + \partial_{p+1}\bar{z} \otimes \partial'_{q+1}\bar{w} \\
&= (-1)^p\bigl(\partial_p z \otimes \bar{w} + (-1)^p z \otimes \partial'_{q+1}\bar{w}\bigr) - (-1)^p \cancel{\partial_p z} \otimes \bar{w} \\
&\quad + \bigl(\partial_{p+1}\bar{z} \otimes w + (-1)^{p+1}\bar{z} \otimes \partial'_q w\bigr) - (-1)^{p+1}\bar{z} \otimes \cancel{\partial'_q w} \\
&\quad + \bigl(\partial_{p+1}\bar{z} \otimes \partial'_{q+1}\bar{w} + (-1)^{p+1}\bar{z} \otimes \partial'_q\partial'_{q+1}\bar{w}\bigr) \\
&= \delta_{p+q}\bigl((-1)^p z \otimes \bar{w} + \bar{z} \otimes w + \bar{z} \otimes \bar{w}\bigr) \in \operatorname{Im}\delta_{p+q}
\end{aligned}$$

より[*3] $[z] \times_{\mathrm{alg}} [w]$ は代表元の取り方によらず，$\times_{\mathrm{alg}}$ は well-defined である． ■

位相空間 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を与える．定義 5.3 より，特異チェイン複体の上に well-defined な写像

$$\times_{\mathrm{alg}} \colon H_p\bigl(S_\bullet(X)\bigr) \otimes_R H_q\bigl(S_\bullet(X)\bigr) \longrightarrow H_{p+q}\bigl(S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)\bigr)$$

がある．一方，Eilenberg-Zilber の定理より，B の取り方によらない同型

$$B_* \colon H_*\bigl(S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)\bigr) \xrightarrow{\cong} H_*\bigl(S_\bullet(X \times Y)\bigr)$$

がある（記号は記法 (5.0.1) の通り）．

[*3] $\partial_p z = 0$, $\partial'_q w = 0$ に注意.

定義 5.4: ホモロジーのクロス積

合成

$$\times := B_{p+q} \circ \times_{\mathrm{alg}} \colon H_p\big(S_\bullet(X)\big) \otimes_R H_q\big(S_\bullet(Y)\big) \longrightarrow H_{p+q}\big(S_\bullet(X \times Y)\big)$$

のことを，ホモロジーの**クロス積**と呼び，$\forall \alpha \in H_p\big(S_\bullet(X)\big)$, $\forall \beta \in H_q\big(S_\bullet(Y)\big)$ に対して $\alpha \times \beta := \times(\alpha \otimes \beta)$ と書く．

定理 5.3: Künneth 公式

R を単項イデアル整域とする．このとき $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して分裂する短完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=n} H_p\big(S_\bullet(X)\big) \otimes_R H_q\big(S_\bullet(Y)\big) \\ \xrightarrow{\times} & H_n\big(S_\bullet(X \times Y)\big) \\ \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\Big(H_p\big(S_\bullet(X)\big),\, H_q\big(S_\bullet(Y)\big)\Big) \end{aligned}$$

が存在する．

証明 自由加群からなる複体 $S_\bullet(X)$, $S_\bullet(Y)$ に対して Künneth 公式を適用してから Eilenberg-Zilber の定理を使う． ■

系 5.4: 体係数ホモロジーのクロス積

R が体ならば，ホモロジーのクロス積は次の同型を誘導する：

$$H_n\big(S_\bullet(X \times Y)\big) = \bigoplus_{p+q=n} H_p\big(S_\bullet(X)\big) \otimes_R H_q\big(S_\bullet(Y)\big)$$

証明 R が体ならば Tor_1^R は 0 になる（命題 4.5 および Tor の定義を参照）． ■

5.2.2 コホモロジーのクロス積

環 R 上のチェイン複体 $C_\bullet$ の双対チェイン複体を

$$C^\bullet := \mathrm{Hom}_R\,(C_\bullet,\, R)$$

で定義する．

定義 5.5: コホモロジーの代数的クロス積

チェイン複体 $C_\bullet$, $D_\bullet$ を与える．自然な写像

$$\times^{\mathrm{alg}}\colon H^p(C^\bullet)\otimes_R H^q(D^\bullet) \longrightarrow H^{p+q}\big((C_\bullet\otimes_R D_\bullet)^\bullet\big)$$

を，well-defined な対応

$$[\alpha]\otimes[\beta] \longmapsto \left[\sum_{i,\,|z_i|+|w_i|=p+q} z_i\otimes w_i \longmapsto \sum_{i,\,|z_i|+|w_i|=p+q} \alpha(z_i)\cdot\beta(w_i)\right]$$

を[a]線型に拡張することで定め，コホモロジーの**代数的クロス積**と呼ぶ．ただし α と z_i の次数が異なる場合は $\alpha(z_i)=0$ で，β と w_i についても同様である．

[a] [-] はコホモロジー類をとることを意味する．

<u>証明</u> 複体 $C^\bullet$, $D^\bullet$ の射をそれぞれ $\partial^\bullet$, $\partial'^\bullet$ と書き，複体のテンソル積の射を $\delta^\bullet$ と書く．$\forall\alpha\in\operatorname{Ker}\partial^p$, $\forall\beta\in\operatorname{Ker}\partial'^q$ および $\forall\bar\alpha\in C^{p-1}$, $\forall\bar\beta\in D^{q-1}$ をとると

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,\,|z_i|+|w_i|=p+q}(\alpha+\partial^{p-1}\bar\alpha)(z_i)\cdot(\beta+\partial'^{q-1}\bar\beta)(w_i)-\sum_{i,\,|z_i|+|w_i|=p+q}\alpha(z_i)\cdot\beta(w_i)\\
&=\sum_{i,\,|z_i|+|w_i|=p+q}\big(\alpha(z_i)\cdot\bar\beta(\partial'_q w_i)+\bar\alpha(\partial_p z_i)\cdot\beta(w_i)+\bar\alpha(\partial_p z_i)\cdot\bar\beta(\partial'_q w_i)\big)\\
&=\sum_{i,\,(|z_i|,\,|w_i|)=(p,\,q)}\Big((-1)^{|z_i|}\big(\alpha(\partial_p z_i)\cdot\bar\beta(w_i)+(-1)^{|z_i|}\alpha(z_i)\cdot\bar\alpha(\partial'_q w_i)\big)\\
&\qquad+\big(\bar\alpha(\partial_p z_i)\cdot\beta(w_i)+(-1)^{|z_i|}\bar\alpha(z_i)\cdot\beta(\partial'_q w_i)\big)\\
&\qquad+\big(\bar\alpha(\partial_p z_i)\cdot\bar\beta(\partial'_q w_i)+(-1)^{|z_i|}\bar\alpha(z_i)\cdot\bar\beta(\partial'_{q-1}\partial'_q w_i)\big)\Big)\\
&=\sum_i\Big((-1)^{|z_i|}(\alpha\otimes\bar\beta)\big(\delta_{p+q}(z_i\otimes w_i)\big)\\
&\qquad+(\bar\alpha\otimes\beta)\big(\delta_{p+q}(z_i\otimes w_i)\big)\\
&\qquad+(\bar\alpha\otimes\bar\beta)\big(\delta_{p+q}(z_i\otimes\partial'_q w_i)\big)\Big)\\
&=\delta^{p+q-1}\big((-1)^p\alpha\otimes\bar\beta+\bar\alpha\otimes\beta+\bar\alpha\otimes\bar\beta\big)\left(\sum_i z_i\otimes w_i\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ[*4]ので well-defined である． ■

特異チェイン複体に上述の構成を適用することで

$$\times^{\mathrm{alg}}\colon H^p\big(S_\bullet(X)\big)\otimes_R H^q\big(S_\bullet(X)\big)\longrightarrow H^{p+q}\Big(\big(S_\bullet(X)\otimes S_\bullet(Y)\big)^\bullet\Big)$$

を得る．一方，Eilenberg-Zilber の定理からチェイン・ホモトピー同値写像

$$A\colon S_\bullet(X\times Y)\longrightarrow S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(Y)$$

[*4] α, β の引数は次数がそれぞれ p, q でなければ 0 になることに注意する．

があるが，これの双対をとると

$$A^*\colon \bigl(S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(Y)\bigr)^* \longrightarrow S^*(X\times Y)$$

になる（記号は (5.0.1)）．さらにコホモロジーを取ることで，A の取り方によらない同型

$$A^*\colon H^\bullet\bigl(S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(Y)\bigr)^\bullet \longrightarrow H^\bullet\bigl(S^\bullet(X\times Y)\bigr)$$

を得る（記号は (5.0.2) の通り）．

定義 5.6: コホモロジーのクロス積

合成

$$\times := A^*\circ \times^{\mathrm{alg}}\colon H^p\bigl(S^\bullet(X)\bigr)\otimes H^q\bigl(S^\bullet(Y)\bigr) \longrightarrow H^{p+q}\bigl(S^\bullet(X\times Y)\bigr)$$

のことをコホモロジーの**クロス積**と呼ぶ．

5.3 カップ積とキャップ積

この節では，原則として記法 (5.0.3), (5.0.4) を使う．

対角写像を

$$\Delta\colon X\longrightarrow X\times X,\ x\longmapsto (x,\,x)$$

とおくと $\Delta\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\,X\times X)$ である．このとき記法 (5.0.2) に則って

$$\Delta^\bullet\colon H^\bullet(X\times X)\longrightarrow H^\bullet(X)$$

と略記する．

5.3.1 カップ積と特異コホモロジーの環構造

定義 5.7: カップ積

$\forall a\in H^p(X),\ \forall b\in H^q(X)$ の**カップ積** (cup product) を次のように定義する：

$$\boldsymbol{a}\smile\boldsymbol{b} := \Delta^{p+q}\bigl(a\times b\bigr)\in H^{p+q}(X)$$

つまり，

$$\smile\colon H^p(X)\otimes_R H^q(X)\longrightarrow H^{p+q}(X)$$

となる．バランス写像 $\Phi\colon H^p(X)\times H^q(Y)\longrightarrow H^p(X)\otimes_R H^q(Y)$ を合成することで

$$\smile\colon H^p(X)\times H^q(X)\longrightarrow H^{p+q}(X)$$

と書くこともできる．

補題 5.1: カップ積の基本性質

$\forall (f,\, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^2}\big((X',\, Y'),\, (X,\, Y)\big)$ および $\forall a,\, b \in H^\bullet(X),\ \forall c \in H^\bullet(Y)$ をとる. $\mathrm{pr}_i \colon X \times Y \longrightarrow X_i\ (i=1,\, 2)$ を射影とする.

(1) $a \smile b = \Delta^\bullet(a \times b)$
(2) $a \times b = \mathrm{pr}_X{}^\bullet(a) \smile \mathrm{pr}_Y{}^\bullet(b)$
(3) $f^\bullet(a \smile b) = f^\bullet(a) \smile f^\bullet(b)$
(4) $(f \times g)^\bullet(a \times c) = f^\bullet(a) \times g^\bullet(c)$

__証明__ (1) カップ積の定義.

(4) Eilenberg-Zilber の定理において $A,\, B$ が自然変換であることから従う.

(3) $(f \times f) \circ \Delta = \Delta \circ f$ であることと (4) から

$$\begin{aligned} f^\bullet(a) \smile f^\bullet(b) &= \Delta^\bullet(f^\bullet(a) \times g^\bullet(b)) = \big((f \times f) \circ \Delta\big)^\bullet(a \times b) \\ &= (\Delta \circ f)^\bullet(a \times b) = f^\bullet\big(\Delta^\bullet(a \times b)\big) = f^\bullet(a \smile b) \end{aligned}$$

(2) $(\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y) \circ \Delta_{X \times Y} = \mathrm{id}_{X \times Y}$ であることと (4)

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_X{}^\bullet(a) \smile \mathrm{pr}_Y{}^\bullet(b) &= \Delta^\bullet_{X \times Y}\big(\mathrm{pr}_X{}^\bullet(a) \times \mathrm{pr}_Y{}^\bullet(c)\big) \\ &= \Delta^\bullet_{X \times Y}\big((\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y)^\bullet(a \times c)\big) \\ &= \big((\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y) \circ \Delta_{X \times Y}\big)^\bullet(a \times c) \\ &= \mathrm{id}^\bullet_{X \times Y}(a \times c) = a \times c \end{aligned}$$

■

定義 5.8: 対角近似

$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して，チェイン複体の射

$$\tau \colon S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(X)$$

は以下の条件を充たすとき**対角近似** (diagonal approximation) と呼ばれる：

(1) 任意の 0-単体 σ に対して $\tau(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$
(2) τ は連続写像に関して自然である. i.e. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ に対して図式 5.1 が可換になる

$$\begin{tikzcd} S_\bullet(X) \arrow[r, "S_\bullet(f)"] \arrow[d, "\tau"] & S_\bullet(Y) \arrow[d, "\tau"] \\ S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(X) \arrow[r] & S_\bullet(Y) \otimes_R S_\bullet(Y) \end{tikzcd}$$

図 5.1: 対角近似の自然性

対角近似と Eilenberg-Zilber map は，片方が与えられるともう一方も定まる. 従って，状況に応じて便利な方を使えば良い.

補題 5.2: Eilenberg-Zilber map と対角近似の関係

$A\colon S_\bullet(X\times Y)\xrightarrow{A} S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(X)$ を与えると，対応する対角近似 $\tau\colon S_\bullet(X)\longrightarrow S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(X)$ が

$$\tau = A\circ\Delta_\bullet$$

によって定まる．
逆に，対角近似 τ が与えられると対応する A が

$$A=(\mathrm{pr}_X\otimes\mathrm{pr}_Y)\circ\tau$$

によって定まる．

証明 関手 $S_\bullet(\text{-})\colon \mathbf{Top}\longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ は自由で，関手 $S_\bullet(\text{-})\otimes_R S_\bullet(\text{-})$ は非輪状である．従って非輪状モデル定理より対角近似 τ が自然なチェイン・ホモトピーを除いて一意に定まる．特に，Eilenberg-Zilber map $A\colon S_\bullet(X\times Y)\xrightarrow{A} S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(X)$ に対して $\tau=A\circ\Delta_\bullet$ は対角近似である．[*5]

逆に $(\mathrm{pr}_X\otimes\mathrm{pr}_Y)\circ\tau$ は関手 $F\colon (X,\,Y)\longmapsto S_\bullet(X\times Y)$, $F'\colon (X,\,Y)\longmapsto S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(Y)$ の間の自然変換となる．そして定理 5.2 より，これは Eilenberg-Zilber map と自然にホモトピックである． ■

定理 5.5: 特異コホモロジーの環構造

全ての特異 0 単体を $1\in R$ に移すコサイクルのコホモロジー類を $1\in H^0(X)$ と書く．$\forall a,\,b,\,c\in H^\bullet(X)$ に対して以下が成り立つ：

(1) $1\smile a=a=a\smile 1$
(2) $(a\smile b)\smile c=a\smile(b\smile c)$
(3) $a\smile b=(-1)^{|a||b|}b\smile a$

従って，組 $\bigl(H^\bullet(X),\,+,\,\smile\bigr)$ は次数付き可換環になる．

証明 (1)

■

5.3.2 キャップ積と特異ホモロジーの加群構造

Kronecker ペアリング

$$\langle\,,\,\rangle : S^\bullet(X)\times S_\bullet(X)\longrightarrow R$$

[*5] 従ってカップ積の定義を

$$a\smile b=\tau^\bullet(a\times^{\mathrm{alg}} b)$$

とすることもできる．

は，$a \in S^q(X)$, $z \in S_p(X)$ に対して

$$\langle a,\, z\rangle := \begin{cases} a(z), & p = q \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

として定めた．これを拡張して部分的な evaluation

$$E\colon S^\bullet X \otimes_R S_\bullet X \otimes_R S_\bullet X \longrightarrow S_\bullet X$$

を，次数が合っている時に

$$E(a \otimes z \otimes w) := a(w) \otimes z$$

として定める（定義域の一般の元に対してはこれを線型に拡張する）．

定義 5.9: コチェインのキャップ積

$\forall a \in S^q(X)$, $\forall z \in S_{p+q}(X)$ に対して**キャップ積** (cap product) を，Eilenberg-Zilber の定理の A を用いて

$$\frown\colon S^q(X) \times S_{p+q}(X) \longrightarrow S_q(X),\ (a,\, z) \longmapsto E\bigl(a \otimes (A \circ \Delta_\bullet)(z)\bigr)$$

または，対角近似 τ を用いて

$$a \frown z = E\bigl(a \otimes \tau(z)\bigr)$$

としてもよい．

補題 5.3:

特異ホモロジー，コホモロジーの境界写像をそれぞれ $\partial_\bullet$, $\delta^\bullet$ と書く．$\forall \alpha \in S^q(X)$, $\forall z \in S_{p+q}(X)$ に対して以下が成り立つ：

$$\partial_p(a \frown z) = (-1)^p \delta^q \alpha \frown z + \alpha \frown \partial_{p+q} z$$

<u>証明</u> $\tau(z) = \sum_{i,\ |x_i|+|y_i|=p+q} x_i \otimes y_i$ と書ける．このとき

$$\begin{aligned} \theta_p(\alpha \frown z) &= \partial_p\left(\sum_{i,\ |y_i|=q} \alpha(y_i) \cdot x_i\right) = \sum_{i,\ |y_i|=q} \alpha(y_i) \cdot \partial_p x_i, \\ \delta^q \alpha \frown z &= \sum_i \delta^p \alpha(y_i) \cdot x_i = \sum_{i,\ |y_i|=q+1} \alpha(\partial_{q+1} y_i) \cdot x_i \end{aligned}$$

なので，τ がチェイン複体の射であることに注意すると

$$\begin{aligned} \alpha \frown \partial_{p+q} z &= E(\alpha \otimes \tau(\partial_{p+q} z)) = E(\alpha \otimes \partial_{p+q}(\tau(z))) \\ &= E\left(\alpha \otimes \left(\sum_{i,\ |x_i|+|y_i|=p+q} \partial_{|x_i|} x_i \otimes y_i + \sum_{i,\ |x_i|+|y_i|=p+q} (-1)^{|x_i|} x_i \otimes \partial_{|y_i|} y_i\right)\right) \\ &= \sum_{i,\ |y_i|=q} \alpha(y_i) \cdot \partial_p x_i + \sum_{i,\ |y_i|=q+1} (-1)^{p-1} \alpha(\partial_{q+1} y_i) \cdot x_i \\ &= \partial_p(a \frown z) + (-1)^{p-1} \delta^q \alpha \frown z \end{aligned}$$

となって示された. ■

補題 5.3 により，次の定義が well-defined になる．

定義 5.10: キャップ積

キャップ積 (cap product) を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
\frown \colon H^q(X) \times H_{p+q}(X) &\longrightarrow H_p(X), \\
([\alpha],\, [z]) &\longmapsto [\alpha \frown z]
\end{aligned}
$$

定理 5.6: 特異ホモロジーの加群構造

$\forall a,\, b \in H^\bullet(X),\ \forall z \in H_\bullet(X)$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\langle a,\, b \frown z\rangle = \langle a \smile b,\, z\rangle$
(2) $a \frown (b \frown z) = (a \smile b) \frown z$

(2) より，組 $\bigl(H_\bullet(X),\, +,\, \frown\bigr)$ は左 $H^\bullet(X)$ 加群になる．

<u>**証明**</u> $a = [\alpha],\, b = [\beta]$ とおき，$\tau(z) = \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} x_i \otimes y_i$ とおく．

(1) コチェインのキャップ積の定義より

$$
\begin{aligned}
\langle a,\, b \frown z\rangle &= \alpha\left(E\left(\beta \otimes \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} x_i \otimes y_i\right)\right) \\
&= \alpha \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} x_i \cdot \beta(y_i) \\
&= \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} \alpha(x_i)\beta(y_i).
\end{aligned}
$$

一方，コホモロジーの代数的クロス積の定義より

$$
\begin{aligned}
\langle a \smile b,\, z\rangle &= \bigl(\tau^\bullet(a \times^{\mathrm{alg}} b)\bigr)(z) \\
&= (a \times^{\mathrm{alg}} b)\bigl(\tau(z)\bigr) \\
&= \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} \alpha(x_i)\beta(y_i)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって $\langle a,\, b \frown z\rangle = \langle a \smile b,\, z\rangle$ が言えた．

(2) $\forall c \in H^{|z|-|b|-|a|}$ を与える．このとき $\smile$ の結合則より

$$
\langle c,\, a \frown (b \frown z)\rangle = \langle c \smile a,\, b \frown z\rangle = \langle c \smile (a \smile b),\, z\rangle = \langle c,\, (a \smile b) \frown z\rangle
$$

が成り立ち，証明が完了する．

■

5.3.3 スラント積

定義 5.11: コチェインのスラント積

Eilenberg-Zilber の定理における写像 $A\colon S_\bullet(X\times Y)\longrightarrow S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(Y)$ を用いて，コチェインの**スラント積** (slant product) を次のように定義する：

$$\backslash\colon S^q(Y)\times S_{p+q}(X\times Y)\longrightarrow S_p(X),\ (\alpha,\,z)\longmapsto E\bigl(\alpha\otimes A(z)\bigr)$$

定義 5.12: スラント積

スラント積 (slant product) を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\backslash\colon H^q(Y)\times H_{p+q}(X\times Y)&\longrightarrow H_p(X),\\ ([\alpha],\,[z])&\longmapsto[\alpha\backslash z]\end{aligned}$$

対応関係は

- カップ積 $\leftrightarrow$ クロス積
- キャップ積 $\leftrightarrow$ **スラント積**

のようになっている．例えば定理 5.6-(1) と対応して

$$\langle a,\,b\backslash z\rangle=\langle a\times b,\,z\rangle$$

が成り立つ．

5.4 空間対のカップとキャップ

$(X,\,A)$, $(Y,\,B)$ を空間対とする．標準的射影

$$S_\bullet X\otimes_R S_\bullet Y\twoheadrightarrow\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A}\otimes_R\frac{S_\bullet Y}{S_\bullet B}$$

の核は $S_\bullet A\otimes_R S_\bullet Y+S_\bullet X\otimes_R S_\bullet B$ なので準同型定理から自然な同型

$$\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A}\otimes_R\frac{S_\bullet Y}{S_\bullet B}\cong\frac{S_\bullet X\otimes_R S_\bullet Y}{S_\bullet A\otimes_R S_\bullet Y+S_\bullet X\otimes_R S_\bullet B}$$

が従う．$X=Y$ とすると，対角近似 $\tau\colon S_\bullet X\longrightarrow S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(X)$ は $\tau(S_\bullet A)\subset S_\bullet A\otimes_R S_\bullet A$, $\tau(S_\bullet B)\subset S_\bullet B\otimes_R S_\bullet B$ を充たす．従って合成

$$S_\bullet X\xrightarrow{\tau}S_\bullet X\otimes_R S_\bullet X\twoheadrightarrow\frac{S_\bullet X\otimes_R S_\bullet X}{S_\bullet A\otimes_R S_\bullet X+S_\bullet X\otimes_R S_\bullet B}$$

の核は $S_\bullet A+S_\bullet B$ だから，準同型

$$\overline{\tau}\colon\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A+S_\bullet B}\longrightarrow\frac{S_\bullet X\otimes_R S_\bullet X}{S_\bullet A\otimes_R S_\bullet X+S_\bullet X\otimes_R S_\bullet B}$$

が誘導される．

コホモロジーの代数的クロス積と $\mathcal{T}^\bullet$ の合成

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A},\, R\right) \otimes_R \mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet B},\, R\right) &\xrightarrow{\times^{\mathrm{alg}}} \mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A} \otimes_R \frac{S_\bullet Y}{S_\bullet B},\, R\right) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X \otimes_R S_\bullet X}{S_\bullet A \otimes_R S_\bullet X + S_\bullet X \otimes_R S_\bullet B},\, R\right) \\
&\xrightarrow{\mathcal{T}^\bullet} \mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A + S_\bullet B},\, R\right)
\end{aligned}
$$

のコホモロジーをとることでカップ積

$$
H^p(X,\, A) \times H^q(X,\, B) \longrightarrow H^{p+q}\left(\mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A + S_\bullet B},\, R\right)\right) \tag{5.4.1}
$$

を誘導する．

定義 5.13: 切除対

位相空間 X と，その部分空間 $A,\, B \subset X$ を与える．標準的包含

$$
S_\bullet(A) + S_\bullet(B) \hookrightarrow S_\bullet(A \cup B)
$$

がチェイン・ホモトピー同値写像であるとき，部分空間の対 $\{A,\, B\}$ を**切除対** (excisive pair) と呼ぶ．

チェイン・ホモトピーは加法的関手によって保存されるから，切除対 $\{A,\, B\}$ に対して

$$
\mathrm{Hom}_R\left(S_\bullet(A \cup B),\, R\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(S_\bullet(A) + S_\bullet(B),\, R\right)
$$

もまたチェイン・ホモトピー同値写像である．従って命題**??**より同型

$$
H^q(A \cup B) \cong H^q\Big(\mathrm{Hom}_R\left(S_\bullet(A) + S_\bullet(B),\, R\right)\Big) \tag{5.4.2}
$$

を誘導する．

切除対 $\{A,\, B\}$ に対して，横の 2 行が完全な図式

$$
0 \longrightarrow S_\bullet A + S_\bullet B \longrightarrow S_\bullet X \longrightarrow \frac{S_\bullet X}{S_\bullet A + S_\bullet B} \longrightarrow 0
$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(A) + S_\bullet(B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & S_\bullet X \arrow[r] \arrow[d, "1"] & \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)+S_\bullet(B)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(A \cup B) \arrow[r] & S_\bullet X \arrow[r] & \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A \cup B)} \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

がある．これのコホモロジー長完全列をとると，同型 (5.4.2) により可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(S_\bullet(A) + S_\bullet(B))^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^q(X) \arrow[r] \arrow[d, "="] & H^q\left(\frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)+S_\bullet(B)}\right)^\bullet \arrow[r, "\delta^q"] \arrow[d, red] & H^{q+1}(S_\bullet(A) + S_\bullet(B))^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{q+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^q(A \cup B) \arrow[r] & H^q(X) \arrow[r] & H^q(X,\, A \cup B) \arrow[r, "\delta'^q"] & H^{q+1}(A \cup B) \arrow[r] & H^{q+1}(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

が得られる．5 項補題により，赤色をつけた写像

$$H^q\left(\mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)+S_\bullet(B)},\, R\right)\right) \longrightarrow H^q(X,\, A\cup B)$$

が同型であることがわかる．従って式 (5.4.1) から次の定理が言える：

定理 5.7: 空間対のカップ積

$\{A,\, B\}$ が切除対ならば，写像

$$\smile\colon H^p(X,\, A)\times H^q(X,\, B) \longrightarrow H^{p+q}(X,\, A\cup B)$$

は well-defined である．

- $\{A,\, A\}$ は常に切除対である．従って $H^\bullet(X,\, A)$ は空間対のカップ積によって環になる．
- $\{A,\, \emptyset\}$ も常に切除対である．従って

$$\smile\colon H^p(X,\, A)\times H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X,\, A)$$

は常に well-defined.

キャップ積に関しても同様の定理が成り立つ：

定理 5.8: 空間対のキャップ積

$\{A,\, B\}$ が切除対ならば，写像

$$\frown\colon H^q(X,\, A)\times H_{p+q}(X,\, A\cup B) \longrightarrow H_p(X,\, B)$$

は well-defined である．

5.5 Poincarë 双対

定理 5.9: Poincarë 双対定理

M をコンパクトな向き付け可能な n 次元位相多様体とする．
このとき，左 R 加群 π に対して以下の同型がある：

$$\frown[M]\colon H^p(M;\pi) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M;\pi)$$

ただし，$[M]$ は M の基本類である．

証明　[6, p.276] や [5, p.241] などを参照． ■

第 6 章

ファイバー束

6.1　ファイバー束

(2023/5/11) この章は未完である

6.1.1　位相群の作用

位相空間 X の**同相群** (homeomorphism group) $\mathrm{Homeo}(X)$ とは

- 集合 $\mathrm{Homeo}(X) \coloneqq \{\, f\colon X \longrightarrow X \mid$ **同相写像** $\}$
- 単位元を恒等写像 id_X
- 群演算を連続写像の合成
- 逆元を逆写像

として定義される群のことを言う．

G を**位相群**とする．i.e. G は位相空間であり，かつ群であって写像

- 積 $\mu\colon G \times G \longrightarrow G,\ (g,\, h) \longmapsto gh$
- 逆元 $\pi\colon G \longrightarrow G,\ g \longmapsto g^{-1}$

が連続写像であるようなものである．

定義 6.1: 位相群の作用

- **位相群** G が位相空間 X へ**作用している**とは，群準同型 $\psi\colon G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ が存在して写像

$$\Theta\colon G \times X \longrightarrow X,\ (g,\, x) \longmapsto \psi(g)(x)$$

が連続写像となることを言う．写像 Θ のことを G の X への**左作用** (left action) と呼び，$\boldsymbol{g \cdot x} \coloneqq \Theta(g,\, x)$ と略記する．

- 点 $x \in X$ の**軌道** (orbit) とは，集合

$$G \cdot x \coloneqq \{\, g \cdot x \in X \mid g \in G \,\}$$

のこと．

- 同値関係

$$\sim := \{\, (x,\, y) \in X \times X \mid y \in G \cdot x \,\}$$

による商集合を**軌道空間** (orbit space) と呼び $\boldsymbol{X/G}$ と書く．

- **不動点集合** (fixed set) とは，集合

$$X^G := \{\, x \in X \mid \forall g \in G,\ g \cdot x = x \,\}$$

のこと．

- 群の作用は $\forall x \in X,\ \forall g \in G \setminus \{1_G\},\ g \cdot x \neq x$ を充たすとき**自由** (free) と呼ばれる．**軌道空間**
- 群の作用は群準同型 $\psi\colon G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ が単射のとき**効果的** (effective) と呼ばれる[a]．

[a] 従ってこのとき $\mathrm{Ker}\,\psi = \{1_G\}$ である．i.e. 自明な作用 $(g,\, x) \longmapsto x$ は $1_G \cdot x$ のみである．

! 定義 6.1 において，$\mathrm{Homeo}(X)$ に位相（コンパクト開位相など）を入れる場合がある．この場合は $G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ が連続であることを定義とする．

6.1.2 ファイバー束

定義 6.2: ファイバー束

位相群 G は位相空間 F に効果的に作用しているとする．F をファイバー，G を**構造群** (structure group) に持つ**ファイバー束** (fiber bundle) とは，

- 位相空間 $E,\, B,\, F$
- 連続な全射 $\pi\colon E \longrightarrow B$
- 同相写像[a]の集合

$$\mathrm{LT}(B) := \{\, \varphi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U) \mid U \in \mathrm{Ob}(\mathbb{O}_B) \,\}.$$

$\mathrm{LT}(B)$ の元 $\varphi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ のことを $\boldsymbol{U}$ **上の局所自明化**と呼ぶ．

- 位相群 G

の 6 つ組であって以下を充たすもののこと：

(1) $\mathrm{LT}(B)$ の任意の元 $\varphi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ に対して図式 6.1 が可換になる．

(2) B の各点 $x \in B$ は，その上に局所自明化が存在するような開近傍 $x \in U \subset B$ を持つ．

(3) U 上の任意の局所自明化 $\varphi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ および B の開集合 $V \subset U$ に対して，制限 $\varphi|_{V \times F}$ は V 上の局所自明化になる．

(4) U 上の任意の局所自明化 $\varphi,\, \varphi'\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ に対し，**変換関数** (transition function) と呼ばれる連続写像 $\theta_{\varphi,\,\varphi'}\colon U \longrightarrow G$ が存在して

$$\varphi'(u,\, f) = \varphi\big(u,\, \theta_{\varphi,\,\varphi'}(u) \cdot f\big) \quad \forall u \in U,\, \forall f \in F$$

が成り立つ．

(5) $\mathrm{LT}(B)$ は条件 (1)-(4) を充たす連続写像の集合として最大のものである．

このようなファイバー束を $\boldsymbol{F} \hookrightarrow \boldsymbol{E} \xrightarrow{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{B}$ で表す．

[a] 部分空間 $\pi^{-1}(U) \subset E$ には E からの相対位相が入っているものとする．

$$
\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\
& U &
\end{tikzcd}
$$

図 6.1: 局所自明性．proj_1 は第 1 成分への射影である．

命題 6.1: ファイバー束の復元

- 位相空間 $B,\ F$
- 位相群 G の F への作用
- 族 $\mathcal{T} \coloneqq \left\{(U_\lambda,\ \theta_\lambda)\right\}_{\lambda \in \Lambda}$．ただし U_α は B の開集合で，$\theta_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow G$ は連続写像である．

が与えられ，以下の条件を充たしているとする：

(1)
$$
B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda
$$

(2)
$$
(U_\alpha,\ \theta_\alpha) \in \mathcal{T} \text{ かつ } W \subset U_\alpha \quad \Longrightarrow \quad (W,\ \theta_\alpha|_W) \in \mathcal{T}
$$

(3)
$$
(U,\ \theta_\alpha),\ (U,\ \theta_\beta) \in \mathcal{T} \quad \Longrightarrow \quad (U,\ \theta_\alpha \cdot \theta_\beta) \in \mathcal{T}
$$

ただし，$\forall u \in U$ に対して $(\theta_\alpha \cdot \theta_\beta)(u) \coloneqq \theta_\alpha(u)\theta_\beta(u) \in G$ と略記した．

(4) $\mathcal{T}$ は条件 (1)-(3) を充たすもののうち最大の集合である．

このとき，ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ であって，構造群を G，変換関数を θ_α とするものが存在する．

証明 $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して，$U_\lambda \subset B$ には底空間 B からの相対位相を入れ，$U_\lambda \times F$ にはそれと F の位相との積位相を入れることで，直和位相空間

$$
\mathcal{E} \coloneqq \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \times F
$$

を作ることができる[*1]．$\mathcal{E}$ の任意の元は $(\lambda,\ b,\ f) \in \Lambda \times U_\lambda \times F$ と書かれる．

[*1] $\mathcal{E}$ はいわば，「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材（局所自明束 $U_\alpha \times F$）」である．証明の以降の部分では，これらの「素材」

さて，$\mathcal{E}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$\sim := \left\{ \big((\alpha,\, b,\, f),\, (\beta,\, c,\, h) \big) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \;\middle|\; b = c \text{ かつ } {\scriptstyle \exists (U_\lambda,\, \theta_\lambda) \in \mathcal{T} \text{ s.t. } U_\lambda \subset U_\alpha \cap U_\beta, \atop f = \theta_\lambda(c) \cdot h} \right\} \tag{6.1.1}$$

反射律　$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して定数写像 $1_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow G,\ u \longmapsto 1_G$ は連続である. 従って条件 (4) より $(U_\lambda,\, 1_\lambda) \in \mathcal{T}$ が言えるので，$\forall (\alpha,\, b,\, f) \in \mathcal{E}$ に対して $f = 1_G \cdot f = 1_\alpha(b) \cdot f$. i.e. $(\alpha,\, b,\, f) \sim (\alpha,\, b,\, f)$.

対称律　位相群の定義より，$\forall (U_\lambda,\, \theta_\lambda) \in \mathcal{T}$ に対して ${\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}} \colon U_\lambda \longrightarrow G,\ u \longmapsto \theta_\lambda(u)^{-1}$ は連続写像であり，もし $(U_\lambda,\, {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}) \in \mathcal{T}$ ならば条件 (2), (3) を充たす．よって条件 (4) より実際に $(U_\lambda,\, {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}) \in \mathcal{T}$ であり，

$$\begin{aligned}
(\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, c,\, h) \quad &\Longrightarrow \quad b = c \text{ かつ } \exists (U_\lambda,\, \theta_\lambda) \in \mathcal{T},\, U_\lambda = U_\alpha \cap U_\beta,\ f = \theta_\lambda(c) \cdot h \\
&\Longrightarrow \quad b = c \text{ かつ } (U_\lambda,\, {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}) \in \mathcal{T},\ {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}(c) \cdot f = \big({\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}(c) \theta_\lambda(c)\big) \cdot h \\
&\Longleftrightarrow \quad c = b \text{ かつ } (U_\lambda,\, {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}) \in \mathcal{T},\ h = {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}(b) \cdot f \\
&\Longleftrightarrow \quad (\beta,\, c,\, h) \sim (\alpha,\, b,\, f).
\end{aligned}$$

推移律　条件 (2), (3) より

$$\begin{aligned}
&(\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, c,\, h),\ (\beta,\, c,\, h) \sim (\gamma,\, d,\, k) \\
&\quad \Longrightarrow \quad b = c \text{ かつ } c = d \\
&\qquad\quad \text{かつ } \exists (U_\lambda,\, \theta_\lambda),\, (U_\mu,\, \theta_\mu) \in \mathcal{T},\ U_\lambda = U_\alpha \cap U_\beta,\, U_\mu = U_\beta \cap U_\gamma,\ f = \theta_\lambda(c) \cdot h,\, h = \theta_\mu(d) \cdot k \\
&\quad \Longrightarrow \quad b = d \text{ かつ } (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma,\, \theta_\beta \cdot \theta_\gamma) \in \mathcal{T},\ f = (\theta_\beta \cdot \theta_\gamma)(d) \cdot k \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, d,\, k).
\end{aligned}$$

従って $\sim$ は同値関係である．$E := \mathcal{E}/\sim$ とおき，商写像を $\mathcal{E} \twoheadrightarrow E,\ (\alpha,\, b,\, f) \longmapsto [(\alpha,\, b,\, f)]$ と書くことにする．集合 E には商位相を入れる．

次に連続な全射 $\pi \colon E \twoheadrightarrow B$ を

$$\pi\big([(\lambda,\, b,\, f)] \big) := b$$

と定義する．$\sim$ の定義 (6.1.1) より $(\lambda,\, b,\, f) \sim (\mu,\, c,\, h)$ ならば $b = c$ なので π は well-defined である．次に $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して

$$\varphi_\lambda \colon U_\lambda \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\lambda),\ (b,\, f) \longmapsto [(\lambda,\, b,\, f)]$$

と定義して

$$\mathrm{LT}(B) := \{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

とおく．

(1) $\forall \varphi_\lambda \in \mathrm{LT}(B)$ を 1 つとると，$\forall (b,\, f) \in U_\lambda \times F$ に対して

$$(\pi \circ \varphi_\lambda)(b,\, f) = \pi([(\lambda,\, b,\, f)]) = b = \mathrm{proj}_1(b,\, f)$$

が成り立つ．i.e. 集合 $\mathrm{LT}(B)$ の任意の元は局所自明性を充たす．

を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の部分に関して「良い性質を持った接着剤 $\{\theta_\lambda\}$」を用いて「貼り合わせる」操作を，位相を気にしながら行う．

(2) 条件-(2) より $\forall x \in B$ に対して $x \in U_\lambda$ となるような $\lambda \in \Lambda$ が存在する．構成より，このとき $\varphi_\lambda \in \mathrm{LT}(B)$ である．

(3) $\forall \varphi_\lambda \in \mathrm{LT}(B)$ を 1 つとる．条件-(2) より B の部分集合 W が $W \subset U_\lambda$ を充たすなら $(W, \theta_\lambda|_W) \in \mathcal{T}$ が成り立つ．従って $\exists \mu \in \Lambda,\ W = U_\mu$ が成り立つから，制限 $\varphi_\lambda|_{W\times F}$ は $\varphi_\mu \in \mathrm{LT}(B)$ と等しい．

(4) $\forall \varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathrm{LT}(B)$ をとる．同値関係 (6.1.1) の定義より $\forall (b,\, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$\varphi_\beta(b,\, f) = [(\beta,\, b,\, f)] = [(\alpha,\, b,\, \theta_\alpha(b)\cdot f)] = \varphi_\alpha\bigl(b,\, \theta_\alpha(b)\cdot f\bigr)$$

が成り立つ．

(5) 条件-(4) より，$\mathrm{LT}(B)$ はファイバー束の定義の条件-(5) を充たす．

以上で題意のファイバー束の構成が完了した． ■

【例 6.1.1】S^2 上のファイバー束

- ファイバー S^1
- 底空間 S^2
- 構造群 $\mathrm{SO}(2)$

として，ファイバー束 $S^1 \hookrightarrow E \to S^2$ を構成しよう．

1 の原始 m 乗根を $\zeta_m \coloneqq e^{2\pi \mathrm{i}/m}$ とおく．写像

$$\psi\colon \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathrm{Homeo}(S^{2n+1}),\ \zeta_m^k \longmapsto \bigl((z_1,\, \cdots,\, z_{n+1}) \longmapsto (\zeta_m^k z_1,\, \cdots,\, \zeta_m^k z_{n+1})\bigr)$$

は群準同型になる．実際，$\mathbb{Z}_m$ の勝手な元 ζ_m^k, ζ_m^l を取ってくると，$\forall z = (z_1,\, \cdots,\, z_{n+1}) \in S^{2n+1}$ に対して

$$\bigl|\psi(\zeta_m^k)(z)\bigr| = \sum_{i=1}^{n+1} \bigl|\zeta_m^k z_i\bigr|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1$$

なので $\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathrm{Homeo}(S^{2n+1})$ であり，かつ

$$\begin{aligned}\psi(1)(z) &= z = \mathrm{id}_{S^{2n+1}}(z),\\ \psi(\zeta_m^k\zeta_m^l)(z) &= \zeta_m^k\zeta_m^l z = \zeta_m^k(\zeta_m^l z) = \Bigl(\psi(\zeta_m^k)\circ\psi(\zeta_m^l)\Bigr)(z)\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに写像

$$\mathbb{Z}_m \times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1},\ (\zeta_m^k,\, z) \longmapsto \psi(\zeta_m^k)(z)$$

は連続写像だから，$\mathbb{Z}_m$ の S^{2n+1} への作用が定義された．

定義 6.3: レンズ空間

- $2n+1$ 次元の**レンズ空間** (lens space) とは，$\mathbb{Z}_m$ の S^{2n+1} への作用による軌道空間

$$L_m^{2n+1} := S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$$

のことを言う．

- 自然な包含 $S^{2n+1} \hookrightarrow S^{2n+3},\ (z_1,\, \cdots,\, z_{n+1}) \longmapsto (z_1,\, \cdots,\, z_{n+1},\, 0)$ によって，$2n+1$ 次元レンズ空間の族 $\{L_m^{2n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は有向集合 $(\mathbb{Z}_{\geq 0},\, \leq)$ 上の図式をなす．**無限次元レンズ空間**とは，この図式上の帰納極限

$$\boldsymbol{L_m^\infty} := \varinjlim_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} L_m^{2n+1}$$

のことを言う．

$m \geq 1$ とし，3 次元レンズ空間 L_m^3 を考える．$(z_1,\, z_2) \in S^3$ の同値類を $[(z_1,\, z_2)] \in S^3/\mathbb{Z}_m$ と書くと，写像

$$\pi\colon L_m^3 \longrightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ [(z_1,\, z_2)] \longmapsto \frac{z_1}{z_2}$$

は[a]well-defined な全射になる．

$\boldsymbol{m=0}$　全空間 $E = S^2 \times S^1$ として，自明束

$$S^1 \hookrightarrow S^2 \times S^1 \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} S^2$$

$\boldsymbol{m=1}$　全空間 $E = L_1^3 = S^3$ として，**Hopf-fibration**

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$$

$\boldsymbol{m>1}$　Hopf 写像 $S^3 \longrightarrow S^2$ は商写像 $S^3 \twoheadrightarrow L_m^3$ を使った合成

$$S^3 \twoheadrightarrow L_m^3 \xrightarrow{\pi} S^2$$

からなる．このときファイバーは $S^1/\mathbb{Z}_m \approx S^1$ となり，結果的に S^1 バンドル

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$$

が実現される．

[a] $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と言うのは，Riemann 球面を考えている．

6.2　主束

位相群 G は，自分自身に**左移動** (left transition) として左から作用しているとする：

$$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(G),\ g \longmapsto (x \longmapsto gx)$$

定義 6.4: 主束

位相空間 B 上の**主 G 束** (principal G-bundle) とは，ファイバー束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ であって，構造群 G がファイバー G に左移動として作用しているもののこと．

命題 6.2: 主 G 束における右作用

主 G 束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ を与える．このとき，位相群 G は全空間 P に右から自由に作用し，その軌道空間が B になる．

証明 $\forall p \in P$ を 1 つとる．$p \in \pi^{-1}(U)$ を充たす任意の B の開集合 $U \subset B$ をとり，その上の任意の局所自明化 $\varphi\colon U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ をとる．φ は同相写像だから $\varphi(u,\, g) = p$ を充たす $u \in U,\, g \in G$ が存在する．以上の準備の下で，写像 $\phi\colon P \times G \longrightarrow P$ を

$$\phi(p,\, g') \coloneqq \varphi(u,\, gg')$$

と定義する．

ϕ は well-defined U 上の別の局所自明化 $\varphi'\colon U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ をとる．このとき変換関数 $\theta_{\varphi,\,\varphi'}\colon U \longrightarrow G$ が存在して

$$p = \varphi(u,\, g) = \varphi'(u,\, \theta_{\varphi,\,\varphi'}(u) \cdot g)$$

が成り立つ．故に

$$\varphi(u,\, gg') = \varphi'\bigl(u,\, \theta_{\varphi,\,\varphi'}(u) \cdot (gg')\bigr) = \varphi'\bigl(u,\, (\theta_{\varphi,\,\varphi'}(u) \cdot g)g'\bigr)$$

であり，ϕ は局所自明化の取り方によらない．

ϕ は自由 $\forall p \in \pi^{-1}(U)$ をとる．$\phi(p,\, g') = p$ ならば

$$\phi(p,\, g') = \varphi(u,\, gg') = p = \varphi(u,\, g1_G)$$

が成り立つが，局所自明化は全単射なので $gg' = g \implies g' = 1_G$ が従う．i.e. 右作用 ϕ は自由である．

軌道空間が B G の $U \times G$ への右作用による軌道空間は $(U \times G)/G = U \times \{1_G\} = U$ となる[*2]から，G の P への右作用 $\phi\colon P \times G \longrightarrow P$ による軌道空間は $P/G = B$ となる．

■

[*2] $\forall g \in G$ に対して $g = 1_G \cdot g \in 1_G \cdot G$ である．

定理 6.1:

コンパクト Hausdorff 空間 P と，P に自由に作用しているコンパクト Lie 群 G を与える．このとき，軌道空間への商写像

$$\pi\colon P \twoheadrightarrow P/G$$

は主 G 束である．

<u>証明</u>　[2, p.88 Theorem 5.8.] を参照 ■

6.2.1　主束からファイバー束を構成する

位相群 G が位相空間 $F,\, F'$ の両方に作用しているとする．このとき G を構造群に持つファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ を与えると，命題 6.1 より<u>全く同一の変換関数を持つ</u>別のファイバー束 $F' \hookrightarrow E' \xrightarrow{\pi'} B$ を定義することができる．このような操作を**ファイバーの取り替え**と呼ぶ．特に，ファイバーの取り替えによって，構造群 G を持つファイバー束

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

から主 G 束

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] & P(E) \arrow[d, "\pi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

を得ることができる（これを **underlying principal bundle** と呼ぶ）．

逆に，命題 6.1 を使って与えられた主 G 束と位相群 G の位相空間 F への作用からファイバー束を得ることもできる命題 6.1 を使わない構成法もある：

命題 6.3: Borel 構成

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ を主 G 束とし，位相群 G の位相空間 F への作用 $\Theta\colon G \times F \longrightarrow F$ を与える．

- 積空間 $P \times F$ 上の同値関係を次のように定義する[a]：

$$\sim \coloneqq \left\{\, \big((p,\, f),\, (p\cdot g,\, g^{-1}\cdot f)\big) \in (P\times F)\times(P\times F) \;\big|\; g \in G \,\right\}$$

  同値関係 $\sim$ による商空間を $P \times_G F \coloneqq (P\times F)/\sim$ とおく．
- $(p,\, f) \in P \times F$ の $\sim$ による同値類を $[p,\, f]$ と書く．このとき写像

$$q\colon P\times_G F \longrightarrow B,\; [p,\, f] \longmapsto \pi(p)$$

は well-defined である．

このとき，$F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} B$ は構造群 G を持ち，**変換関数が $\boldsymbol{G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B}$ と同じ**であるような ファイバー束になる．

[a] G は命題 6.2 の方法で P に右から自由に作用しているとする．

証明 ■

6.3 構造群の収縮

G を構造群とするファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ を，部分位相群 $H \subset G$ を構造群に持つファイバー束と見做せる場合がある．このようなとき，構造群が **$\boldsymbol{H}$ に収縮した** (reduced to H) という．

命題 6.4:

位相群 G およびその位相部分群 $H \subset G$ を与える．H は G に左移動として作用し，$H \hookrightarrow Q \xrightarrow{\pi} B$ が主 H 束であるとする．
このとき，Borel 構成による $G \hookrightarrow Q \times_H G \xrightarrow{q} B$ は主 G 束である．

証明 ■

定義 6.5: 収縮可能

- 与えられた主 G 束 $G \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ に対して，構造群 G が部分群 $H \subset G$ に**収縮できる**とは，ある主 H 束 $H \hookrightarrow Q \xrightarrow{q} B$ が存在して可換図式 6.2 が成り立ち，かつ写像 r が G-同値になることを言う．
- （必ずしも主束でない）一般のファイバー束に対して構造群が収縮するとは，underlying principal bundle が収縮することをいう．

$$\begin{tikzcd}
Q \times_H G \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "q"'] & & E \arrow[dl, "\pi"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

図 6.2: 構造群の収縮

6.4 束写像と引き戻し

定義 6.6: 束写像

構造群 G およびファイバー F を持つ 2 つのファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B,\ F \hookrightarrow E' \xrightarrow{\pi'} B'$ を与える．**ファイバー束の射** (morphism of fiber bundle) とは，連続写像の組 $(\tilde{f}\colon E \longrightarrow E',\ f\colon B \longrightarrow B')$ であって以下の条件を充たすもののこと：

- 図式 6.3 が可換になる
- $\forall b \in B$ に対し，$b \in U$ を充たす B の任意の開集合 U と，その上の任意の局所自明化 $\phi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ をとる．また，$f(b) \in U'$ を充たす任意の B' の開集合 U'，および U' 上の任意の局所自明化 $\phi'\colon U' \times F \longrightarrow \pi'^{-1}(U')$ をとる．このとき，合成

$$\{b\} \times F \xrightarrow{\phi} \pi^{-1}(\{b\}) \xrightarrow{\tilde{f}} p'^{-1}\big(\{f(b)\}\big) \xrightarrow{\phi'^{-1}} \big\{f(b)\big\} \times F$$

は連続写像 $F \longmapsto F,\ f \longmapsto \theta_{\phi,\,\phi'}(b) \cdot f$ に等しい．
- 特に，写像 $U \cap f^{-1}(U') \longrightarrow G,\ b \longmapsto \theta_{\phi,\,\phi'}(b)$ は連続である．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

図 6.3: 束写像

- **ファイバー束の同型射**とは，定義 6.6 の意味での束写像 $(\tilde{f},\ f)$ であって，逆向きの束写像 $(\tilde{g},\ g)$ が存在して合成が恒等射になるようなもののことを言う．
- **ゲージ変換** (gauge transformation) とは，ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ から自分自身への束写像 $(g,\ \mathrm{id}_B)$ のことを言う．i.e. 図式 6.4 が可換になる．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E \arrow[dl, "\pi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

図 6.4: ゲージ変換

! ゲージ変換全体の集合は群をなす

定義 6.7: 引き戻し

構造群 G を持つファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ と，連続写像 $f\colon B' \longrightarrow B$ を与える．ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ の**引き戻し** (pullback) とは，以下の 2 つ組のことを言う：

- 位相空間

$$f^*(E) \coloneqq \left\{ (b',\, e) \in B' \times E \;\middle|\; \pi(e) = f(b') \right\}$$

- 連続な全射

$$q\colon f^*(E) \longrightarrow B',\ (b',\, e) \longmapsto b'$$

引き戻しの定義から，図式 6.5 は可換図式になる．

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

図 6.5: 引き戻し

命題 6.5:

ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ の引き戻しは構造群 G を持つファイバー束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{q} B'$ をなす．また，標準的射影 $f^*(E) \longrightarrow E$ は束写像になる．

<u>**証明**</u> ■

命題 6.6:

構造群 G を持つ 2 つのファイバー束 $F \hookrightarrow E' \xrightarrow{\pi'} B'$，$F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ と，定義 6.6 の意味での束写像 $(\tilde{f},\, f)$ を与える（可換図式 6.6a）．このとき図式 6.6b に示す分解 $f^* \circ \beta = \tilde{f}$ が存在して $(\beta,\, \mathrm{id}_{B'})$ が束写像となる．

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi'"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, dashed, "\beta"] \arrow[dr, "\pi'"] & f^*(E) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

(b)

第 7 章

ファイブレーション・コファイブレーション・ホモトピー群

(2023/5/11) この章は未完である

この章において $I \coloneqq [0,\, 1]$ とおく．

定義 7.1: 道

X を位相空間とする．

- X における**道** (path) とは，連続写像 $\alpha\colon I \longrightarrow X$ のこと．点 $\alpha(0),\, \alpha(1) \in Y$ のことをそれぞれ道 α の**始点**, **終点**と呼ぶ．特に始点と終点が一致する道のことを**ループ** (loop) と呼ぶ．
- 点 $x_0 \in X$ における**不変な道** (constant path) とは，定数写像 $\mathrm{const}_{x_0}\colon I \longrightarrow X,\ t \longmapsto x_0$ のこと．
- X における 2 つの道 $\alpha,\, \beta\colon I \longrightarrow X$ は $\alpha(1) = \beta(0)$ を充たすとする．このとき**道の積** (product path) を次のように定義する：

$$\alpha\beta\colon I \longrightarrow X,\ t \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0,\, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1), & t \in (\frac{1}{2},\, 1] \end{cases}$$

- X における道 $\alpha\colon I \longrightarrow X$ の**逆の道** (inverse path) を次のように定義する：

$$\alpha^{-1}\colon I \longrightarrow X,\ t \longmapsto \alpha(1-t)$$

定義 7.2: ホモトピー

$X,\, Y$ を位相空間とする．

- 2 つの連続写像 $f_0,\, f_1\colon X \longrightarrow Y$ を繋ぐ**ホモトピー** (homotopy) とは，連続写像 $F\colon X \times I \longrightarrow Y$ であって

$$F|_{X\times\{0\}} = f_0,\quad F|_{X\times\{1\}} = f_1$$

を満たすもののことを言う．

- 2 つの連続写像 $f_0,\ f_1\colon X \longrightarrow Y$ が**ホモトピック** (homotopic) であるとは，f_0 と f_1 を繋ぐホモトピーが存在することを言う．$\boldsymbol{f_0 \simeq f_1}$ と書く．
- ホモトピックは集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ 上の同値関係 $\simeq$ をなす．ホモトピックによる $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ の同値類を α の**ホモトピー類** (homotopy class) と呼び $\boldsymbol{[\alpha]}$ と書く．
- 連続写像の組 $f\colon X \longrightarrow Y,\ g\colon Y \longrightarrow X$ が**ホモトピー同値写像** (homotopy equivalences) であるとは，$g \circ f,\ f \circ g$ がそれぞれ $\mathrm{id}_X,\, \mathrm{id}_Y$ にホモトピックであることを言う[a]．
- 位相空間 $X,\, Y$ の間にホモトピー同値写像が存在するとき，X と Y は同じ**ホモトピー型** (homotopy type) であるという．
- 一点と同じホモトピー型である空間は**可縮** (contractible) であると言われる．
- 商集合 $\left\{\, \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I,\, X) \;\middle|\; \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \,\right\} / \simeq$ の上に well-defined な群演算[b]

$$[\alpha] \cdot [\beta] \coloneqq [\alpha\beta]$$

を定めて群にしたものを X の点 x_0 における**基本群**と呼び，$\boldsymbol{\pi_1(X,\, x_0)}$ と書く．

[a] $f,\, g$ は互いに**ホモトピー逆写像** (homotopy inverse) であると言う場合がある．$f,\, g$ のどちらか一方のみを指してホモトピー同値写像という場合は，ホモトピー逆写像が存在することを意味する．
[b] 右辺に道の積を使った．

以後，ホモトピー $G\colon X \times I \longrightarrow Y$ と言うときは連続写像の族

$$G = \left\{G_t\colon X \longrightarrow Y\right\}_{t \in I}$$

を意味するものとする[*1]．

7.1 ファイブレーション

7.1.1 HLP とファイブレーションの定義

持ち上げ (lifting) の問題とは，次のようなものである：

- 連続写像 $p\colon E \longrightarrow B,\ g\colon X \longrightarrow B$ が与えられる．
- このとき，連続写像 $\tilde{g}\colon X \longrightarrow E$ であって $g = p \circ \tilde{g}$ を充たすようなものは存在するか？

持ち上げと言う名前は，もしこのような $\tilde{f}$ が存在すれば図式

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

が可換になることに由来する．$\tilde{f}$ のことを f の**持ち上げ** (lifting) と呼ぶ．

[*1] これは自動的に 2 つの連続写像 $G_0,\, G_1\colon X \longrightarrow Y$ を繋ぐホモトピーになる．

定義 7.3: ホモトピー持ち上げ性質 (HLP)

連続写像 $p\colon E \longrightarrow B$ が位相空間 Y に対して**ホモトピー持ち上げ性質** (homotopy lifting property) を充たすとは，以下の条件を充たすことを言う：

(HLP) $\iota_0\colon Y \times \{0\} \hookrightarrow Y \times I$ を包含写像とする．

- 連続写像 $\tilde{g}\colon Y \times \{0\} \longrightarrow E$
- 連続写像 $G\colon Y \times I \longrightarrow B$

であって $G \circ \iota_0 = p \circ \tilde{g}$ を充たすもの[a]を任意に与えたとき，（必ずしも一意でない）連続写像 $\tilde{G}\colon Y \times I \longrightarrow E$ が存在して図式 7.1 が可換になる．

[a] i.e. $\forall y \in Y$ に対して $G(y,\, 0) = p\bigl(\tilde{g}(y)\bigr)$ を充たすもの．ホモトピー $G\colon Y \times I \longrightarrow B$ であって $G_0 = p \circ \tilde{g}$ を充たすもの，と言ってもよい．

$$
\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "\forall \tilde{g}"] \arrow[d, hook, "\iota_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "\forall G"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{G}"] & B
\end{tikzcd}
$$

図 7.1: ホモトピー持ち上げ性質 (HLP)

定義 7.4: ファイブレーション

連続写像 $p\colon E \longrightarrow B$ が**ファイブレーション** (fibration)[a] であるとは，任意の位相空間 Y に対してホモトピー持ち上げ性質が成り立つことを言う．

[a] 訳語だと**ファイバー空間**と呼ぶこともある．なお，これは **Hurewicz fibration** の定義である．

補題 7.1:

連続写像 $p\colon B \times F \longrightarrow B,\ (b,\, f) \longmapsto b$ はファイブレーションである．

<u>証明</u> 任意の位相空間 X を 1 つ固定し，

- 連続写像 $\tilde{g}\colon X \times \{0\} \longrightarrow B \times F,\ x \longmapsto \bigl(\tilde{g}_1(x),\, \tilde{g}_2(x)\bigr)$
- 連続写像 $G\colon X \times I \longrightarrow B,\ (x,\, t) \longmapsto G(x,\, t)$

であって $G \circ \iota_0 = p \circ \tilde{g}$ を充たすものを任意に与える．このとき $\forall x \in X$ に対して $G(x,\, 0) = \tilde{g}_1(x)$ が成り立つ．従って連続写像 $\tilde{G}\colon X \times I \longrightarrow B \times F,\ (x,\, t) \longmapsto \bigl(G(x,\, t),\, \tilde{g}_2(x)\bigr)$ は $\forall (x,\, t) \in X \times I$ に対して

$$
\begin{aligned}
p\bigl(\tilde{G}(x,\, t)\bigr) &= G(x,\, t), \\
\tilde{G}\bigl(\iota_0(x)\bigr) &= \tilde{G}(x,\, 0) = \bigl(\tilde{g}_1(x),\, \tilde{g}_2(x)\bigr) = \tilde{g}(x)
\end{aligned}
$$

を充たすので X について HLP が成り立つことが示された． ■

次の定理の証明は煩雑なので省略する：

定理 7.1:

連続写像 $p\colon E \longrightarrow B$ を与える．B はパラコンパクトで，かつ B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ であって $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して制限 $p|_{p^{-1}(U_\lambda)}\colon p^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\alpha$ がファイブレーションとなるようなものが存在するとする．このとき，$p\colon E \longrightarrow B$ はファイブレーションである．

次の意味で，ファイブレーションはファイバー束の拡張になっている．

系 7.2: ファイバー束はファイブレーション

パラコンパクトな位相空間 B と，その上のファイバー束 $\pi\colon E \longrightarrow B$ を与える．このとき π はファイブレーションである．

証明 ファイバー束の定義より π はある開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\forall\lambda \in \Lambda$, $\pi|_{\pi^{-1}(U_\lambda)}\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \approx U_\lambda \times F \longrightarrow U_\lambda$ を充たす．従って補題 7.1 より $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して $\pi|_{\pi^{-1}(U_\lambda)}$ はファイブレーションであるから，定理 7.1 より π もファイブレーションである． ■

定義 7.5: ファイブレーションの射

2 つのファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$, $p'\colon E' \longrightarrow B'$ を与える．
ファイブレーションの射とは，連続写像 $f\colon B \longrightarrow B'$, $\tilde{f}\colon E \longrightarrow E'$ の対 $(f, \tilde{f})$ であって図式 7.2 を可換にするもののこと．

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r, "f"] & B'
\end{tikzcd}
$$

図 7.2: ファイブレーションの射

定義 7.6: ファイブレーションの引き戻し

$p\colon E \longrightarrow B$ をファイブレーション，$f\colon X \longrightarrow B$ を連続写像とする．
f による p の**引き戻し** (pullback) $q\colon f^*(E) \longrightarrow X$ を次のように定義する：

- 集合

$$f^*(E) \coloneqq \left\{\, (x,\, e) \in X \times E \;\middle|\; f(x) = p(e) \,\right\}$$

- 連続写像

$$q \coloneqq \mathrm{proj}_1|_{f^*(E)}$$

命題 7.1:

ファイブレーションの引き戻しはファイブレーションである．

証明 任意の位相空間 Y を 1 つ固定し，

- 連続写像 $\tilde{g}\colon Y \times \{0\} \longrightarrow f^*(E),\ y \longmapsto \bigl(\tilde{g}_1(y),\ \tilde{g}_2(y)\bigr)$
- 連続写像 $G\colon Y \times I \longrightarrow X,\ (y,\ t) \longmapsto G(y,\ t)$

であって $\forall y \in Y,\ G(y,\ 0) = q\bigl(\tilde{g}(y)\bigr) = \tilde{g}_1(y)$ を充たすものを任意にとる．

- 連続写像 $\tilde{g}_2\colon Y \times \{0\},\ y \longmapsto \tilde{g}_2(y)$
- 連続写像 $f \circ G\colon Y \times I \longrightarrow B$

は，$f^*(E)$ の定義により $\forall y \in Y$ に対して $f\bigl(G(y,\ 0)\bigr) = f\bigl(\tilde{g}_1(y)\bigr) = p\bigl(\tilde{g}_2(y)\bigr)$ を充たす．従って $p\colon E \longmapsto B$ がファイブレーションであることにより，ある連続写像 $\tilde{F}\colon Y \times I \longrightarrow E$ が存在して $p\bigl(\tilde{F}(y,\ t)\bigr) = f\bigl(G(y,\ t)\bigr),\ \tilde{F}(y,\ 0) = \tilde{g}_2(y)$ を充たす．従って連続写像

$$\tilde{G}\colon Y \times I \longrightarrow X \times E,\ (y,\ t) \longmapsto \bigl(G(x,\ t),\ \tilde{F}(x,\ t)\bigr)$$

を考えると，$\operatorname{Im}\tilde{G} \subset f^*(E)$ でかつ $\forall (y,\ t) \in Y \times I$ に対して

$$\begin{aligned} q\bigl(\tilde{G}(y,\ t)\bigr) &= G(y,\ t), \\ \tilde{G}(y,\ 0) &= \bigl(G(y,\ 0),\ \tilde{F}(y,\ 0)\bigr) = \bigl(\tilde{g}_1(y),\ \tilde{g}_2(y)\bigr) = \tilde{g}(y) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. 連続写像 $\tilde{G}$ によって位相空間 Y に関する HLP が充たされる． ■

7.1.2 ファイブレーションのファイバー

定理 7.3: ファイバーの基本性質

B を弧状連結空間とし，ファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ を与える．B の各点に対して定まる E の部分空間 $E_b \coloneqq p^{-1}(\{b\})$ のことを**ファイバー** (fiber) と呼ぶ．このとき，以下が成り立つ：

(1) **全てのファイバーは同じホモトピー型である**

(2) B 上の任意の道 $\alpha\colon I \longrightarrow B$ はホモトピー同値写像 $h_\alpha\colon E_{\alpha(0)} \longrightarrow E_{\alpha(1)}$ を引き起こし，そのホモトピー類 $\alpha_* \coloneqq [h_\alpha]$ は α と端点を共有し，かつホモトピックであるような道の取り方によらない．

(3) 特に，well-defined な群準同型

$$\begin{aligned} \psi\colon \pi_1(B,\ b_0) &\longrightarrow \left\{ \substack{\text{ホモトピー同値写像 } E_{b_0} \longrightarrow E_{b_0} \text{ の} \\ \text{ホモトピー類全体}} \right\} \\ [\alpha] &\longmapsto (\alpha^{-1})_* \end{aligned}$$

が存在する．

!

- ファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ が与えられたとき，勝手な点 $b \in B$ に対して定まる部分空間 $E_b \subset E$ と同じホモトピー型であるような任意の位相空間のことをファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ の**ファイバー**と呼ぶ場合がある．
- F を B のある指定された点におけるファイバーとして，ファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ のことを $\boldsymbol{F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B}$ と書くことがある．

これらの記法は定理 7.3-(1) に由来する．

証明 まず「h_α がホモトピー同値写像であること」を除いて (2) を示す．B は弧状連結なので，$\forall b_0,\, b_1 \in B$ および道 $\alpha\colon I \longrightarrow B$ s.t. $\alpha(0) = b_0,\, \alpha(1) = b_1$ を任意にとることができる．

- 包含写像 $\iota_{b_0}\colon E_{b_0} \hookrightarrow E$
- ホモトピー $H\colon E_{b_0} \times I \longrightarrow B,\ (e,\, t) \longmapsto \alpha(t)$

は以下の可換図式を充たす：

$$\begin{tikzcd} E_{b_0} \times \{0\} \arrow[r, hook, "\iota_{b_0}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ E_{b_0} \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

$p\colon E \longrightarrow B$ はファイブレーションなので，HLP により H の持ち上げ $\tilde{H}\colon E_{b_0} \times I \longrightarrow E$ が存在して以下の可換図式が成り立つ：

$$\begin{tikzcd} E_{b_0} \times \{0\} \arrow[r, hook, "\iota_{b_0}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ E_{b_0} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

ホモトピー $\tilde{H}\colon E_{b_0} \times I \longrightarrow E$ は $\forall e \in E_{b_0}$ に対して $p\bigl(\tilde{H}(e,\, 1)\bigr) = H(e,\, 1) = \alpha(1) = b_1$ を充たすので $\operatorname{Im} \tilde{H}_1 \subset E_{b_1}$ がわかる．i.e. α によって連続写像 $h_\alpha \coloneqq \tilde{H}_1\colon E_{b_0} \longrightarrow E_{b_1}$ が引き起こされた．ここで $\alpha_* \coloneqq [\tilde{H}_1]$ と定める．これが道 α と端点を共有し，かつホモトピックであるような道の取り方によらないことを示す．h_α がホモトピー同値写像であることは後に (1) と同時に示す．

道 $\alpha'\colon I \longrightarrow B$ は α と同一の端点を持ち，かつ α にホモトピックであるとする．すると

- 包含写像 $E_{b_0} \hookrightarrow E$
- ホモトピー $H'\colon E_{b_0} \times I \longrightarrow B,\ (e,\, t) \longmapsto \alpha'(t)$

に対して HLP を用いることで次の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd} E_{b_0} \times \{0\} \arrow[r, hook, "\iota_{b_0}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ E_{b_0} \times I \arrow[r, "H'"] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{H}'"] & B \end{tikzcd}$$

示すべきは $\tilde{H}_1 \simeq \tilde{H}'_1$ である．

α と α' を繋ぐホモトピー $F\colon I \times I \longrightarrow B$ をとる．すると連続写像

$$\Lambda\colon (E_{b_0} \times I) \times I \longrightarrow B,\ (e,\, s,\, t) \longmapsto F(s,\, t)$$

は H と H' を繋ぐホモトピーになる．このとき連続写像

$$\Gamma\colon (E_{b_0} \times I) \times \{0,\, 1\} \cup (E_{b_0} \times \{0\}) \times I \longrightarrow E,$$
$$(e,\, s,\, t) \longmapsto \begin{cases} \tilde{H}(e,\, s), & t = 0 \\ \tilde{H}'(e,\, s), & t = 1 \\ e, & s = 0 \end{cases}$$

は図式

$$\begin{tikzcd}
(E_{b_0} \times I) \times \{0,\, 1\} \cup (E_{b_0} \times \{0\}) \times I \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
(E_{b_0} \times I) \times I \arrow[r, "\Lambda"] & B
\end{tikzcd}$$

を可換にする．

ところで $U \coloneqq I \times \{0,\, 1\} \cup \{0\} \times I$ とおいたとき，同相写像 $\varphi\colon I^2 \longrightarrow I^2$ であって $\varphi(U) = I \times \{0\}$ とするようなものが存在する．この φ を使うと可換図式

$$\begin{tikzcd}
E_{b_0} \times I \times \{0\} \arrow[d, hook] & E_{b_0} \times U \arrow[l, "\mathrm{id} \times \varphi"'] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
E_{b_0} \times I \times I & (E_{b_0} \times I) \times I \arrow[l, "\mathrm{id} \times \varphi"'] \arrow[r, "\Lambda"] & B
\end{tikzcd}$$

が得られる．$p\colon E \longrightarrow b$ はファイブレーションなので図式の外周部に HLP を使うことができて，Λ の持ち上げ $\tilde{\Lambda}\colon E_{b_0} \times I^2 \longrightarrow E$ を得る：

$$\begin{tikzcd}
E_{b_0} \times U \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
E_{b_0} \times I^2 \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{\Lambda}"] & B
\end{tikzcd}$$

構成より $\tilde{\Lambda}$ は $\tilde{H}$ と $\tilde{H}'$ を繋ぐホモトピーであり，$E_{b_0} \times \{1\} \times I$ に制限することで $\tilde{H}_1$ と $\tilde{H}'_1$ を繋ぐホモトピーになる．以上で (2) の証明が部分的に完了した．

次に (1) および h_α がホモトピー同値写像であることを示す．2 つの道 $\alpha,\ \beta\colon I \longrightarrow B$ であって $\alpha(1) = \beta(0)$ を充たすものをとる．道の積の定義より $(\alpha\beta)_* = \beta_* \circ \alpha_*$ が成り立つ．特に $\beta = \alpha^{-1}$ の場合を考えると $(\alpha^{-1})_* \circ \alpha_* = (\mathrm{const}_{b_0})_* = [\mathrm{id}_{E_{b_0}}]$ が成り立つ．B は弧状連結空間なので (1) および (2) の証明が完了した．

最後に (3) を示す． ■

7.1.3 道の空間におけるファイブレーション

定義 7.7: path space と loop space

$(Y,\ y_0)$ を基点付き位相空間とする．

- **道の空間** (path space) とは，位相空間[a]

$$P_{y_0}Y \coloneqq \left\{ \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I,\ Y) \;\middle|\; \alpha(0) = y_0 \right\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I,\ Y)$$

のことを言う．

- **ループ空間** (loop space) とは，位相空間

$$\Omega_{y_0}Y \coloneqq \left\{ \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I,\ Y) \;\middle|\; \alpha(0) = \alpha(1) = y_0 \right\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I,\ Y)$$

のことを言う．

[a] コンパクト生成空間と見做して位相を入れる．

! 基点 $y_0 \in Y$ はしばしば省略して書かれる．

さらに，以降では次の記法を使うことがある：

- 位相空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I,\ Y)$ のことを**自由な道の空間** (free path space) と呼び，$\boldsymbol{Y^I}$ と略記する場合がある．
- 連続写像[*2] $p\colon Y^I \longrightarrow Y,\ \alpha \longmapsto \alpha(1)$

命題 7.2:

Y を弧状連結空間とし，2 点 $y_0,\ y_1 \in Y$ をとる．このときループ空間 $\Omega_{y_0}Y,\ \Omega_{y_1}Y$ は同じホモトピー型である．

証明 Y は弧状連結なので $y_0,\ y_1$ を繋ぐ道 $\eta\colon I \longrightarrow Y$ が存在する．このとき連続写像[*3]

$$f\colon \Omega_{y_0}Y \longrightarrow \Omega_{y_1}Y,\ \alpha \longmapsto \eta\alpha\eta^{-1},$$
$$g\colon \Omega_{y_1}Y \longrightarrow \Omega_{y_0}Y,\ \beta \longmapsto \eta^{-1}\beta\eta$$

は $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\Omega_{y_0}Y}$，$f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\Omega_{y_1}Y}$ を充たす． ■

[*2] p の $P_{y_0}Y$ への制限もまた連続である．
[*3] 定義に道の積を使っている．

定理 7.4: 道の空間のファイブレーション

(1) 連続写像 $p\colon Y^I \longrightarrow Y,\ \alpha \longmapsto \alpha(1)$ はファイブレーションであり，点 y_0 におけるファイバーは $P_{y_0}Y$ と同相である．
(2) 連続写像 $p\colon P_{y_0} \longrightarrow Y,\ \alpha \longmapsto \alpha(1)$ はファイブレーションであり，点 y_0 におけるファイバーは $\Omega_{y_0}Y$ と同相である．
(3) Y^I は Y と同じホモトピー型である．$p\colon Y^I \longrightarrow Y$ がホモトピー同値写像となる．
(4) $P_{y_0}Y$ は可縮（i.e. 一点と同じホモトピー型を持つ）

証明 任意の位相空間 X を 1 つ固定する．

(1)
- 連続写像 $g\colon X \times \{0\} \longrightarrow Y^I$
- ホモトピー $H\colon X \times I \longrightarrow Y$

であって図式

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & Y^I \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

を可換にするものを与える．このとき $\forall x \in X$ を 1 つ固定すると $g(x)$ は点 $H(x,\,0) \in Y$ を終点に持つ道となり，制限 $H|_{\{x\}\times I}\colon I \longrightarrow Y$ は $H(x,\,0)$ を終点に持つ道となる．従って H の持ち上げ $\tilde{H}\colon X \times I \longrightarrow Y^I$ は，（もし存在すれば）道 $\tilde{H}(x,\,0)$ が道 $g(x)$ に一致し，かつ道 $\tilde{H}(x,\,s)$ の終点が点 $H(x,\,s) \in Y$ に一致せねばならない．実際，写像 $\tilde{H}\colon X \times I \longrightarrow Y^I$ を

$$\tilde{H}(x,\,s)(t) := \begin{cases} g(x)\bigl((1+s)t\bigr), & t \in [0,\,\frac{1}{1+s}] \\ H\bigl(x,\,(1+s)t-1\bigr), & t \in [\frac{1}{1+s},\,1] \end{cases}$$

と定義するとこれは連続で[*4]，かつ $\forall s \in I$ に対して $\tilde{H}(x,\,0) = g(x),\ p\bigl(\tilde{H}(x,\,s)\bigr) = \tilde{H}(x,\,s)(1) = H(x,\,s)$ を充たす．i.e. 位相空間 X に対して HLP が充たされる．X は任意だったので $p\colon Y^I \longrightarrow y$ はファイブレーションである．

点 $y_0 \in Y$ におけるファイバー $p^{-1}(\{y_0\})$ は y_0 を終点とする Y の道全体の集合である．従って連続写像

$$\begin{aligned} P_{y_0}Y &\longrightarrow p^{-1}(\{y_0\}) \\ \alpha &\longmapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

は同相 $p^{-1}(\{y_0\}) \approx P_{y_0}Y$ を与える．

(2) (1) と同様．

(3) 連続写像 $i\colon Y \longrightarrow Y^I,\ y \longmapsto (t \longmapsto y)$ を考えると，$p \circ i = \mathrm{id}_Y$ である．
一方，連続写像 $F\colon Y^I \times I \longrightarrow Y^I,\ (\alpha,\,s) \longmapsto \bigl(t \longmapsto \alpha(s(1-t)+t)\bigr)$ は $\mathrm{id}_{Y^I}\colon \alpha \longmapsto \alpha$ と $i \circ p\colon \alpha \longmapsto \bigl(t \longmapsto \alpha(1)\bigr) = i \circ p(\alpha)$ を繋ぐホモトピーである．i.e. $i \circ p \simeq \mathrm{id}_{Y^I}$ がわかった．

(4) (3) と同様．

[*4] コンパクト生成空間の位相を入れたため．

■

7.1.4 ファイブレーションのホモトピー

2 つのファイブレーションの射を繋ぐホモトピーを定義する．

定義 7.8: ファイブレーションのホモトピー

2 つのファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B,\ p'\colon E' \longrightarrow B'$ およびそれらの間のファイブレーションの射 $(\tilde{f}_i,\, f_i),\quad i = 0,\, 1$ を与える．
$(\tilde{f}_0,\, f_0)$ と $(\tilde{f}_1,\, f_1)$ を繋ぐ**ファイバー・ホモトピー** (fiber homotopy) とは,

- ホモトピー $\tilde{H}\colon E \times I \longrightarrow E'$
- ホモトピー $H\colon B \times I \longrightarrow B'$

の組であって図式 7.3 を可換にし,

$$\tilde{H}_0 = \tilde{f}_0, \qquad \tilde{H}_1 = \tilde{f}_1,$$
$$H_0 = f_0, \qquad H_1 = f_1$$

を充たすもののこと,

$$\begin{tikzcd}
E \times I \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "p \times \mathrm{id}_I"] & E' \arrow[d, "p"] \\
B \times I \arrow[r, "H"] & B'
\end{tikzcd}$$

図 7.3: ファイバー・ホモトピー

定義 7.9: ファイブレーションのホモトピー同値

2 つのファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B,\ p'\colon E' \longrightarrow B'$ が同じ**ファイバー・ホモトピー型** (fiber homotopy type) であるとは，2 つのファイブレーションの射 $(\tilde{f},\, \mathrm{id}_B),\ (\tilde{g},\, \mathrm{id}_B)$ $^{\mathrm{w}/}$ $\tilde{f}\colon E \longrightarrow E',\, \tilde{g}\colon E' \longrightarrow E$ であって，以下の条件をみたすものが存在することを言う：

- ホモトピー $\tilde{H}\colon E \times I \longrightarrow E$ であって $\forall (e,\, t) \in E \times I$ に対して

$$\begin{aligned} p\bigl(\tilde{H}(e,\, t)\bigr) &= p(e), \\ \tilde{H}_0 &= \tilde{g} \circ \tilde{f}, \\ \tilde{H}_1 &= \mathrm{id}_E \end{aligned}$$

を充たすものが存在する．

- ホモトピー $\tilde{G}\colon E'\times I \longrightarrow E'$ であって $\forall(e',\,t)\in E'\times I$ に対して

$$\begin{aligned} p'\big(\tilde{G}(e',\,t)\big) &= p'(e'),\\ \tilde{G}_0 &= \tilde{f}\circ\tilde{g},\\ \tilde{G}_1 &= \mathrm{id}_{E'} \end{aligned}$$

を充たすものが存在する．

i.e. 合成 $(\tilde{g}\circ\tilde{f},\,\mathrm{id}_B)$, $(\tilde{f}\circ\tilde{g},\,\mathrm{id}_B)$ がそれぞれ $(\mathrm{id}_E,\,\mathrm{id}_B)$, $(\mathrm{id}_{E'},\,\mathrm{id}_B)$ に，B についてはホモトピー $B\times I\longrightarrow B,\ (b,\,t)\longmapsto b$ を通じてファイバー・ホモトピックであるようなものが存在することを言う．
このとき 2 つの連続写像 $\tilde{f},\ \tilde{g}$ のことを**ファイバー・ホモトピー同値写像** (fiber homotopy equivalences) と呼ぶ．

ファイバー・ホモトピー同値写像 $\tilde{f}\colon E\longrightarrow E'$ をファイバー E_{b_0} に制限した連続写像 $\tilde{f}|_{E_{b_0}}\colon E_{b_0}\longrightarrow E'_{b_0}$ はホモトピー同値写像である．

7.1.5 連続写像をファイブレーションに置き換える

連続写像 $f\colon X\longrightarrow Y$ を与える．この節では位相空間 X は空でなく，位相空間 Y は弧状連結であるとする．
定理 7.4-(1) と同様の理由により，連続写像 $q\colon Y^I\longrightarrow Y,\ \alpha\longmapsto\alpha(0)$ はファイブレーションである．

定義 7.10: mapping path space

- ファイブレーション $q\colon Y^I\longrightarrow Y,\ \alpha\longmapsto\alpha(0)$ の $f\colon X\longrightarrow Y$ に沿った引き戻し $P_f\coloneqq f^*(Y^I)$ は[a] **mapping path space** と呼ばれる（可換図式 7.4)．

$$P_f\coloneqq\left\{\,(x,\,\alpha)\in X\times Y^I\;\middle|\;f(x)=q(\alpha)=\alpha(0)\,\right\}$$

である．
- 連続写像

$$p\colon P_f\longrightarrow Y,\ (x,\,\alpha)\longmapsto\alpha(1)$$

のことを **mapping path fibration** と呼ぶ[b]．

[a] 命題 7.1 より $\mathrm{proj}_1\colon P_f\longrightarrow X$ もまたファイブレーションである．
[b] p がファイブレーションであることは定理 7.5 で示す．

$$
\begin{tikzcd}
P_f \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & Y^I \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
$$

図 7.4: mapping path space

> **定理 7.5: ファイブレーションと連続写像のホモトピー同値性**
>
> 任意の連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ を与える．
>
> (1) ホモトピー同値写像 $h\colon X \longrightarrow P_f$ であって図式 7.5 を可換にするものが存在する．
> (2) mapping path fibration $p\colon P_f \longrightarrow Y$ はファイブレーションである．
> (3) $f\colon X \longrightarrow Y$ がファイブレーションならば h はファイバー・ホモトピー同値写像である．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\exists h"] \arrow[dr, "f"'] & & P_f \arrow[dl, "p"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
$$

図 7.5: ファイブレーションと連続写像のホモトピー同値性

> **!** 連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が与えられたとき，「$F \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ はファイブレーションである」と言うことがある．この場合 X とホモトピー同値な mapping path space P_f を使ってファイブレーション $F \hookrightarrow P_f \xrightarrow{p} Y$ を考えている．

証明 (1) 連続写像 $h\colon X \longrightarrow P_f,\ x \longmapsto (x,\ \mathrm{const}_{f(x)})$ を考える．[*5]．すると $f = p \circ h$ であるから図式 7.5 は可換になる．

h のホモトピー逆写像が $\mathrm{proj}_1\colon P_f \longrightarrow X,\ (x,\ \alpha) \longmapsto x$ であることを示す．$\mathrm{proj}_1 \circ h = \mathrm{id}_X$ は即座に従う．一方，ホモトピー $F\colon P_f \times I \longrightarrow P_f,\ \big((x,\ \alpha),\ s\big) \longmapsto \big(x,\ (t \longmapsto \alpha(st))\big)$ は $\forall (x,\ \alpha) \in P_f$ に対して

$$
\begin{aligned}
F_0(x,\ \alpha) &= (x,\ \mathrm{const}_{\alpha(0)}),\\
F_1(x,\ \alpha) &= (x,\ \alpha)
\end{aligned}
$$

を充たす．P_f の定義より $\alpha(0) = f(x)$ が成り立つから $F_0 = h \circ \mathrm{proj}_1,\ F_1 = \mathrm{id}_{P_f}$ がわかる．i.e. F は $h \circ \mathrm{proj}_1$ と id_{P_f} を繋ぐホモトピーである．

(2) 任意の位相空間 A を一つ固定し，

- 連続写像 $g\colon A \times \{0\} \longrightarrow P_f,\ a \longmapsto \big(g_1(a),\ g_2(a)\big)$
- ホモトピー $H\colon A \times I \longrightarrow Y$

であって以下の可換図式を充たすものを任意に与える：

[*5] $\mathrm{const}_{f(x)}$ は不変な道 $I \longrightarrow Y,\ t \longmapsto f(x)$.

$$\begin{tikzcd} A \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & P_f \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

従って $\forall a \in A$ に対して $g_2(a)(1) = H(a, 0)$ が，P_f の定義より $g_2(a)(0) = f\bigl(g_1(a)\bigr)$ が成り立つ．
ここで写像 $\tilde{H}\colon A \times I \longrightarrow P_f,\ (a,\, s) \longmapsto \bigl(g_1(a),\, (t \longmapsto \tilde{H}_2(a,\, s)(t))\bigr)$ を

$$\tilde{H}_2(a,\, s)(t) := \begin{cases} g_2(a)\bigl((1+s)t\bigr), & t \in [0,\, \frac{1}{1+s}] \\ H\bigl(a,\, (1+s)t - 1\bigr), & t \in [\frac{1}{1+s},\, 1] \end{cases}$$

で定義するとこれは連続で，かつ $\forall (a,\, s) \in A \times I$ に対して $p\bigl(\tilde{H}(a,\, s)\bigr) = \tilde{H}_2(a,\, s)(1) = H(a,\, s)$，$\tilde{H}(a,\, 0) = \bigl(g_1(a),\, g_2(a)\bigr) = g(a)$ を充たす．i.e. 連続写像 $\tilde{H}$ によって A に対する HLP が充たされる．A は任意だったので $p\colon P_f \longrightarrow Y$ はファイブレーションである．

(3) $f\colon X \longrightarrow Y$ がファイブレーションであるとする．(1) の証明において $h\colon X \longrightarrow P_f$ はファイブレーションの射である．
一方，$\mathrm{proj}_1\colon P_f \longrightarrow X$ はファイブレーションの射でない．従ってまずファイブレーションの射 $g\colon P_f \longrightarrow X$ を構成する必要がある．
- 連続写像 $\mathrm{proj}_1\colon P_f \longrightarrow X$
- ホモトピー $\gamma\colon P_f \times I \longrightarrow P_f,\ \bigl((x,\, \alpha),\, t\bigr) \longmapsto \alpha(t)$

を考えると，P_f の定義から $f \circ \mathrm{proj}_1(x,\, \alpha) = f(x) = \alpha(0) = \gamma\bigl((x,\, \alpha),\, 0\bigr)$ が成り立つ．$f\colon X \longrightarrow Y$ はファイブレーションなので HLP が成り立ち，以下の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd} P_f \times \{0\} \arrow[r, "\mathrm{proj}_1"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ P_f \times I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[ur, dashed, "\exists\tilde{\gamma}"] & Y \end{tikzcd}$$

$\gamma_1(x,\, \alpha) = \alpha(1) = p(x,\, \alpha)$ であるから，$g\colon P_f \longrightarrow X,\ (x,\, \alpha) \longmapsto \tilde{\gamma}((x,\, \alpha),\, 1)$ と定めるとこれはファイブレーションの射になる．その上 $\tilde{\gamma}((x,\, \alpha),\, 0) = \mathrm{proj}_1$ であるから $g \simeq \mathrm{proj}_1$ であり，(1) から g が h のホモトピー逆写像であるとわかる．
あとは $g \circ f$ と id_X を繋ぐホモトピー $\tilde{H}\colon X \times I \longrightarrow X$ であって $f\bigl(\tilde{H}(x,\, t)\bigr) = f(x)$ を充たすものと，$f \circ g$ と id_{P_f} を繋ぐホモトピー $\tilde{G}\colon P_f \times I \longrightarrow P_f$ であって $p\bigl(\tilde{G}\bigl((x,\, \alpha),\, t\bigr)\bigr) = p(x,\, \alpha)$ を充たすものが存在することを示せばよい．実際

$$\tilde{H}\colon X \times I \longrightarrow X,\ (x,\, t) \longmapsto \tilde{\gamma}\bigl((x,\, \mathrm{const}_{f(x)}),\, t\bigr)$$

と定義すれば

$$\begin{aligned} f\bigl(\tilde{H}(x,\, t)\bigr) &= f\Bigl(\tilde{\gamma}\bigl((x,\, \mathrm{const}_{f(x)}),\, t\bigr)\Bigr) = \gamma(x,\, \mathrm{const}_{f(x)}) = f(x), \\ \tilde{H}|_{X \times \{0\}} &= \tilde{\gamma}\bigl((x,\, \mathrm{const}_{f(x)}),\, 0\bigr) = \mathrm{proj}_1(x,\, \mathrm{const}_{f(x)}) = x, \\ \tilde{H}|_{X \times \{1\}} &= \tilde{\gamma}\bigl((x,\, \mathrm{const}_{f(x)}),\, 1\bigr) = g(x,\, \mathrm{const}_{f(x)}) = (g \circ h)(x) \end{aligned}$$

が充たされる．一方

$$\tilde{G}\colon P_f \times I \longrightarrow P_f,\ \bigl((x,\, \alpha),\, s\bigr) \longmapsto \Bigl(\tilde{\gamma}\bigl((x,\, \alpha),\, s\bigr),\, \bigl(t \longmapsto \alpha((1-t)s + t)\bigr)\Bigr)$$

と定義すれば

$$
\begin{aligned}
p\Big(\tilde{G}\big((x,\,\alpha),\,s\big)\Big) &= p\Big(\tilde{\gamma}\big((x,\,\alpha),\,s\big),\,\big(t \longmapsto \alpha((1-t)s+t)\big)\Big) = \alpha(1) = p(x,\,\alpha) \\
\tilde{G}|_{P_f \times \{0\}}(x,\,\alpha) &= \Big(\tilde{\gamma}\big((x,\,\alpha),\,0\big),\,\big(t \longmapsto \alpha(t)\big)\Big) = \big(\mathrm{proj}_1(x,\,\alpha),\,\alpha\big) = (x,\,\alpha), \\
\tilde{G}|_{P_f \times \{1\}}(x,\,\alpha) &= \Big(\tilde{\gamma}\big((x,\,\alpha),\,1\big),\,\big(t \longmapsto \alpha(1)\big)\Big) = \big(g(x,\,\alpha),\,\mathrm{const}_{\alpha(1)}\big) \\
&= \big(g(x,\,\alpha),\,\mathrm{const}_{\gamma(x,\,\alpha,\,1)}\big) \\
&= \big(g(x,\,\alpha),\,\mathrm{const}_{f\left(\tilde{\gamma}(x,\,\alpha,\,1)\right)}\big) \\
&= \big(g(x,\,\alpha),\,\mathrm{const}_{f\left(g(x,\,\alpha)\right)}\big) = h \circ g(x,\,\alpha)
\end{aligned}
$$

が充たされる．

■

7.2 コファイブレーション

7.2.1 HEP とコファイブレーションの定義

拡張 (extension) の問題とは，次のようなものである：

- 連続写像 $i\colon A \longrightarrow X,\ f\colon A \longrightarrow Y$ が与えられる．
- このとき，連続写像 $\tilde{f}\colon X \longrightarrow Y$ であって $\tilde{f} \circ i = f$ を充たすようなものは存在するか？

この状況を可換図式で表すと

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & Y
\end{tikzcd}
$$

のようになる．

定義 7.11: ホモトピー拡張性質 (HEP)

連続写像 $i\colon A \longrightarrow X$ が位相空間 Y に対して**ホモトピー拡張性質** (homotopy extension property) を持つとは，以下の条件を充たすことをいう：

(HEP) $\iota_0\colon A \times \{0\} \hookrightarrow A \times I$ を包含写像とする．

- 連続写像 $\tilde{f}\colon X \times \{0\} \longrightarrow Y$
- ホモトピー $H\colon A \times I \longrightarrow Y$

であって $H \circ \iota_0 = \tilde{f} \circ i$ を充たすもの[a]を任意に与えたとき，（必ずしも一意でない）連続写像 $\tilde{H}\colon X \times I \longrightarrow Y$ が存在して図式 7.6 が可換になる．

[a] i.e. $\forall a \in A$ に対して $H(a,\,0) = \tilde{f}\big(i(a)\big)$ を充たすもの．ホモトピー $H\colon A \times I \longrightarrow Y$ であって $H_0 = \tilde{f} \circ i$ を充たすもの，と言ってもよい．

$$
\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr, hook, "\iota_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "\forall H"'] \arrow[dd, "i \times \mathrm{id}_I"] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[ur, "\forall \tilde{f}"] \arrow[rr, hook] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "\tilde{H}"]
\end{tikzcd}
$$

図 7.6: ホモトピー拡張性質 (HEP)

> **定義 7.12: コファイブレーション**
>
> 連続写像 $i\colon A \longrightarrow X$ が**コファイブレーション** (cofinration) であるとは，任意の位相空間 Y に対してホモトピー拡張性質が成り立つことを言う．

コファイブレーションはファイブレーションの双対概念である．ファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ に対する HLP の図式を，currying [*6] $G\colon Y \times I \longrightarrow B \rightsquigarrow \lambda G\colon Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(I,\, B) = B^I$ を使って書き換えると

$$
\begin{tikzcd}
E & E^I \arrow[l, "\mathrm{eval.at0}"'] \arrow[d, "\hat{p}"] \\
Y \arrow[u, "\tilde{g}"] \arrow[ur, dashed, "\lambda \tilde{G}"] \arrow[r, "\lambda G"] & B^I
\end{tikzcd}
$$

になる．一方，コファイブレーション $i\colon A \longrightarrow X$ の HEP の図式は

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tilde{f}"] & X \times I \arrow[dl, dashed, "\tilde{H}"'] \\
Y & A \times I \arrow[u, "i \times \mathrm{id}_I"'] \arrow[l, "H"]
\end{tikzcd}
$$

と書ける．

「性質の良い」位相空間においては，任意のコファイブレーション $\iota\colon A \longrightarrow X$ は単射かつ閉写像（i.e. 像が X の閉集合）になる．特に空間対 $(X,\, A)$ であって A が閉部分空間となっているものが与えられたとき，包含写像 $A \hookrightarrow X$ がコファイブレーションであるとは

- 任意の位相空間 Y
- 任意の連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$
- $h_0 = f|_A$ を充たす任意のホモトピー $h\colon A \times I \longrightarrow Y$

に対して拡張の問題

[*6] コンパクト生成空間の圏 $\mathbf{CG}$ が Cartesian closed category であることから，exponential が必ず存在する．故に λG は同型を除いて一意的に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "f \cup h"] & \\
X \times I \arrow[r, dashed] & Y
\end{tikzcd}
$$

が解を持つことを言う．このことに由来して**ホモトピー拡張性質**と呼ぶのである．

定義 7.13: 変位レトラクト (再掲)

空間対 $(X,\ A)$ を与える．

- A が X の**レトラクト** (retract) であるとは，ある連続写像 $r\colon X \longrightarrow A$ が存在して以下を充たすことを言う：
  (r) $r|_A = \mathrm{id}_A$
  r のことを**レトラクション** (retraction) と呼ぶ．
- A が X の**変位レトラクト** (deformation retract) であるとは，ある連続写像 $h\colon X \times I \longrightarrow X$ が存在して以下を充たすことを言う：
  (dr-1) $h|_{X\times\{0\}} = \mathrm{id}_X$
  (dr-2) $h|_{A\times\{t\}} = \mathrm{id}_A, \quad \forall t \in I$
  (dr-3) $h(x,\ 1) \in A, \quad \forall x \in X$

定義 7.14: NDR-pair

X をコンパクト生成空間とし，$A \subset X$ を部分空間とする．

- 空間対 $(X,\ A)$ が **NDR-対** (NDR-pair[a]) であるとは，ある 2 つの連続写像 $u\colon X \longrightarrow I$, $h\colon X \times I \longrightarrow X$ が存在して以下を充たすことを言う：
  (NDR-1) $A = u^{-1}(\{0\})$
  (NDR-2) $h|_{X\times\{0\}} = \mathrm{id}_X$
  (NDR-3) $h|_{A\times\{t\}} = \mathrm{id}_A, \quad \forall t \in I$
  (NDR-4) $h(x,\ 1) \in A, \quad \forall x \in X \setminus u^{-1}(\{1\})$
- 空間対 $(X,\ A)$ が **DR-対** (DR-pair) であるとは，ある 2 つの連続写像 $u\colon X \longrightarrow I$, $h\colon X \times I \longrightarrow X$ が存在して **(NDR-1)**, **(NDR-2)**, **(NDR-3)** と
  (DR-4) $h(x,\ 1) \in A, \quad \forall x \in X$
  を充たすことを言う．

[a] neighborhood deformation retract

! DR-対の定義は，**(NDR-1)** を充たす $u\colon X \longrightarrow I$ が存在すると言う意味で通常の変位レトラクトの定義よりも強い定義となっている．

補題 7.2:

2 つの空間対 $(X,\, A),\ (Y,\, B)$ を与える．

- 与えられた空間対の両方が NDR-対ならば，それらの積
$$(X,\, A)\times(Y,\, B) := \bigl(X\times Y,\, (X\times B)\cup(A\times Y)\bigr)$$
もまた NDR-対となる．
- どちらか一方が DR-対でもう一方が NDR-対ならば，積は DR-対である．

証明は [8, THEOREM 6.3.] による．

証明 $(X,\, A)$ が NDR-対であると仮定し，NDR-対の定義における連続写像 $u\colon Y \longrightarrow I,\ h\colon X\times I \longrightarrow X$ をとる．同様に $(X,\, A)$ が NDR-対であると仮定して，対応する連続写像 $v\colon Y \longrightarrow I,\ j\colon Y\times I \longrightarrow Y$ をとる．

ここで写像

$$w\colon X\times Y \longrightarrow I,\ (x,\, y) \longmapsto u(x)v(y)$$

およびホモトピー

$$\begin{aligned} &q\colon (X\times Y)\times I \longrightarrow X\times Y, \\ &(x,\, y,\, t) \longmapsto \begin{cases} (x,\, y) = \bigl(h(x,\, t),\, j(y,\, t)\bigr), & x\in A\ \text{かつ}\ y\in B \\ \Bigl(h(x,\, t),\, j\bigl(y,\, \frac{u(x)}{v(y)}t\bigr)\Bigr), & u(x)\le v(y)\ \text{かつ}\ v(y)>0 \\ \Bigl(h\bigl(x,\, \frac{v(y)}{u(x)}t\bigr),\, j(y,\, t)\Bigr), & u(x)\ge v(y)\ \text{かつ}\ u(x)>0 \end{cases} \end{aligned}$$

を考える．w は明らかに連続写像である．

q の連続性を示す．定義の下 2 行の部分は集合 $\bigl\{\, (x,\, y)\in X\times Y \bigm| u(x)=v(y)>0 \,\bigr\}$ 上で交わるが，この集合上でどちらも $\bigl(h(x,\, t),\, j(y,\, t)\bigr)$ となり一致する．従ってこれらは集合 $(X\times Y\setminus A\times B)\times I$ 上の連続写像を成す．あとは $\forall(x,\, y,\, t)\in A\times B\times I$ における q の連続性を示せば良い．

任意の開集合 $x\in U\subset X, y\in V\subset Y$ をとる．**(NDR-3)** より $\forall t\in I,\ h(x,\, t)=x\in U$ が成り立つから，包含関係 $\{x\}\times I\subset h^{-1}(U)$ が成り立つ．連続写像の定義より $h^{-1}(U)$ は $X\times I$ の開集合であり，かつ I はコンパクトだから，ある X の開集合 $x\in S\subset X$ が存在して $S\times I\subset h^{-1}(U)$ を充たす．同様の議論により，ある Y の開集合 $y\in T\subset Y$ が存在して $T\times I\subset j^{-1}(V)$ を充たす．従って点 $q(x,\, y,\, t)=(x,\, y)=\bigl(h(x,\, t),\, j(y,\, t)\bigr)\in A\times B$ の開近傍 $U\times V$ に対して，$(x,\, y,\, t)\in S\times T\times I\subset q^{-1}(U\times V)$ が成り立つ，i.e. $q^{-1}(U\times V)$ は点 $(x,\, y,\, t)$ の近傍となる．$U\times V$ の形をした $A\times B$ の開集合全体は積位相の開基をなすから，q が $A\times B\times I$ 上で連続であることが示された．

次に，w と q が **(NDR-1) - (NDR-4)** を充していることを示す．

(NDR-1) 明らかに $w^{-1}(\{0\})=(X\times B)\cup(A\times Y)$ である．

(NDR-2) $\forall(x,\, y)\in X\times Y$ に対して

$$q(x,\, y,\, 0)=\bigl(h(x,\, 0),\, j(y,\, 0)\bigr)=(x,\, y).$$

(NDR-3) $\forall (x,\, y) \in (X \times B) \cup (A \times Y),\ \forall t \in I$ に対して

$$
q(x,\, y,\, t) = \begin{cases} (x,\, y), & (x,\, y) \in A \times B \\ \bigl(x,\, j\bigl(y,\, 0\bigr)\bigr) = (x,\, y), & (x,\, y) \in A \times (Y \setminus B) \\ \bigl(h\bigl(x,\, 0\bigr),\, y\bigr) = (x,\, y), & (x,\, y) \in (X \setminus A) \times B \end{cases}
$$

(NDR-4) $\forall (x,\, y) \in X \times Y$ に対して $w(x,\, y) = u(x)v(y) < 1 \iff (x,\, y) \in u(x) < 1$ または $v(y) < 1$ である．$w(x,\, y) = 0$ の場合は自明なので $0 < w(x,\, y) < 1$ を考える．$u(x) < 1$ の場合と $v(y) < 1$ の場合の議論は全く同様なので，前者のみ考える．

$$
q(x,\, y,\, 1) = \begin{cases} \Bigl(h(x,\, 1),\, j\bigl(y,\, \frac{u(x)}{v(y)}\bigr)\Bigr) \in A \times A, & u(x) \le v(y) \text{ かつ } v(y) > 0 \\ \Bigl(h\bigl(x,\, \frac{v(y)}{u(x)}\bigr),\, j(y,\, 1)\Bigr) \in X \times B, & 1 > u(x) \ge v(y) \text{ かつ } u(x) > 0 \end{cases}
$$

以上より前半が示された．

$(X,\, A)$ が DR-対の場合は，上述の構成において u を $u' := u/2$ に置き換える．すると $\forall (x,\, y) \in X \times Y$ に対して $w(x,\, y) < 1$ が成り立ち，従って $q(x,\, y,\, 1) \in (X \times B) \cup (A \times Y)$ が成り立つ．故に積は DR-対となり，証明が完了する． ■

定理 7.6: コファイブレーションの必要十分条件 (Steenrod)

以下は同値である：

(1) $(X,\, A)$ が NDR-対

(2) $\bigl(X \times I,\, (X \times \{0\}) \cup (A \times I)\bigr)$ が DR-対

(3) $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ が $X \times I$ のレトラクト

(4) 包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ がコファイブレーション

<u>証明</u> **(1) $\implies$ (2)** $(I,\, \{0\})$ は DR-対だから，補題 7.2 より $(X,\, A) \times (I,\, \{0\}) = \bigl(X \times I,\, (X \times \{0\}) \cup (A \times I)\bigr)$ も DR 対である．

(2) $\implies$ (3) 明らか

(4) $\implies$ (3) $i\colon A \longrightarrow X$ がコファイブレーションだとすると，位相空間 $X \times \{0\} \cup A \times I$ に対して HEP を使うことで次の可換図式を得る：

$$
\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr, hook, "\iota_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "\mathrm{id}_{A \times I}"'] \arrow[dd, "i \times \mathrm{id}_I"] \\
& X \times \{0\} \cup A \times I & \\
X \times \{0\} \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] \arrow[rr, hook] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "\exists r"]
\end{tikzcd}
$$

図式中の連続写像 $r\colon X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ はレトラクションになっている．

(3) $\implies$ (4) 連続写像 $r\colon X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ をレトラクションとする．

任意の位相空間 Y を 1 つ固定する．

- 任意の連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$

- $h_0 = f|_A$ を充たす任意のホモトピー $h\colon A \times I \longrightarrow Y$

に対する拡張の問題

$$
\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr, hook, "\iota_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "\forall h"'] \arrow[dd, "i \times \mathrm{id}_I"] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[ur, "\forall f"] & & X \times I \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}
$$

は $f \circ r\colon X \times I \longrightarrow Y$ を解に持つ．

(3) $\implies$ **(1)**

■

系 7.7:

空間対 $(X,\, A),\ (Y,\, B)$ の包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X,\ j\colon B \hookrightarrow Y$ がどちらもコファイブレーションならば，積

$$(X,\, A) \times (Y,\, B) = \big(X \times Y,\, (X \times B) \cup (A \times Y)\big)$$

の包含写像もコファイブレーションとなる．

証明 補題 7.2 と定理 7.6-(1) より従う． ■

押し出しとコファイブレーションの関係を論じる．

定義 7.15: 押し出し

圏 $\mathcal{C}$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, C)$ の**押し出し**とは対象 $f_*C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と射 $i_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, f_*C),\ i_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, f_*C)$ の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(押し出しの普遍性) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して集合の写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f_*C,\, X) &\longrightarrow \left\{ (\varphi_1,\, \varphi_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, X) \;\middle|\; \varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ g \right\} \\
h &\longmapsto (h \circ i_1,\, h \circ i_2)
\end{aligned}
$$

が全単射になる（図式 7.7）．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_1"] & \\
C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & f_*C \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] & \\
 & & \forall X
\end{tikzcd}
$$

図 7.7: 押し出しの普遍性

押し出しは帰納極限である．故に存在すれば同型を除いて一意である．

さて，圏 **Top** において押し出しが必ず存在することを示そう．2 つの位相空間 $B, C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の disjoint union を，基点 $b_0 \in B$, $c_0 \in C$ を固定した上で

$$
B \amalg C := \left\{ (b,\, c_0,\, 0) \,\middle|\, b \in B \right\} \cup \left\{ (b_0,\, c,\, 1) \,\middle|\, c \in C \right\}
$$

と定義する．

命題 7.3: 圏 Top における押し出し

圏 **Top** における図式 $(A,\, B,\, C;\ f\colon A \longrightarrow B,\, g\colon A \longrightarrow C)$ を任意に与える．位相空間 $f_*C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を

$$
f_*C := \frac{B \amalg C}{f(a) \sim g(a)}
$$

で定める．包含写像と商写像の合成を $i_1\colon B \hookrightarrow f_*C$, $i_2\colon C \hookrightarrow f_*C$ とおくと，組 $(f_*C,\, i_1,\, i_2)$ は押し出しである．

定理 7.8: コファイブレーションの押し出し

押し出しの図式において $g\colon A \longrightarrow C$ がコファイブレーションであるとする．このとき $i_1\colon B \longrightarrow f_*C$ はコファイブレーションである．

<u>**証明**</u> コンパクト生成な Hausdorff 空間の圏 **CG** で考える．**CG** が Cartesian closed category であることから必ず exponentials が存在する．従って HEP の問題

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & X \times I \arrow[dl, dashed] \\
Y & A \times I \arrow[l, "H"] \arrow[u, "i \times \mathrm{id}_I"']
\end{tikzcd}
$$

は currying により

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda H"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "\mathrm{eval.at0}"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}
$$

と同値である．以降で HEP の問題を考えるときは後者として考えることにする．

任意の位相空間 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ を一つ固定する．押し出しの図式の右側に HEP の問題をつなげた図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[r, "H"] \arrow[d, "i_1"] & Y^I \arrow[d, "\text{eval.at}\,0"] \\
C \arrow[r, "i_2"] & f_*C \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, red] & Y
\end{tikzcd}$$

を考える．$g\colon A \longrightarrow C$ がコファイブレーションであることにより，HLP の問題

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "H\circ f"] \arrow[d, "g"] & Y^I \arrow[d, "\text{eval.at}\,0"] \\
C \arrow[r, "h\circ i_2"] \arrow[ur, dashed, red] & Y
\end{tikzcd}$$

は解 $\tilde{H}\colon C \longrightarrow Y^I$ を持つ．従って押し出しの普遍性より可換図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "\tilde{H}"] & f_*C \arrow[dr, dashed, red, "\exists! j"] & \\
 & & Y^I
\end{tikzcd}$$

が得られる．図式の可換性より，連続写像 $j\colon f_*C \longrightarrow Y^I$ は $j \circ i_1 = H$ を充たす．ところで，このとき 2 つの可換図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\text{eval.at}0\circ H"] & \\
C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "\text{eval.at}\,0\circ\tilde{H}"] & f_*C \arrow[dr, "h"] & \\
 & & Y^I
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\text{eval.at}0\circ H"] & \\
C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "\text{eval.at}\,0\circ\tilde{H}"] & f_*C \arrow[dr, "\text{eval.at}\,0\circ j"] & \\
 & & Y^I
\end{tikzcd}$$

が成り立つが，押し出しの普遍性より $\text{eval.at}\,0 \circ j = h$ でなくてはならない．

以上の議論により，$i_1\colon B \longrightarrow f_*C$ に対する HEP の問題が

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "H"] \arrow[d, "i_1"] & Y^I \arrow[d, "\text{eval.at}\,0"] \\
f_*C \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, red, "j"] & Y
\end{tikzcd}$$

として解決された．Y は任意であったから i_1 はコファイブレーションである． ■

7.2.2　連続写像をコファイブレーションに置き換える

定義 7.16: 写像柱・写像錐

$f\colon A \longrightarrow X$ を連続写像とする．

- f の**写像柱** (mapping cylinder) を
$$M_f \coloneqq \frac{(A \times I) \amalg X}{(a,\,1) \sim f(a)}$$
で定義する．
- f の**写像錐** (mapping cone) を
$$C_f \coloneqq \frac{M_f}{A \times \{0\}}$$
で定義する．

命題 7.3 より写像柱 M_f は図式

$$\begin{tikzcd}
A \times \{1\} \arrow[r, "f \times 1"] \arrow[d, "g \times 1"] & X \times \{1\} \\
A \times I &
\end{tikzcd}$$

の押し出しとしても得られる．このことは定理 7.5 を彷彿とさせる：

定理 7.9: コファイブレーションと連続写像のホモトピー同値性

任意の連続写像 $f\colon A \longrightarrow X$ を与える．包含写像 $i\colon A \hookrightarrow M_f,\ a \longmapsto [a,\,0]$ を考える．

(1) ホモトピー同値写像 $h\colon M_f \longrightarrow X$ であって図式 7.9 を可換にするものが存在する．
(2) $i\colon A \longrightarrow M_f$ はコファイブレーションである．
(3) $f\colon A \longrightarrow X$ がコファイブレーションならば h はホモトピー同値写像である．特に h は**コファイバー** (cofiber) のホモトピー同値写像
$$C_f \longrightarrow X/f(A)$$
を引き起こす．

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "i"] & \\
X & & M_f \arrow[ll, "h"]
\end{tikzcd}$$

図 7.9: コファイブレーションと連続写像のホモトピー同値性

証明 (1) 連続写像 $h\colon M_f \longrightarrow X$ を

$$h([a,\, s]) \coloneqq f(a), \quad h([x]) \coloneqq x$$

で定めると，図式 7.9 は可換になる．

包含写像と商写像の合成 $j\colon X \longrightarrow M_f,\ x \longmapsto [x]$ は $h\circ j = \mathrm{id}_X$ を充たす．ホモトピー $F\colon M_f \times I \longrightarrow M_f$ を

$$\begin{aligned} F([a,\, s],\, t) &\coloneqq [a,\, (1-t)s + t], \\ F([x],\, t) &\coloneqq [x] \end{aligned}$$

で定義すると $F_0 = \mathrm{id}_{M_f}$ かつ

$$\begin{aligned} F_1([a,\, s]) &= [a,\, 1] = [f(a)] = j \circ h([a,\, s]), \\ F_1([x]) &= [x] = j \circ h([x]) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $j \circ h \simeq \mathrm{id}_{M_f}$ である．

(2) 定理 7.6 より，レトラクション $R\colon M_f \times I \longrightarrow M_f \times \{0\} \cup A \times I$ を構成すれば良い．連続写像 $r\colon I \times I \longrightarrow I \times \{0\} \cup \{0\} \times I,\ (s,\, t) \longmapsto \bigl(r_1(s,\, t),\, r_2(s,\, t)\bigr)$ を $r|_{\{1\}\times I} = \{(1,\, 0)\}$ となるようにとる．そして連続写像 $R\colon M_f \times I \longrightarrow M_f \times \{0\} \cup A \times I$ を

$$R([a,\, s],\, t) \coloneqq \bigl([a,\, r_1(s,\, t)],\, r_2(s,\, t)\bigr), \quad R([x],\, t) \coloneqq ([x],\, 0)$$

と定義する．R の $M_f \times \{0\} \cup A \times I$ への制限[*7]は

$$\begin{aligned} R([a,\, s],\, 0) &= \bigl([a,\, r_1(s,\, 0)],\, r_2(s,\, 0)\bigr) = ([a,\, s],\, 0), \\ R([x],\, 0) &= ([x],\, 0), \\ R([a,\, 0],\, t) &= \bigl([a,\, r_1(0,\, t)],\, r_2(0,\, t)\bigr) = ([a,\, 0],\, t) \end{aligned}$$

を充たすのでレトラクションである．

(3) 定理 7.6 より，もし $f\colon A \hookrightarrow X$ がコファイブレーションならばレトラクション $r\colon X \times I \longrightarrow X \times \{1\} \cup f(A) \times I$ が存在する．また，自明な同相写像 $q\colon X \times \{1\} \cup f(A) \times I \xrightarrow{\approx} M_f$ がある．

連続写像 $g\colon X \longrightarrow M_f,\ x \longmapsto q\bigl(r(x,\, 0)\bigr)$ とホモトピー $H \coloneqq h \circ q \circ r\colon X \times I \longrightarrow X$ を考える．すると

$$\begin{aligned} H_0(x) &= h \circ q \circ r(x,\, 0) = h \circ g(x), \\ H_1(x) &= h \circ q \circ r(x,\, 1) = h \circ q(x,\, 1) = h([x]) = x \end{aligned}$$

i.e. $H_0 = h \circ g,\ H_1 = \mathrm{id}_X$ が成り立つ．一方，ホモトピー $F\colon M_f \times I \longrightarrow M_f$ を

$$F([a,\, s],\, t) \coloneqq q \circ r\bigl(f(a),\, st\bigr), \quad F([x],\, t) \coloneqq q \circ r(x,\, t)$$

で定義する．すると

$$\begin{aligned} F_0([a,\, s]) &= q \circ r\bigl(f(a),\, 0\bigr) = g \circ h([a,\, s]), & F_0([x]) &= q \circ r(x,\, 0) = g \circ h([x]), \\ F_1([a,\, s]) &= q \circ r\bigl(f(a),\, s\bigr) = q(f(a),\, s) = [a,\, s], & F_1([x]) &= q \circ r(x,\, 1) = [x] \end{aligned}$$

i.e. $F_0 = g \circ h,\ H_1 = \mathrm{id}_{M_f}$ が成り立つ．

■

[*7] 正確には $M_f \times \{0\} \cup i(A) \times I$ への制限

7.3 ホモトピー集合

定義 7.17: ホモトピー集合

位相空間 X, Y を与える．

- X, Y の**ホモトピー集合** $[X, Y]$ を

$$[X, Y] \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)/\simeq$$

で定義する[a]．

- 空間対 $(X, \{x_0\})$, $(Y, \{y_0\})$ の間の射（**based map**）全体の集合をホモトピックで類別した商集合を**基点付きホモトピー集合**と呼び，$\boldsymbol{[X, Y]_0}$ と書く．

[a] X から Y への連続写像全体の集合はしばしば $\mathrm{Map}(X, Y)$ と書かれる．

- Y が弧状連結であるとする．このとき任意の定数写像は同一のホモトピー類に属する[*8]．このホモトピー類を**ホモトピー集合 $\boldsymbol{[X, Y]}$ の基点**と呼ぶ．
- $[X, Y]_0$ の元のうち，唯一の定数写像 $x \longmapsto y_0$ が属するものが存在する．これを**基点付きホモトピー集合 $\boldsymbol{[X, Y]_0}$ の基点**と呼ぶ．

7.3.1 完全列

Sets における完全列の概念を定義する．

定義 7.18: Sets における完全列

圏 **Sets** における図式

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が B において**完全** (exact) であるとは，C が基点 c_0 を持ち，かつ

$$\mathrm{Im}\, f = g^{-1}(\{c_0\})$$

が成り立つことを言う．

位相空間 X_1, X_2, Y と連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X_1, X_2)$ を任意に与える．このとき f は 2 通りの方法でホモトピー集合の間の連続写像を誘導する：

$$\begin{aligned} f_* \colon [Y, X_1] &\longrightarrow [Y, X_2], \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

[*8] 定数写像 $f_0, f_1 \colon X \longrightarrow Y$ を任意にとり，$\{y_i\} \coloneqq \mathrm{Im}\, f_i$ とおく．Y が弧状連結なので y_0 と y_1 を繋ぐ道 $\alpha \colon I \longrightarrow Y$ が存在する．このときホモトピー $H \colon X \times I \longrightarrow Y$, $(x, t) \longmapsto \alpha(t)$ を考えると $H_0 = (x \longmapsto y_0) = f_0$, $H_1 = (x \longmapsto y_1) = f_1$ が成り立つので H が f_0 と f_1 を繋ぐ．

または

$$
\begin{aligned}
f^* \colon [X_2, Y] &\longrightarrow [X_1, Y], \\
[\alpha] &\longmapsto [\alpha \circ f]
\end{aligned}
$$

と定義する．これらの定義の well-definedness を示す：

<u>証明</u> $\alpha \simeq \beta$ なる $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, X_1)$ をとると，ホモトピー $h\colon Y \times I \longrightarrow X_1$ であって $h_0 = \alpha,\ h_1 = \beta$ を充たすものが存在する．このとき新しいホモトピーを $\tilde{h}\colon Y \times I \longrightarrow X_2,\ (y, t) \longmapsto f\bigl(h(y, t)\bigr)$ と定めると $\tilde{h}_1 = f \circ \alpha,\ \tilde{h}_2 = f \circ \beta$ が成り立つ．i.e. $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ であり，f_* は well-defined である．

同様に $\alpha \simeq \beta$ なる $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X_2, Y)$ をとると，ホモトピー $g\colon X_2 \times I \longrightarrow Y$ であって $g_0 = \alpha,\ g_1 = \beta$ を充たすものが存在する．このとき新しいホモトピーを $\tilde{g}\colon X_1 \times I \longrightarrow Y,\ (y, t) \longmapsto h\bigl(f(y), t\bigr)$ と定めると $\tilde{g}_1 = \alpha \circ f,\ \tilde{g}_2 = \beta \circ f$ が成り立つ．i.e. $\alpha \circ f \simeq \beta \circ f$ であり，f^* は well-defined である． ■

次の 2 つの定理は代数トポロジーにおける長完全列の構成の要石となる．

定理 7.10: ファイブレーションの基本性質

B を<u>弧状連結空間</u>，$F \overset{i}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$ をファイブレーションとする．
任意の位相空間 Y を与えたとき，圏 $\mathbf{CG}$ における図式

$$
[Y, F] \xrightarrow{i_*} [Y, E] \xrightarrow{p_*} [Y, B]
$$

は完全である．

<u>証明</u> ホモトピー集合 $[Y, B]$ の基点を $[\mathrm{const}]$ と書く．

$\mathrm{Im}\, i_* \subset p_*^{-1}([\mathrm{const}])$

$\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(Y, F)$ に対して $p_* \circ i_*([g]) = [p \circ i \circ g]$ である．ところで B の基点 b_0 に対して $F = p^{-1}(\{b_0\})$ だから，$\forall y \in Y$ に対して $p \circ i \circ g(y) = p\bigl(g(y)\bigr) = b_0$ が成り立つ．i.e. $p \circ i \circ g$ は定数写像であり，$p_* \circ i_*([g]) = [p \circ i \circ g] = [\mathrm{const}]$ が示された．

$\mathrm{Im} i_* \supset p_*^{-1}([\mathrm{const}])$

$p_*([f]) = [\mathrm{const}]$ を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(Y, E)$ をとる．このとき $p \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(Y, B)$ は定数写像にホモトピックである，i.e. $p \circ f$ と定数写像 $Y \longrightarrow B,\ y \longmapsto b_0$ を繋ぐホモトピー $G\colon Y \times I \longrightarrow B$ が存在する．$p\colon E \longrightarrow B$ がファイブレーションなので，HLP の問題

$$
\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}
$$

は解を持つ．それを $H\colon Y \times I \longrightarrow E$ とおくと，$\forall y \in Y$ に対して $p \circ H_1(y) = G_1(y) = b_0$ が成り立つことから $H_1(y) \in F = p^{-1}(\{b_0\})$ とわかる．i.e. $H_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(Y, F)$ である．$f \simeq H_1$ なので $[f] = [i \circ H_1] = i_*([H_1]) \in \mathrm{Im}\, i_*$ である．

■

定理 7.11: コファイブレーションの基本性質

$i\colon A \hookrightarrow X$ を，コファイバー[a] X/A を持つコファイブレーションとする．$q\colon X \twoheadrightarrow X/A$ を商写像とする．

任意の弧状連結な位相空間 Y を与えたとき，圏 $\mathbf{CG}$ における図式

$$[X/A, Y] \xrightarrow{q^*} [X, Y] \xrightarrow{i^*} [A, Y]$$

は完全である．

[a] 包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ による接着空間 $X \cup_i A$ のこと．

証明 ホモトピー集合 $[A, Y]$ の基点を $[\mathrm{const}]$ と書く．

$\mathbf{Im}\, q^* \subset (i^*)^{-1}([\mathbf{const}])$

$\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(X/A,\ X)$ に対して $i^* \circ q^*([g]) = [g \circ q \circ i]$ である．$q \circ i(A) = q(A)$ は一点集合だから $g \circ q \circ i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(A,\ Y)$ は定数写像であり，$i^* \circ q^*([g]) = [g \circ q \circ i] = [\mathrm{const}]$ が示された．

$\mathbf{Im}\, q^* \supset (i^*)^{-1}([\mathbf{const}])$

$i^*([f]) = [\mathrm{const}]$ を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(X\, Y)$ をとる．このとき $f \circ i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(A,\ Y)$ は定数写像にホモトピックである，i.e. $f \circ i$ と定数写像を繋ぐホモトピー $h\colon A \times I \longrightarrow Y$ が存在する．$i\colon A \longrightarrow X$ がコファイブレーションなので，HEP の問題

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f \cup h"] \arrow[d, "i"] & Y \\
X \times I \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

は解を持つ．それを $F\colon X \times I \longrightarrow Y$ とおくと $F_1 \simeq f$ で，かつ制限 $F_1|_A$ が定数写像となる．故に商位相の定義から，圏 $\mathbf{CG}$ における可換図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "q"] & Y \\
X/A \arrow[ur, dashed, "\exists! g"] &
\end{tikzcd}$$

が存在する．故に $[f] = [F_1] = q^*([g]) \in \mathrm{Im}\, q^*$ である．

■

基点付きホモトピー集合に定理 7.10, 7.11 を拡張するために，コンパクト生成空間の圏を拡張する：

定義 7.19: 非退化な基点を持つコンパクト生成空間の圏

非退化な基点を持つコンパクト生成空間の圏 (category of compactly generated spaces with a non-degenerate base point) $\mathbf{CG}_*$ を以下のように定義する：

- 空間対 $(X, \{x_0\})$ であって，包含写像 $\{x_0\} \hookrightarrow X$ がコファイブレーションであるようなもの[a]を対象とする．
- 基点を保存する連続写像を射とする．
- 連続写像の合成を合成とする．

[a] 空間対 $(X, \{x_0\})$ が NDR-対である，と言っても良い（定理 7.6）．

定理 7.12: ファイブレーションの基本性質（基点付きの場合）

$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ を，基点を保つファイブレーションとする．
任意の基点付き位相空間[a] $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を与えたとき，圏 $\mathbf{CG}_*$ における図式

$$[Y, F]_0 \xrightarrow{i_*} [Y, E]_0 \xrightarrow{p_*} [Y, B]_0$$

は完全である．

[a] ホモトピー集合の基点が一意に決まるので弧状連結性は必要ない．

定理 7.13: コファイブレーションの基本性質（基点付きの場合）

$A \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{q} X/A$ を，基点を保つコファイブレーションとする．
任意の基点付き位相空間 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を与えたとき，圏 $\mathbf{CG}_*$ における図式

$$[X/A, Y]_0 \xrightarrow{q^*} [X, Y]_0 \xrightarrow{i^*} [A, Y]_0$$

は完全である．

7.3.2 スマッシュ積

定義 7.20: ウェッジ和とスマッシュ積

$(X,\, x_0),\, (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を任意に与える．

- $(X,\, x_0)$ と $(Y,\, y_0)$ の**ウェッジ和** (wedge sum) を
$$X \vee Y \coloneqq (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$$
で定義する[a]．これは圏 $\mathbf{CG}_*$ における和である．
- $(X,\, x_0)$ と $(Y,\, y_0)$ の**スマッシュ積** (smash product) を
$$X \wedge Y \coloneqq \frac{X \times Y}{X \vee Y} = \frac{X \times Y}{(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)}$$
で定義する．これは圏 $\mathbf{CG}_*$ における積<u>ではない</u>．

[a] 一点写像 $f\colon X \longrightarrow Y,\ x_0 \longmapsto y_0$ による接着空間 $X \cup_f Y$ のことをウェッジ和と言う場合もある．圏 $\mathbf{CG}_*$ においては同一視してしまって問題ない．

命題 7.4: 随伴定理

圏 $\mathbf{CG}_*$ における自然同値
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}\big(X \wedge Y,\, Z\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}\big(X,\, \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(Y,\, Z)\big)$$
が成り立つ．

定義 7.21: 懸垂・約懸垂・錐・約錐

$(X,\, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を任意に与える．

- X の**懸垂** (suspension) を
$$\mathrm{susp}(X) \coloneqq \frac{X \times I}{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})}$$
で定義する．
- X の**約懸垂** (reduced suspension) を
$$SX \coloneqq S^1 \wedge X = \frac{X \times I}{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)}$$
で定義する．
- X の**錐** (cone) を
$$\mathrm{cone}(X) \coloneqq \frac{X \times I}{X \times \{0\}}$$
で定義する．
- X の**約錐** (reduced cone) を
$$CX \coloneqq I \wedge X = \frac{X \times I}{(X \times \{0\}) \cup (\{x_0\} \times I)}$$

で定義する．

約懸垂・約錐は，圏 $\mathbf{CG}_*$ において関手的であるという点で懸垂・錐よりも便利である．

命題 7.5:

圏 $\mathbf{CG}_*$ において，商写像

$$\mathrm{susp}(X) \twoheadrightarrow SX, \quad \mathrm{cone}(X) \twoheadrightarrow CX$$

はどちらもホモトピー同値写像である．

命題 7.6:

$m,\, n \geq 0$ に対して以下が成り立つ：

(1) $SS^n \approx S^{n+1}$
(2) $CS^n \approx D^{n+1}$
(3) $S^m \wedge S^n \approx S^{m+n}$

命題 7.7:

$X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して自然な同相

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(SX,\, Y) \approx \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(X,\, \Omega Y)$$

が成り立つ．ただし $\Omega Y \coloneqq \Omega_{y_0} Y = \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(S^1,\, Y)$ はループ空間である．

証明 約懸垂の定義と随伴定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(SX,\, Y) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(S^1 \wedge X,\, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(X \wedge S^1,\, Y) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}\big(X,\, \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(S^1,\, Y)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(X,\, \Omega Y)
\end{aligned}$$

■

7.3.3 Puppe 系列

定義 7.22: ホモトピー・ファイバー

連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ を任意に与える．

- f の**ホモトピー・ファイバー** (homotopy fiber) とは，f に対して定理 7.5 を使って得られるファイブレーション $p\colon P_f \longrightarrow Y$ のファイバーのこと．
- f の**ホモトピー・コファイバー** (homotopy cofiber) とは，f に対して定理 7.9 を使って得られるコファイブレーション $i\colon A \longrightarrow M_f$ のコファイバー，i.e. 写像錐 C_f のこと．

ファイブレーションのファイバーのホモトピー型は，もとのファイブレーションが「どの程度ホモトピー同値写像からずれているのか」の指標となる．任意の（ファイブレーションとは限らない）連続写像に関しても，そのホモトピー・ファイバーを見れば同じことができる．

さらに，ファイバーの包含写像 $F \hookrightarrow E$ のホモトピー・ファイバーをとることもできる．このような操作を帰納的に行うことで，ファイブレーションの長い系列を得る．

定理 7.14: ファイブレーション系列の素材

- $F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ をファイブレーション，Z を $F \hookrightarrow E$ のホモトピー・ファイバーとする．
  このとき Z はループ空間 ΩB と同じホモトピー型である．
- $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \twoheadrightarrow X/A$ をコファイブレーション，W を $X \twoheadrightarrow X/A$ のホモトピー・コファイバーとする．
  このとき W は懸垂 $\mathrm{susp}(A)$ と同じホモトピー型である．

証明 • 与えられたファイバーは，ある点 $b_0 \in B$ を使って $F = f^{-1}(\{b_0\})$ と書ける．F の点 $e_0 \in F$ を 1 つ選んで基点とする．mapping path fibration $p\colon P_f \longrightarrow Y$ は

$$
\begin{aligned}
P_f &:= \{\, (e,\, \alpha) \in E \times B^I \mid f(e) = \alpha(0) \,\},\\
p(e,\, \alpha) &:= \alpha(1)
\end{aligned}
$$

によって構成され，連続写像

$$h\colon E \longrightarrow P_f,\ e \longmapsto \bigl(e,\, \mathrm{const}_{f(e)}\bigr)$$

がファイバー・ホモトピー同値写像になるのだった．i.e. $(P_f)_0 := p^{-1}(\{b_0\})$ とおくと，ファイブレーション $(P_f)_0 \hookrightarrow P_f \xrightarrow{p} B$ は $F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ にファイバー・ホモトピー同値である．

連続写像 $\mathrm{proj}_1\colon (P_f)_0 \longrightarrow E,\ (e,\, \alpha) \longmapsto e$ を考える．

$$\mathrm{proj}_1^{-1}(\{e_0\}) = \{\, (e_0,\, \alpha) \in E \times B^I \mid f(e_0) = b_0 = \alpha(0),\ \alpha(1) = b_0 \,\}$$

より明らかに $\mathrm{proj}_1^{-1}(\{e_0\}) \approx \Omega_{b_0} B$ である．

次に $\Omega_{b_0} B \hookrightarrow (P_f)_0 \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} E$ がファイブレーションであることを示す．任意の位相空間 A に対して HLP の問題

$$
\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & (P_f)_0 \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"] \\
A \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed] & E
\end{tikzcd}
$$

を考える．$g(a) := \bigl(g_1(a),\, g_2(a)\bigr)$ とおいた上でホモトピー $\tilde{G}\colon A \times I \longrightarrow (P_f)_0$ を

$$\tilde{G}(a,\, s) = \left(G(a,\, s),\, t \mapsto \begin{cases} f\bigl(G\bigl(a,\, s - (1+s)t\bigr)\bigr), & t \in [0,\, \frac{s}{1+s}] \\ g_2(a)\bigl((1+s)t - s\bigr), & t \in [\frac{s}{1+s},\, 1] \end{cases}\right)$$

で定義すると

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_0(a) &= \bigl(G_0(a),\, t \mapsto g_2(a)(t)\bigr) = g(a),\\
\mathrm{proj}_1 \circ \tilde{G}_t(a) &= G_t(a)
\end{aligned}
$$

が成り立つので解になっている．よって $\Omega_{b_0}B \hookrightarrow (P_f)_0 \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} E$ がファイブレーションであることが示された．

最後に ΩB が $F \hookrightarrow E$ のホモトピー・ファイバーであることを示す．$E \xrightarrow{h} P_f$ がファイバー・ホモトピー同値写像であることから，制限 $h|_F \colon F \longrightarrow (P_f)_0$ はホモトピー同値写像である．従って図式

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, hook] & & (P_f)_0 \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

から，ファイブレーション $\Omega_{b_0}B \hookrightarrow (P_f)_0 \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} E$ が $F \hookrightarrow E$ に関して定理 7.5 の要件を充していることがわかった．

•

■

基点付き空間 (X, x_0) のループ空間 ΩX は，それ自身が定数ループ const_{x_0} を基点とする基点付き空間になっている．故に ΩX のループ空間を考えることができる．この操作を X に対して n 回施して得られる基点付き位相空間を $\Omega^n X$ と書く．

定理 7.15: ファイブレーション・コファイブレーション系列

(1) $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\iota} X/A$ をコファイブレーションとする．このとき圏 $\mathbf{CG}$ における図式

$$\begin{aligned} & A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\iota} X/A \\ & \to \mathrm{susp}(A) \xrightarrow{\mathrm{susp}\, i} \mathrm{susp}(X) \xrightarrow{\mathrm{susp}\, \iota} \mathrm{susp}(X/A) \\ & \to \mathrm{susp}^2(A) \xrightarrow{\mathrm{susp}\, i} \cdots \\ & \to \mathrm{susp}^n(A) \xrightarrow{\mathrm{susp}^n\, i} \mathrm{susp}^n(X) \xrightarrow{\mathrm{susp}^n\, \iota} \mathrm{susp}^n(X/A) \to \cdots \end{aligned}$$

が存在して赤色をつけた射はホモトピー同値写像になっている．

(2) $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\iota} X/A$ を基点を保つコファイブレーションとする．このとき圏 $\mathbf{CG}_*$ における図式

$$\begin{aligned} & A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\iota} X/A \\ & \to SA \xrightarrow{Si} SX \xrightarrow{S\iota} S(X/A) \\ & \to S^2A \xrightarrow{S^2 i} \cdots \\ & \to S^nA \xrightarrow{S^n i} S^nX \xrightarrow{S^n \iota} S^n(X/A) \to \cdots \end{aligned}$$

が存在して赤色をつけた射はホモトピー同値写像になっている．

(3) $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{p} B$ をファイブレーションとする．このとき圏 **CG** における図式

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow & \Omega^n F \xrightarrow{\Omega^n i} \Omega^n E \xrightarrow{\Omega^n p} \Omega^n B \\
\longrightarrow & \Omega^{n-1} F \xrightarrow{\Omega^{n-1} i} \cdots \\
\longrightarrow & \Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega E \xrightarrow{-\Omega^n p} \Omega B \\
\longrightarrow & F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B
\end{aligned}$$

が存在して赤色をつけた射はホモトピー同値写像になっている．

次に，定理 7.15 の系列のホモトピー集合をとることを考える．適切な場合においてホモトピー集合をとると群構造が入るからである．

定義 7.23: H 空間

$(Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ が **H 空間**であるとは，次の条件をみたす 2 つの連続写像

$$\begin{aligned}
&\mu\colon Y \times Y \longrightarrow Y, \\
&\nu\colon Y \longrightarrow Y
\end{aligned}$$

が存在すること：

(1) 第 j 成分への包含写像 $\iota_j\colon Y \longrightarrow Y \times Y$ に対し，連続写像

$$Y \xrightarrow{\iota_1} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \quad Y \xrightarrow{\iota_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

がどちらも $\mathrm{id}_Y\colon y \longrightarrow Y$ にホモトピック

(2) 連続写像

$$Y \times Y \times Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y \times \mu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \quad Y \times Y \times Y \xrightarrow{\mu \times \mathrm{id}_Y} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

が互いにホモトピック

(3) 連続写像

$$Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y \times \nu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

は定数写像 $\mathrm{const}_{y_0}\colon Y \longrightarrow Y,\ y \longmapsto y_0$ にホモトピック．

定義 7.24: 余 H 空間

$(Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ が**余 H 空間**であるとは，次の条件をみたす 2 つの連続写像

$$\begin{aligned}
&\mu\colon Y \longrightarrow Y \vee Y, \\
&\nu\colon Y \longrightarrow Y
\end{aligned}$$

が存在すること：

(1) 第 j 成分への標準的射影 $\pi_j\colon Y\times Y\longrightarrow Y$ に対して，連続写像

$$Y\xrightarrow{\mu}Y\vee Y\xrightarrow{\pi_1}Y,\quad Y\xrightarrow{\mu}Y\vee Y\xrightarrow{\pi_2}Y$$

がどちらも $\mathrm{id}_Y\colon y\longrightarrow Y$ にホモトピック

(2) 連続写像

$$Y\xrightarrow{\mu}Y\vee Y\xrightarrow{\mathrm{id}_Y\vee\mu}Y\vee Y\vee Y,\quad Y\xrightarrow{\mu}Y\vee Y\xrightarrow{\mu\vee\mathrm{id}_Y}Y\vee Y\vee Y$$

が互いにホモトピック．

(3) 連続写像

$$Y\xrightarrow{\mu}Y\vee Y\xrightarrow{\mathrm{id}_Y\vee\nu}Y$$

は定数写像 $\mathrm{const}_{y_0}\colon Y\longrightarrow Y,\ y\longmapsto y_0$ にホモトピック．

定理 7.16: ホモトピー集合の群構造

- $\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して集合 $[X,Y]_0$ が自然な群構造を持つ $\iff$ Y が H 空間
- $\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して集合 $[Y,X]_0$ が自然な群構造を持つ $\iff$ Y が余 H 空間

証明

- **($\Longrightarrow$)** $\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して $[X,Y]_0$ が自然な群演算

$$\begin{aligned}\cdot\colon [X,Y]_0\times[X,Y]_0&\longrightarrow[X,Y]_0\\ ^{-1}\colon [X,Y]_0&\longrightarrow[X,Y]_0\end{aligned}$$

を持っているとする．$X=Y\times Y$ として，各成分への射影 $p_i\colon Y\times Y\longrightarrow Y$ のホモトピー類 $[p_i]\in[Y\times Y,Y]$ を考える．仮定の群の積 $\cdot$ を使って $[\mu]\coloneqq[p_1]\cdot[p_2]$ とおく．連続写像 $\mu\colon Y\times Y\longrightarrow Y$ はホモトピー類 $[\mu]$ の任意の元とする．一方，連続写像 $\nu\colon Y\longrightarrow Y$ は，恒等写像 $\mathrm{id}_Y\colon Y\longrightarrow Y$ のホモトピー類 $[\mathrm{id}_Y]\in[Y,Y]_0$ の，群 $[Y,Y]_0$ における逆元 $[\mathrm{id}_Y]^{-1}\in[Y,Y]_0$ の任意の代表元 $\nu\colon Y\longrightarrow Y$ とする．

$\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ を 1 つとる．任意の連続写像 $f,\,g\colon X\longrightarrow Y$ に対して $(f,\,g)\colon X\longrightarrow Y\times Y,\ x\longmapsto\bigl(f(x),\,g(x)\bigr)$ と書く[*9]．連続写像 $(f,\,g)$ は連続写像

$$(f,\,g)^*\colon[Y\times Y,Y]_0\longrightarrow[X,Y]_0,\ [h]\longmapsto[h\circ(f,\,g)]$$

を誘導する．このとき群の積の X に関する自然性から

$$\begin{aligned}[\mu\circ(f,\,g)]&=(f,\,g)^*([\mu])=(f,\,g)^*([p_1]\cdot[p_2])\\&=(f,\,g)^*[p_1]\cdot(f,\,g)^*[p_2]=[f]\cdot[g]\end{aligned}\tag{7.3.1}$$

が成り立つ．

次に $X=\{x_0\}$ とする．唯一の連続写像 $c\colon Y\longrightarrow X,\ y\longmapsto x_0$ は群準同型

$$c^*\colon[X,Y]_0\longmapsto[Y,Y]_0,\ [f]\longmapsto[f\circ c]$$

[*9] $f\times g$ ではない．

を誘導する．ところで群 $[X,Y]_0$ はただ 1 つの元 $[x_0 \longmapsto y_0]$ からなるのでこれは単位元である．故に c^* が群準同型であることから

$$c^*([x_0 \longmapsto y_0]) = [\mathrm{const}_{y_0}]$$

が群 $[Y,Y]_0$ の単位元だとわかる．

さて，μ, ν が H 空間の定義の (1)-(3) を充していることを示そう：

(1) $\iota_1 = (\mathrm{id}_Y,\, \mathrm{const}_{y_0})$, $\iota_2 = (\mathrm{const}_{y_0},\, \mathrm{id}_Y)$ であることに注意する．式 (7.3.1) を使うと

$$\begin{aligned}
[\mu \circ \iota_1] &= [\mu \circ (\mathrm{id}_Y,\, \mathrm{const}_{y_0})] = [\mathrm{id}_Y] \cdot [\mathrm{const}_{y_0}] = [\mathrm{id}_Y], \\
[\mu \circ \iota_2] &= [\mu \circ (\mathrm{const}_{y_0},\, \mathrm{id}_Y)] = [\mathrm{const}_{y_0}] \cdot [\mathrm{id}_Y] = [\mathrm{id}_Y]
\end{aligned}$$

なので $\mu \circ \iota_i \simeq \mathrm{id}_Y$ が示された．

(2) $\pi_i \colon Y \times Y \times Y \longrightarrow Y$ を第 i 成分からの射影とする．このとき式 (7.3.1) を使うと

$$\begin{aligned}
[\mu \circ (\mathrm{id}_Y \times \mu)] &= (\mathrm{id}_Y \times \mu)^*([\mu]) = (\mathrm{id}_Y \times \mu)^*([p_1]) \cdot (\mathrm{id}_Y \times \mu)^*([p_2]) \\
&= [\pi_1] \cdot [\mu \circ (\pi_2,\, \pi_3)] = [\pi_1] \cdot ([\pi_2] \cdot [\pi_3]), \\
[\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_Y)] &= (\mu \times \mathrm{id}_Y)^*([\mu]) = (\mu \times \mathrm{id}_Y)^*([p_1]) \cdot (\mu \times \mathrm{id}_Y)^*([p_2]) \\
&= [\mu \circ (\pi_1,\, \pi_2)] \cdot [\pi_3] = ([\pi_1] \cdot [\pi_2]) \cdot [\pi_3]
\end{aligned}$$

なので，群 $[Y \times Y \times Y, Y]$ の結合律から $\mu \circ (\mathrm{id}_Y \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_Y)$ が示された．

(3) ν の定義から

$$\begin{aligned}
[\mu \circ (\mathrm{id}_Y \times \nu)] &= (\mathrm{id}_Y \times \nu)^*([\mu]) = (\mathrm{id}_Y \times \nu)^*([p_1]) \cdot (\mathrm{id}_Y \times \nu)^*([p_2]) \\
&= [\mathrm{id}_Y] \cdot [\nu] = [\mathrm{id}_Y] \cdot [\mathrm{id}_Y]^{-1} = [\mathrm{const}_{y_0}]
\end{aligned}$$

なので $\mu \circ (\mathrm{id}_Y \times \nu) \simeq \mathrm{const}_{y_0}$ が示された．

$(\Longleftarrow)$ Y が H 空間であるとする．$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を 1 つとる．このとき連続写像 $\mu \colon Y \times Y \longrightarrow Y$ は連続写像

$$\mu_* \colon [X, Y \times Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_0,\ [f] \longmapsto [\mu \circ f]$$

を誘導する．自然同型

$$\theta \colon [X,Y]_0 \times [X,Y]_0 \xrightarrow{\cong} [X, Y \times Y]_0$$

との合成を $\tilde{\mu} := \mu_* \circ \theta \colon [X,Y]_0 \times [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_0$ とおく． 同様に連続写像 $\nu \colon Y \longrightarrow Y$ は連続写像

$$\nu_* \colon [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_0,\ [f] \longmapsto [\nu \circ f]$$

を誘導する．

H 空間の定義より，集合 $[X,Y]_0$ は $\tilde{\mu}$ を積，ν_* を逆元とする群となる．以上の構成は X について自然である．

■

特に，ループ空間 ΩX が H 空間であり，約懸垂 SX が余 H 空間であることは注目すべきである．

系 7.17:

$X,\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ をとる．

(1) $[X, \Omega Y]_0 = [SX, Y]_0$ は群．
(2) $\left[X, \Omega^2 Y\right]_0 = [SX, \Omega Y]_0 = \left[S^2 X, Y\right]_0$ は $\mathbb{Z}$ 加群．

証明 ■

定理 7.12, 7.13 とファイブレーション・コファイブレーション系列と系 7.17 を組み合わせることで重要な完全列が得られる：

定理 7.18: Puppe 系列

$Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を任意に与える．

(1) $F \hookrightarrow E \to B$ がファイブレーションならば，圏 $\mathbf{CG}_*$ における完全列

$$\begin{aligned}\cdots \to [Y, \Omega^n F]_0 \to [Y, \Omega^n E]_0 \to [Y, \Omega^n B]_0 \to \\ \cdots [Y, \Omega B]_0 \to [Y, F]_0 \to [Y, E]_0 \to [Y, B]_0\end{aligned}$$

がある．この完全列は

- $n \geq 0$ の部分は **Sets** の完全列
- $n \geq 1$ の部分は群の完全列
- $n \geq 2$ の部分は $\mathbb{Z}$ 加群の完全列

となっている．

(2) $A \to X \to X/A$ がコファイブレーションならば，圏 $\mathbf{CG}_*$ における完全列

$$\begin{aligned}\cdots \to [S^n(X/A), Y]_0 \to [S^n X, Y]_0 \to [S^n A, Y]_0 \to \\ \cdots [SA, Y]_0 \to [X/A, Y]_0 \to [X, Y]_0 \to [A, Y]_0\end{aligned}$$

がある．この完全列は

- $n \geq 0$ の部分は **Sets** の完全列
- $n \geq 1$ の部分は群の完全列
- $n \geq 2$ の部分は $\mathbb{Z}$ 加群の完全列

となっている．

7.4 ホモトピー群

定義 7.25: ホモトピー群

$(X,\, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を任意に与える．基点付き空間 X の**第 $\boldsymbol{n}$ ホモトピー群** (n-th homotopy group) とは，

$$\boldsymbol{\pi_n(X,\, x_0)} \coloneqq [S^n, X]_0$$

のことを言う．これは $n = 0$ のとき集合，$n = 1$ のとき群，$n \geq 2$ のとき $\mathbb{Z}$ 加群である．

命題 7.6 と約懸垂の定義，および系 7.17-(1) より

$$\pi_n(X,\, x_0) = [S^n, X]_0 = \left[S^1 \wedge S^{n-1}, X\right]_0 = \left[SS^{n-1}, X\right]_0 = \left[S^{n-1}, \Omega X\right]_0 = \pi_{n-1}(\Omega X)$$

がわかる．この操作を $k \leq n$ 回繰り返すことで

$$\pi_n(X,\, x_0) = \pi_{n-k}(\Omega^k X)$$

がわかる．特に $\pi_n(X) = \pi_1(\Omega^{n-1} X)$ が成り立つ．

$Y = S^0 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ として Puppe 系列を使うと，即座に次の長完全列が得られる：

定理 7.19: ファイブレーションのホモトピー長完全列

$F \hookrightarrow E \to B$ をファイブレーションとする．このとき圏 $\mathbf{CG}_*$ の図式

$$\begin{aligned}\cdots \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots \\ \to \pi_1(F) \to \pi_1(E) \to \pi_1(B) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B)\end{aligned}$$

は完全列である．特に

- $n \geq 0$ の部分は **Sets** の完全列
- $n \geq 1$ の部分は群の完全列
- $n \geq 2$ の部分は $\mathbb{Z}$ 加群の完全列

となっている．

7.5 相対ホモトピー群

この節は未完である．参考になる文献としては，[9, ChapterIV]，[7, Chap 7] などがある．

定義 7.26: 相対ホモトピー群

空間対 (X, A) であって基点 $x_0 \in A \subset X$ を持つものを任意に与える．また，$p \coloneqq (1, 0, \cdots, 0) \in S^{n-1} \subset D^n$ とおく．
このとき，空間対 (X, A) の**相対ホモトピー群**（$n = 1$ のときは集合）とは

$$\boldsymbol{\pi_n(X, A, x_0)} \coloneqq \left[(D^n, S^{n-1}, p), (X, A, x_0)\right]$$

のこと．i.e. 空間対の圏の射[a] $(D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$ であって基点を保つもののホモトピー類全体の集合のこと．

[a] (X, A), (Y, B) を空間対としたとき，連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ であって，$f(A) \subset B$ を充たすもののこと．

!

対応 $\pi_n(\text{-})$ は

- $n = 1$ のとき空間対の圏から **Sets** への関手
- $n = 2$ のとき空間対の圏から群の圏への関手
- $n \geq 3$ のとき空間対の圏から $\mathbb{Z}$-**Mod** への関手

である．

つまり，$\pi_n(X, A, x_0)$ の代表元は連続写像 $f\colon D^n \longrightarrow X$ であって $f(S^{n-1}) \subset A$, $f(p) = x_0$ を充たすものであり，ホモトピー類 $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ の元 g はホモトピー $H\colon D^n \times I \longrightarrow X$ であって $H_t(S^{n-1}) \subset A$, $H_t(p) = x_0$ $(\forall t \in I)$ を充たすものによって f と繋がっている．

定理 7.20: 相対ホモトピー群の長完全列

相対ホモトピー群は

- $n \geq 2$ のとき群
- $n \geq 3$ のとき $\mathbb{Z}$ 加群

である．さらに，圏 $\mathbf{CG}_*$ における完全列

$$\begin{aligned}
\cdots \to \pi_n(A) &\to \pi_n(X) \to \pi_n(X, A) \\
&\to \pi_{n-1}(A) \to \cdots \\
&\to \pi_1(A) \to \pi_1(X) \to \pi_1(X, A) \to \pi_0(A) \to \pi_0(X)
\end{aligned}$$

がある．

<u>**証明**</u> ■

補題 7.3:

$F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ をファイブレーションとする．$A \subset B$ を部分空間とし，$G := f^{-1}(A)$ とおく．このとき $F \hookrightarrow G \xrightarrow{f}$ はファイブレーションである．
このとき，$\forall k \geq 1$ について，f は同型 $f_*\colon \pi_k(E,\, G) \longrightarrow \pi_k(B,\, A)$ を誘導する．特に $A = \{b_0\}$ とすると可換図式 7.10 が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \pi_k(E) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \pi_k(E,\, F) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \cdots (\text{exact}) \\
\cdots \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r] & \pi_k(E) \arrow[r] & \pi_k(B) \arrow[r] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r] & \cdots (\text{exact})
\end{tikzcd}$$

図 7.10

証明 ■

7.6 ホモトピー集合への基本群の作用

$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ とし，Y を基点付き空間とする．

定義 7.27:

連続写像[a] $f_0,\, f_1\colon X \longrightarrow Y$ と道 $u\colon I \longrightarrow Y$ をとり，f_0 と f_1 を繋ぐホモトピー $H\colon X \times I \longrightarrow Y$ が $F_t(x_0) = u(t)$ を充しているとする．このとき f_0 は f_1 に $\boldsymbol{u}$ **に沿って freely homotopic** であると言い，$f_0 \underset{u}{\simeq} f_1$ と書く．

[a] 基点を保たなくても良い

! $f_0,\, f_1$ が基点を保つ連続写像ならば u はループになる．i.e. 基点付き連続写像の free homotopy は $\pi_1(Y,\, y_0)$ の要素を引き起こす．

補題 7.4:

(1) $f_0\colon X \longrightarrow Y$ と道 $u\colon I \longrightarrow y$ であって $u(0) = f_0(x_0)$ を充たすものが与えられたとき，f_0 と u に沿って freely homotopic な $f_1\colon X \longrightarrow Y$ が存在する．

(2) $f_0 \underset{u}{\simeq} f_1$ かつ $f_0 \underset{u}{\simeq} f_2$ かつ $u \simeq v\ (\mathrm{rel}\, \partial I)$ ならば $f_0 \underset{\mathrm{const}}{\simeq} f_1$

(3) $f_0 \underset{u}{\simeq} f_1$ かつ $f_1 \underset{u}{\simeq} f_2 \quad \Longrightarrow \quad f_0 \underset{uv}{\simeq} f_2$

証明 (1) 仮定より $(X,\, \{x_0\})$ が NDR-対（i.e. コファイブレーション）なので明らか．

(2) $(I,\, \partial I)$, $(X,\, x_0)$ が NDR-対なので，補題 7.2 により $\big(X \times I,\, X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I\big)$ も NDR-対である．よって HEP の問題

$$
\begin{tikzcd}
X \times I \times \{0\} \cup X \times \{0,1\} \times I \cup \{x_0\} \times I \times I \arrow[r] \arrow[d] & Y \\
X \times I \times I \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

は解 $H\colon X \times I \times I \longrightarrow Y$ を持つ．

(3) 自明

■

7.6.1 基本群の作用

$\pi_1(Y, y_0)$ の $[X, Y]_0$ への作用

$$\Theta\colon \pi_1(Y, y_0) \times [X, Y]_0 \longrightarrow [X, Y]_0,\ ([u], [f]) \longmapsto [u] \cdot [f]$$

を，$f \underset{u}{\simeq} f_1$ なる $f_1\colon X \longrightarrow Y$ を用いて $[u] \cdot [f] \coloneqq [f_1]$ と定めよう．well-definedness を確認する：

__証明__ 補題 7.4-(2) より $[f_1]$ が u によらないことがわかる．

$[f] = [g] \in [X, Y]_0$ かつ $g \underset{u}{\simeq} g_1$ とする．すると

$$f_1 \underset{u^{-1}}{\simeq} f \underset{\mathrm{const}}{\simeq} g \underset{u}{\simeq} g_1$$

が成り立つ．補題 7.4-(3) より f_1 と g_1 は基点付きホモトピーである． ■

定理 7.21:

Y が弧状連結ならば $[X, Y]$ は作用 Θ による $[X, Y]_0$ の軌道空間である．

__証明__ 基点を無かったことにする忘却関手

$$\Phi\colon [X, Y]_0 \longrightarrow [X, Y]$$

が商写像になることを示す. $\Phi([u] \cdot [f]) = [f]$ であり, $\Phi([f_0]) = \Phi([f_1])$ ならばある u が存在して $[u] \cdot [f_0] = [f_1]$ となる．i.e. $[f_1] \in \pi(Y, y_0) \cdot [f_0]$ である．Φ が全射であることは，補題 7.4-(3) および Y が弧状連結であることから従う． ■

系 7.22:

Y が弧状連結かつ単連結ならば忘却関手 $[X, Y]_0 \longrightarrow [X, Y]$ は全単射になる．

7.6.2 被覆空間による方法

7.7 Hurewicz の定理

未完

付録 A

ホモロジー代数に入門するための下準備

この章では，ホモロジー代数について基本的なことをまとめる．

A.1　図式

ここでの諸定義は [11, 1.2 節] による．

定義 A.1: 有向グラフ

有向グラフ (directed graph) とは，以下の 2 つ組 (V, E) のことを言う：

- 頂点集合 V
- 頂点の 2 つ組全体の集合 $V \times V$ によって添字付けられた集合族 $E := \{J(v, w)\}_{(v, w) \in V \times V}$

V の元のことを**頂点** (vertex)，**集合** $J(v, w) \in E$ の元のことを頂点 v から頂点 w へ向かう**辺** (edge) と呼ぶ．

定義 A.2: 環上の加群の図式

R を環，$\mathcal{I} := \bigl(I, \{J(i, j)\}_{(i, j) \in I \times I}\bigr)$ を有向グラフとする．$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の**図式** (diagram) とは次の 2 つ組のことを言う：

- 左 R 加群の族 $\{M_i\}_{i \in I}$
- 左 R 加群の準同型写像の族[a]

$$\Bigl\{\{f_\varphi \colon M_i \to M_j\}_{\varphi \in J(i, j)}\Bigr\}_{(i, j) \in I \times I}$$

[a] 2 頂点 $i, j \in I$ を選んできたとき，$J(i, j)$ は i から j へ向かう辺全体の**集合**である．最も一般的なグラフを考えているので，i から j へ向かう辺が複数存在しうるのである．なので，念のため族の添字を入れ子にした．なお，$J(i, j) = \emptyset$ の場合，図式上では M_i, M_j が準同型写像で結ばれないと言うことになる．

いちいち断るのは面倒なので，以降ではある有向グラフ上の左 R 加群の図式のことを単に左 R 加群の図式と呼ぶ．

A.1.1　可換図式

定義 A.2 のように図式の概念を形式化することで，図式の**可換性**を定式化できる．有向グラフ $\mathcal{I} := \left(I,\ \{J(i,\,j)\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$ 上の図式 $\left(\{M_i\}_{i\in I},\ \left\{\{f_\varphi\colon M_i \to M_j\}_{\varphi\in J(i,\,j)}\right\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$ が与えられたとする．このとき，ある頂点 i から有向グラフの辺を辿って j へ行く経路全体の集合は

$$\tilde{J}(i,\,j) := \coprod_{n=0}^{\infty} \underbrace{\coprod_{\substack{i_0,\,\dots,\,i_n\in I\\ i_0=i,\,i_n=j}} \left[J(i_{n-1},\,i_n)\times\cdots\times J(i_1,\,i_2)\times J(i_0,\,i_1)\right]}_{=:\tilde{J}(i,\,j)_n\text{ と書く．}n-1\text{ 個の頂点を経由する経路全体の集合．}}$$

と書けることに注意する[*1]．また，$n-1$ 点を経由する任意の経路はこの記法だと

$$(\varphi_n,\,\dots,\,\varphi_1) \in \tilde{J}(i,\,j)_n$$

と書かれるわけだが，これに対応する準同型写像の「たどり方」を

$$f_{(\varphi_n,\,\dots,\,\varphi_1)} := f_{\varphi_n}\circ\cdots\circ f_{\varphi_1}$$

と書くことにする[*2]．ただし $f_{\mathrm{id}_i} := 1_{M_i}$ と約束する．

定義 A.3: 可換図式

図式 $\left(\{M_i\}_{i\in I},\ \left\{\{f_\varphi\colon M_i \to M_j\}_{\varphi\in J(i,\,j)}\right\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$ が**可換図式** (commutative diagram) であるとは，任意の始点 $i\in I$ と終点 $j\in I$ に対して

$$f_\varphi\colon M_i \longrightarrow M_j \quad \text{w/}\quad \varphi\in\tilde{J}(i,\,j)$$

が，全ての経路の取り方 $\forall\varphi\in\tilde{J}(i,\,j)$ について等しくなることを言う．

A.1.2　図式の圏

有向グラフ

$$\mathcal{I} = \left(I,\ \{J(i,\,j)\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$$

を素材にして，大きな有向グラフ

$$\left(I,\ \{\tilde{J}(i,\,j)\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$$

を構成できる．ここで

(1) 頂点を対象とする：

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) := I$$

[*1] $n=0$ の場合もこれで良い．始点 i と終点 j が一致しているならば，これは空集合からの写像 J（ただ一つ存在）を $i_0=i=j$ なる添字について直和したものなので一元集合 $\{\mathrm{id}_i\}$ となり，始点と終点が一致しない場合は空集合からの写像を空なる添字について直和したものなので空集合になるからである．

[*2] $\tilde{J}(i,\,j)_n$ の定義で添字が減少する方向に直積をとったのは，このように写像の合成と整合させるためであった．

(2) 任意の頂点（対象）$i,\, j \in I$ に対して，i を始点，j を終点とする経路を射とする：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j) \coloneqq \tilde{J}(i,\, j)$$

(3) $\forall i,\, j,\, k \in I$ に対して定まる写像

$$\begin{aligned} \circ\colon \tilde{J}(j,\, k) \times \tilde{J}(i,\, j) &\longrightarrow \tilde{J}(i,\, k), \\ \big((\varphi_n,\, \dots,\, \varphi_1),\, (\psi_m,\, \dots,\, \psi_1)\big) &\longmapsto (\varphi_n,\, \dots,\, \varphi_1,\, \psi_m,\, \dots,\, \psi_1) \end{aligned}$$

を合成とする．

このようにして圏 $\mathcal{I}$（さらに言うとモノイド）を定義できる．実際，恒等射は先程脚注で述べた $\mathrm{id}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, i)$ とすればよく，合成の結合則は自明である．

有向グラフ $\mathcal{I}$ を圏と見做したとき，$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M} \coloneqq \Big(\big\{M_i\big\}_{i\in I},\, \Big\{\big\{f_\varphi\colon M_i \to M_j\big\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\Big\}_{(i,\, j)\in I\times I}\Big)$$

は圏 $\mathcal{I}$ から左 R 加群の圏 R-$\mathbf{Mod}$ への共変関手と言うことになる：

(1) 各頂点 $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}) = I$ に対して，左 R 加群 M_i を対応づける：

$$\mathcal{M}(i) \coloneqq M_i$$

(2) $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}) = I$ に対して，経路 $\varphi \in \tilde{J}(i,\, j)$ に左 R 加群の準同型写像 $f_\varphi\colon M_i \to M_j$ を対応付ける：

$$\mathcal{M}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(M_i,\, M_j),\ \varphi \longmapsto \mathcal{M}(\varphi) \coloneqq f_\varphi$$

であって，$\forall i,\, j,\, k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}) = I$ および $\forall \varphi \in \tilde{J}(i,\, j),\, \forall \psi \in \tilde{J}(j,\, k)$ に対して

$$f_{\mathrm{id}_i} = 1_{M_i}, \quad f_{\psi\circ\varphi} = f_\psi \circ f_\varphi$$

が成立するからである．

A.1.3 フィルタードな圏

定義 A.4: フィルタード

圏 $\mathcal{I} = \big(I,\, \{J(i,\, j)\}_{(i,\, j)\in I\times I}\big)$ が**フィルタード** (filtered) であるとは，以下の 3 条件を充たすことをいう：

(1) $I \neq \emptyset$

(2) $\forall i,\, i' \in I$ に対してある $j \in I$ が存在し，

$$J(i,\, j) \neq \emptyset \ \text{かつ}\ J(i',\, j) \neq \emptyset$$

を充たす．i.e. 図式 A.1a を書くことができる．

(3) $\forall i,\, i' \in I$ および $\forall \varphi,\, \psi \in J(i,\, i')$ に対して，ある $j \in I$ および $\mu \in J(i',\, j)$ が存在して

$$\mu \circ \varphi = \mu \circ \psi$$

を充たす．i.e. 図式 A.1b が可換図式になる．

$$\begin{tikzcd}
\forall i \arrow[dr] & \\
& \exists j \\
\forall i' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(a) 条件 (2)

$$\begin{tikzcd}
\forall i \arrow[r, bend left, "\forall\psi"] \arrow[r, bend right, "\forall\varphi"'] & \forall i' \arrow[r, "\exists\mu"] & \exists j
\end{tikzcd}$$

(b) 条件 (3)

図 A.1: フィルタードな圏

特に，$I \neq \emptyset$ が**有向集合** (directed set) ならば圏 $\mathcal{I}$ はフィルタードな圏となる．

定義 A.5: 有向集合

空でない**順序集合** $(I, \leq)$ が**有向集合** (directed set) であるとは，$\forall i, i' \in I$ に対してある $j \in I$ が存在し，

$$i \leq j \text{ かつ } i' \leq j$$

を充たすことを言う．

A.2　完全列と蛇の補題

R を環とする．左 R 加群の準同型 $f\colon M \longrightarrow N$ に対して

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &:= \{\, x \in M \mid f(x) = 0 \,\}, \\
\operatorname{Im} f &:= \{\, y \in N \mid \exists x \in M,\ y = f(x) \,\}, \\
\operatorname{Coker} f &:= N/\operatorname{Im} f, \\
\operatorname{Coim} f &:= M/\operatorname{Ker} f
\end{aligned}$$

と定義する．これらはすべて**部分左 R 加群をなす**．これらの部分加群に関わる標準的包含，標準的射影を次の記号で書く：

$$\begin{aligned}
\ker f &\colon \operatorname{Ker} f \hookrightarrow M,\ x \mapsto x \\
\operatorname{im} f &\colon \operatorname{Im} f \hookrightarrow N,\ y \mapsto y \\
\operatorname{coker} f &\colon N \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} f,\ y \mapsto y + \operatorname{Im} f \\
\operatorname{coim} f &\colon M \twoheadrightarrow \operatorname{Coim} f,\ x \mapsto x + \operatorname{Ker} f
\end{aligned}$$

定義より明らかに $\ker f, \operatorname{im} f$ は単射，$\operatorname{coker} f, \operatorname{coim} f$ は全射である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[dr, "\ker f"] & & & \mathrm{Coker}\, f \\
& M \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\mathrm{coker}(\ker f)"', shift right, red] \arrow[dl, "\mathrm{coim}\, f", shift left] & N \arrow[ur, "\mathrm{coker}\, f"'] & \\
\mathrm{Coim}\, f & & & \mathrm{Im}\, f \arrow[ul, "\mathrm{im}\, f", shift left] \arrow[ul, "\ker(\mathrm{coker}\, f)"', shift right, red]
\end{tikzcd}
$$

図 A.2: 左 R 加群の圏 R-**Mod** における核，像，余核，余像の定義

像については

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, f), \quad \mathrm{im}\, f = \ker(\mathrm{coker}\, f)$$

が，**余像** (coimage) については

$$\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Coker}(\ker f), \quad \mathrm{coim}\, f = \mathrm{coker}(\ker f)$$

が成り立つ．これは一般のアーベル圏における像，余像の定義になる．

補題 A.1:

- f が単射 $\iff$ $\mathrm{Ker}\, f = 0$
- f が全射 $\iff$ $\mathrm{Im}\, f = N$ $\iff$ $\mathrm{Coker}\, f = 0$

定義 A.6: 完全列

- 左 R 加群 M_1, M, M_2 および左 R 加群の準同型 $f_1\colon M_1 \longrightarrow M$, $f_2\colon M \longrightarrow M_2$ を与える．このとき系列

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M_2$$

が M において**完全** (exact) であるとは, $\mathrm{Im}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_2$ が成り立つこと．これは $\mathrm{Ker}\, f_2 \subset \mathrm{Im}\, f_1$ かつ $f_2 \circ f_1 = 0$ と同値である．

- 左 R 加群の図式

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

が**完全**であるとは，$\forall i$ に対して系列 $M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2}$ が完全であること．

次の命題は基本的である：

命題 A.1:

(1) (a) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ が完全 $\iff$ f は単射.

(b) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ f は全射.

(2) (a) $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ が完全 $\iff$ f により $L \cong \operatorname{Ker} g$

(b) $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ g により $\operatorname{Coker} f \cong N$

(3) 任意の左 R 加群の準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ に対して，以下の 3 つの図式は完全列になる（図式 A.3）：

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\ker f} M \xrightarrow{\operatorname{coim} f} \operatorname{Coim} f \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \xrightarrow{\operatorname{im} f} N \xrightarrow{\operatorname{coker} f} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\ker f} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\operatorname{coker} f} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[dr, "\ker f"] & & & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & 0 \\
& & M \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\operatorname{coim} f"] & N \arrow[ur, "\operatorname{coker} f"] & & \\
0 & \operatorname{Coim} f \arrow[l] & & & \operatorname{Im} f \arrow[ul, "\operatorname{im} f"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

図 A.3: 準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ に伴う短完全列

証明 (1) (a) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ が完全 $\iff$ $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} 0 = 0$ $\iff$ f は単射.

(b) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ $N = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Im} f$ $\iff$ f は全射.

(2) (a) $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ が完全 $\iff$ f が単射かつ $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. $\iff$ $L \longrightarrow \operatorname{Ker} g,\ x \longmapsto f(x)$ が well-defined な同型写像

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Ker} g \arrow[dr, "\ker g"] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & L
\end{tikzcd}$$

(b) $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ かつ g が全射 $\iff$ $\operatorname{Coker} f \longrightarrow N,\ x + \operatorname{Im} f \longmapsto g(x)$ が well-defined な同型写像[*3].

$$\begin{tikzcd}
& & \operatorname{Coker} f \arrow[d, "\cong"] & \\
L \arrow[r, "f"] & M \arrow[ur, "\operatorname{coker} f"] \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[*3] $g(x) \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f \longrightarrow N) \iff x \in \operatorname{Ker} g$ より $\operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f \longrightarrow N) = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ なので単射.

(3)　定義から $\ker f$ は単射かつ $\operatorname{coim} f$ は全射であり，また $\operatorname{coim} f$ の定義から $\operatorname{Ker}(\operatorname{coim} f) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im}(\ker f)$ なので 1 つ目の図式は完全である．

定義から $\operatorname{im} f$ は単射かつ $\operatorname{coker} f$ は全射であり，また $\operatorname{coker} f$ の定義から $\operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f) = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f)$ なので 2 つ目の図式も完全.

さらに $\ker f$ は単射かつ $\operatorname{coker} f$ は全射であり，$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im}(\ker f)$，$\operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f) = \operatorname{Im} f$ であることから 3 つ目の図式も完全である．

■

命題 A.2:

左 R 加群の可換図式 A.4a が与えられたとき，自然に可換図式 A.4b が誘導され，2 つの行が完全列となる．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"] & N \arrow[d, "h_2"] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] \arrow[d, "\overline{h_1}"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"] & N \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] \arrow[d, "h_2"] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] \arrow[d, "\overline{h_2}"] & 0 & (\text{exact}) \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f' \arrow[r, "\ker f'"] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "\operatorname{coker} f'"] & \operatorname{Coker} f' \arrow[r] & 0 & (\text{exact}) \end{tikzcd}$$

(b)

図 A.4: 自然に誘導される可換図式

証明　まず $\overline{h_1}$ を定義する．与えられた図式 A.4a の可換性から $\forall x \in \operatorname{Ker} f$ に対して $f'\bigl(h_1(x)\bigr) = h_2\bigl(f(x)\bigr) = 0$ が成立する．i.e. $\operatorname{Im} h_1|_{\operatorname{Ker} f} \subset \operatorname{Ker} f'$ なので，写像

$$\overline{h_1} \colon \operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Ker} f',\ x \longmapsto h_1(x)$$

は well-defined な準同型写像である．このとき $\forall x \in \operatorname{Ker} f$ に対して

$$(\ker f')\bigl(\overline{h_1}(x)\bigr) = (\ker f')\bigl(h_1(x)\bigr) = h_1(x) = h_1\bigl((\ker f)(x)\bigr)$$

が成り立つので図式 A.4b の左半分は可換.

次に $\overline{h_2}$ を定義する．$\forall y \in x + \operatorname{Im} f$ は $y = x + f(z)$ の形で書けるが，図式 A.4a の可換性から $h_2(y) = h_2(x) + f'\bigl(g(z)\bigr) \in h_2(x) + \operatorname{Im} f'$ が成り立つ．従って写像

$$\overline{h_2} \colon \operatorname{Coker} f \longrightarrow \operatorname{Coker} f',\ x + \operatorname{Im} f \longmapsto h_2(x) + \operatorname{Im} f'$$

は well-defined な準同型写像である．このとき $\forall x \in N$ に対して

$$\overline{h_2}\bigl((\operatorname{coker} f)(x)\bigr) = h_2(x) + \operatorname{Im} f' = (\operatorname{coker} f')\bigl(h_2(x)\bigr)$$

が成り立つので図式 A.4b の右半分も可換．

各行の完全性は命題 A.1-(3) より従うので，題意が示された． ■

定理 A.1: 蛇の補題

2 つの行が完全であるような左 R 加群の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 & & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

図 A.5: 蛇の補題の仮定

を考える．このとき，以下の完全列が存在する：

$$\mathrm{Ker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{f_1}} \mathrm{Ker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{f_2}} \mathrm{Ker}\,h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{g_1}} \mathrm{Coker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{g_2}} \mathrm{Coker}\,h_3$$

ただし，命題 A.2 と同様に

$$\begin{aligned}
\overline{f_i}&\colon \mathrm{Ker}\,h_i \longrightarrow \mathrm{Ker}\,h_{i+1},\ x \longmapsto f_i(x),\\
\overline{g_i}&\colon \mathrm{Coker}\,h_i \longrightarrow \mathrm{Coker}\,h_{i+1},\ x + \mathrm{Im}\,h_i \longmapsto g_i(x) + \mathrm{Im}\,h_{i+1}
\end{aligned}$$

$(i = 1,\ 2)$ と定める．

証明 図式 A.5 の行の完全性から $f_2 \circ f_1 = 0,\ g_2 \circ g_1 = 0$ なので $\overline{f_2} \circ \overline{f_1} = 0,\ \overline{g_2} \circ \overline{g_1} = 0$ がわかる．i.e. $\mathrm{Im}\,\overline{f_1} \subset \mathrm{Ker}\,\overline{f_2},\ \mathrm{Im}\,\overline{g_1} \subset \mathrm{Ker}\,\overline{g_2}$.

$\mathrm{Ker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{f_1}} \mathrm{Ker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{f_2}} \mathrm{Ker}\,h_3$ (exact)

$\mathrm{Im}\,\overline{f_1} \supset \mathrm{Ker}\,\overline{f_2}$ を示せばよい．$\forall x \in \mathrm{Ker}\,\overline{f_2}$ を 1 つとると，$\overline{f_2}(x) = f_2(x) = 0$ なので $x \in \mathrm{Ker}\,f_2 = \mathrm{Im}\,f_1$ でもある．i.e. ある $y \in M_1$ が存在して $x = f_1(y)$ と書ける．

一方，$\overline{f_2}$ の定義から $x \in \mathrm{Ker}\,h_2$ である．ここで図式 A.5 の可換性を使うと

$$0 = h_2(x) = h_2\big(f_1(y)\big) = g_1\big(h_1(y)\big)$$

がわかるが，図式 A.5 の行の完全性から g_1 は単射なので $h_1(y) = 0 \iff y \in \mathrm{Ker}\,h_1$ がわかる．故に $\overline{f_1}(y) = x$ の左辺が定義できて $x \in \mathrm{Im}\,\overline{f_1}$ が示された．

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & x \arrow[d, mapsto, "h_2"] \\
h_1(y) \arrow[r, mapsto, "g_1"] & 0
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Coker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{g_1}} \mathrm{Coker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{g_2}} \mathrm{Coker}\,h_3$ (exact)

$\operatorname{Im}\overline{g_1} \supset \operatorname{Ker}\overline{g_2}$ を示せばよい．$\forall x+\operatorname{Im}h_2 \in \operatorname{Ker}\overline{g_2}$ を 1 つとると，$\overline{g_2}(x+\operatorname{Im}h_2) = g_2(x)+\operatorname{Im}h_3 = \operatorname{Im}h_3$ なので $g_2(x) \in \operatorname{Im}h_3$．i.e. ある $y \in M_3$ が存在して $g_3(x) = h_3(y)$ と書ける．さらに図式 A.5 の行の完全性から f_2 は全射だから，ある $z \in M_2$ が存在して $y = f_2(z)$ と書ける．ここで図式 A.5 の可換性を使うと

$$\begin{aligned} & g_2\big(x-h_2(z)\big) = g_2(x) - g_2\big(h_2(z)\big) = g_2(x) - h_3\big(f_2(z)\big) = g_2(x) - g_2(x) = 0 \\ \iff\ & x - h_2(z) \in \operatorname{Ker}g_2 = \operatorname{Im}g_1 \end{aligned}$$

従ってある $w \in M_1$ が存在して $g_1(w) = g_1\big(x-h_2(z)\big) \in g_1(x)+\operatorname{Im}h_2$ を充たす. 故に $\overline{g_1}(w+\operatorname{Im}h_1) = g_1(w)+\operatorname{Im}h_2 = x+\operatorname{Im}h_2$ であり，$x+\operatorname{Im}h_2 \in \operatorname{Im}\overline{g_1}$ が示された.

δ: $\operatorname{Ker}h_3 \longrightarrow \operatorname{Coker}h_1$ の構成

図式 A.5 の行の完全性から $\forall x \in \operatorname{Ker}h_3, \exists y \in M_2,\ f_2(y) = x$ が成り立つ．このとき図式 A.5 の可換性より

$$\begin{aligned} & g_2\big(h_2(y)\big) = h_3\big(f_2(y)\big) = h_3(x) = 0 \\ \iff\ & h_2(y) \in \operatorname{Ker}g_2 = \operatorname{Im}g_1 \\ \iff\ & \exists z \in N_1,\ g_1(z) = h_2(y). \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

ここで，$z+\operatorname{Im}h_1 \in \operatorname{Coker}h_1$ が $y \in M_2, z \in N_1$ のとり方によらずに定まることを示す. $y' \in M_2, z' \in N_1$ を $f_2(y') = x,\ h_2(y') = g_1(z')$ を充たすようにとる．このとき

$$f_2(y'-y) = 0 \quad\iff\quad y'-y \in \operatorname{Ker}f_2 = \operatorname{Im}f_1$$

だから，ある $v \in M_1$ が存在して $y'-y = f_1(v)$ とかける．すると図式 A.5 の可換性より

$$g_1(z'-z) = h_2(y'-y) = h_2\big(f_1(v)\big) = g_1\big(h_1(v)\big)$$

が成り立つが，図式 A.5 の行の完全性から g_1 は単射なので $z'-z = h_1(v) \in \operatorname{Im}h_1$ がわかった.

以上の考察から，写像

$$\delta\colon\ \operatorname{Ker}h_3 \longrightarrow \operatorname{Coker}h_1,\ x \longmapsto z+\operatorname{Im}h_1 \tag{A.2.2}$$

は well-defined な準同型である.

$\operatorname{Ker}h_2 \xrightarrow{\overline{f_2}} \operatorname{Ker}h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}h_1$ (exact)

まず $\operatorname{Im}\overline{f_2} \subset \operatorname{Ker}\delta$ を示す．$\forall x \in \operatorname{Im}\overline{f_2}$ を 1 つとると，$\overline{f_2}$ の定義から

$$\exists y \in \operatorname{Ker}h_2,\ f_2(y) = \overline{f_2}(y) = x$$

と書ける．従って (A.2.1) で定義される z は $g_1(z) = h_2(y) = 0$ を充たすが，図式 A.5 の行の完全性から g_1 は単射なので $z = 0$．故に δ の定義 (A.2.2) から $\delta(x) = 0+\operatorname{Im}h_1$ であり，$x \in \operatorname{Ker}\delta$ が言えた.

次に $\operatorname{Im}\overline{f_2} \supset \operatorname{Ker}\delta$ を示す．$\forall x \in \operatorname{Ker}\delta$ を 1 つとると，(A.2.1) で定義される z は $z \in \operatorname{Im}h_1$ を充たす．従って

$$\exists w \in M_1,\ h_1(w) = z$$

であり，図式 A.5 の可換性から $x = f_2(y), g_1(z) = h_2(y)$ なる $y \in M_2$ に対して

$$\begin{aligned} & h_2\big(y-f_1(w)\big) = g_1(z) - g_1(z) = 0, \\ & f_2\big(y-f_1(w)\big) = x \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $x = \overline{f_2}\big(y-f_1(w)\big) \in \operatorname{Im}\overline{f_2}$ が言えた.

$\mathbf{Ker}\, h_3 \xrightarrow{\delta} \mathbf{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\overline{g_1}} \mathbf{Coker}\, h_2$ **(exact)**

まず $\operatorname{Im}\delta \subset \operatorname{Ker}\overline{g_1}$ を示す．$\forall \delta(x) = z + \operatorname{Im} h_1 \in \operatorname{Im}\delta$ を 1 つとると，(A.2.1) の z の定義から

$$\overline{g_1}(z + \operatorname{Im} h_1) = g_1(z) + \operatorname{Im} h_2 = h_2(y) + \operatorname{Im} h_2 = \operatorname{Im} h_2. \quad \Longrightarrow \quad z + \operatorname{Im} h_1 \in \operatorname{Ker}\overline{g_1}.$$

次に $\operatorname{Im}\delta \supset \operatorname{Ker}\overline{g_1}$ を示す．$\forall x + \operatorname{Im} h_1 \in \operatorname{Ker}\overline{g_1}$ を 1 つとると $g_1(x) \in \operatorname{Im} h_2$ が成り立つ．従って

$$\exists w \in M_2,\ h_2(w) = g_1(x)$$

である．一方，図式 A.5 の行の完全性および可換性から

$$\begin{aligned} & 0 = g_2\big(g_1(x)\big) = g_2\big(h_2(w)\big) = h_3\big(f_2(w)\big) \\ \Longleftrightarrow \quad & f_2(w) \in \operatorname{Ker} h_3. \end{aligned}$$

δ の定義 (A.2.2) から $\delta\big(f_2(w)\big) = x$ であり，$x \in \operatorname{Im}\delta$ が言えた．

■

定理 A.2: 5 項補題

2 つの行が完全であるような左 R 加群の図式

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_5 \arrow[d, "h_5"] \\ N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5 \end{tikzcd}$$

を与える．このとき，h_1, h_2, h_4, h_5 が同型ならば h_3 も同型である．

証明 (全射性)

$\forall y_3 \in N_3$ をとる．h_4 は全射なので $g_3(y_3) = h_4(x_4)$ を充たす $x_4 \in M_4$ がある．ここで $h_5 \circ f_4(x_4) = g_4 \circ h_4(x_4) = g_4 \circ g_3(y_3) = 0$ だが，仮定より h_5 は単射なので $f_4(x_4) = 0$, i.e. $x_4 \in \operatorname{Ker} f_4 = \operatorname{Im} f_3$ である．よって $x_4 = f_3(x_3')$ を充たす $x_3' \in M_3$ がある．さて，

$$g_3\big(y_3 - h_3(x_3')\big) = h_4(x_4) - h_4\big(f_3(x_3')\big) = 0$$

だから $y_3 - h_3(x_3') \in \operatorname{Ker} g_3 = \operatorname{Im} g_2$ である．i.e. $y_3 - h_3(x_3') = g_2(y_2)$ を充たす $y_2 \in N_2$ が存在する．h_2 が全射なので $y_2 = h_2(x_2)$ を充たす $x_2 \in M_2$ が存在する．故に

$$\begin{aligned} h_3\big(f_2(x_2) + x_3'\big) &= g_2\big(h_2(x_2)\big) + h_3(x_3') \\ &= g_2(y_2) + h_3(x_3') \\ &= y_3 - h_3(x_3') + h_3(x_3') = y_3 \end{aligned}$$

が成り立つ．

(単射性)

$\forall x_3 \in \operatorname{Ker} h_3$ をとる．この時 $h_4 \circ f_3(x_3) = g_3 \circ h_3(x_3) = 0$ だが h_4 は単射なので $f_3(x_3) = 0$, i.e. $x_3 \in \operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{Im} f_2$ が言える．よって $x_2 \in M_2$ が存在して $f_2(x_2) = x_3$ が成り立つ．ここで $x_3 \in \operatorname{Ker} h_3$ より $g_2 \circ h_2(x_2) = h_3 \circ f_2(x_2) = h_3(x_3) = 0$, i.e. $h_2(x_2) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$ である．よってある $y_1 \in N_1$

が存在して $h_2(x_2) = g_1(y_1)$ を充たす．h_2 は単射かつ $h_2\big(f_1(x_1) - x_2\big) = g_1 \circ h_1(x_1) - g_1(y_1) = 0$ なので $f_1(x_1) - x_2 = 0 \iff x_2 = f_1(x_1)$ ．よって $x_3 = f_2(x_2) = f_2 \circ f_1(x_1) = 0$ が言えた．i.e. $\mathrm{Ker}\, h_3 = 0$ であり，h_3 は単射である．

■

定理 A.3: 9 項補題

左 R 加群の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

の縦横 6 本の列がチェイン複体であり，うち 5 本の列が完全であるとする．このとき残りの 1 本も完全である．

証明 必要なら図式の縦横を入れ替えることで，横向きの列が全て完全であると仮定しても一般性を損なわない．縦のチェイン複体をそれぞれ $A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet$ と書く．このとき与えられた図式はチェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow A_\bullet \longrightarrow B_\bullet \longrightarrow C_\bullet \longrightarrow 0$$

と見做すことができるので，ホモロジー長完全列をとることで完全列

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow H_2(A_\bullet) \longrightarrow H_2(B_\bullet) \longrightarrow H_2(C_\bullet) \\
&\longrightarrow H_1(A_\bullet) \longrightarrow H_1(B_\bullet) \longrightarrow H_1(C_\bullet) \\
&\longrightarrow H_0(A_\bullet) \longrightarrow H_0(B_\bullet) \longrightarrow H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

が得られる．仮定より $H_*(A_\bullet), H_*(B_\bullet), H_*(C_\bullet)$ のうち 2 つは 0 なので，残りの 1 つも完全列 $0 \longrightarrow H_q(X_\bullet) \longrightarrow 0$ によって 0 だとわかる．i.e. 残りの列も完全列である． ■

A.3　普遍性による諸定義

R を環とする．

A.3.1 核・余核

命題 A.3: 核・余核の普遍性

左 R 加群の準同型写像 $f\colon M \longrightarrow M'$ を与える．また $i\colon \mathrm{Ker}\, f \hookrightarrow M,\ x \mapsto x$ を標準的包含，$p\colon M' \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\, f,\ x \mapsto x + \mathrm{Coker}\, f$ を標準的射影とする．このとき以下が成り立つ：

(核の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$i_*\colon \mathrm{Hom}_R\,(N,\, \mathrm{Ker}\, f) \longrightarrow \bigl\{\, g \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, M) \bigm| f \circ g = 0 \,\bigr\},\ h \longmapsto i \circ h$$

は well-defined な全単射である．特に $\forall g \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, M)$ s.t. $f \circ g = 0$ に対して $\exists! h \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, \mathrm{Ker}\, f)$ s.t. $i \circ h = g$（図式 A.6a）．

(余核の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$p^*\colon \mathrm{Hom}_R\,(\mathrm{Coker}\, f,\, N) \longrightarrow \bigl\{\, g \in \mathrm{Hom}_R\,(M',\, N) \bigm| g \circ f = 0 \,\bigr\},\ h \longmapsto h \circ p$$

は well-defined な全単射である．特に $\forall g \in \mathrm{Hom}_R\,(M',\, N)$ s.t. $g \circ f = 0$ に対して $\exists! h \in \mathrm{Hom}_R\,(\mathrm{Coker}\, f,\, N)$ s.t. $h \circ p = g$（図式 A.6b）．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \\
N \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

(a) 核の普遍性

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Coker}\, f \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\
& & N
\end{tikzcd}$$

(b) 余核の普遍性

<u>証明</u> (1) **well-definedness** 核の定義により $f \circ i = 0$ だから，$\forall h \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, \mathrm{Ker}\, f)$，$f \circ \bigl(i_*(h)\bigr) = (f \circ i) \circ h = 0$.

全単射であること $\forall g \in \bigl\{\, g \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, M) \bigm| f \circ g = 0 \,\bigr\}$ をとる．このとき $\forall x \in N$ に対して $f\bigl(g(x)\bigr) = 0 \iff g(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ なので，写像

$$h\colon N \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f,\ x \longmapsto g(x)$$

は well-defined かつ $g = i \circ h \in \mathrm{Im}\, i_*$ が成り立つ．i.e. i_* は全射．
また，$h,\, h' \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, \mathrm{Ker}\, f)$ に対して

$$i_*(h) = i_*(h') \iff i \circ h = i \circ h' \implies \forall x \in N,\ i\bigl(h(x)\bigr) = i\bigl(h'(x)\bigr)$$

だが，i は単射なので $\forall x \in N,\ h(x) = h'(x) \iff h = h'$ が成り立つ．i.e. i_* は単射．

(2) **well-definedness** 余核の定義により $p \circ f = 0$ だから，$\forall h \in \mathrm{Hom}_R\,(\mathrm{Coker}\, f,\, N)$，$p^*(h) \circ f = h \circ (p \circ f) = 0$.

全単射であること $\forall g \in \left\{ g \in \mathrm{Hom}_R(M',\, N) \,\middle|\, g \circ f = 0 \right\}$ をとる．このとき $\forall x' \in x + \mathrm{Coker}\, f$ はある $y \in M$ を用いて $x' = x + f(y)$ と書けるから

$$g(x') = g(x) + (g \circ f)(y) = g(x) \in N$$

が成り立つ．したがって写像

$$h\colon\ \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow N,\ x + \mathrm{Im}\, f \longmapsto g(x)$$

は well-defined であり，かつ $g = h \circ p \in \mathrm{Im}\, p^*$ が成り立つ．i.e. p^* は全射．
また，$h,\, h' \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f,\, N)$ に対して

$$p^*(h) = p^*(h') \quad \Longrightarrow \quad h \circ p = h' \circ p$$

が成り立つが，p は全射なので $h = h'$ が言える．i.e. p^* は単射．

■

別の左 R 加群 K と準同型写像 $i'\colon K \longrightarrow M$ が核の普遍性を充していて，次のような可換図式を書ける場合を考える．

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i'"] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \\
\forall N \arrow[u, dashed, "\exists!h'"] \arrow[ur, "g"] & &
\end{tikzcd}$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{h}\colon \mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\cong} K$ が**一意的に**存在する：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, bend left, "i'"] & & \\
& \mathrm{Ker}\, f \arrow[ul, "\exists!\widehat{h}"'] \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \\
& \forall N \arrow[u, dashed, "\exists!h"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uul, dashed, bend left, "\exists!h"] & &
\end{tikzcd}$$

<u>**証明**</u> 実際，$N = \mathrm{Ker}\, f$ とすると R 加群の準同型 $\widehat{h}\colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow K$ であって $i' \circ \widehat{h} = i$ を充たすものが一意に存在することがわかり，$N = K$ とすると R 加群の準同型 $\widehat{h}'\colon K \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f$ であって $i \circ \widehat{h}' = i'$ を充たすものが一意に存在することがわかる．このとき

$$\begin{aligned}
i_*(\widehat{h}' \circ \widehat{h}) &= (i \circ \widehat{h}') \circ \widehat{h} = i = i_*(\mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\, f}) \\
i'_*(\widehat{h} \circ \widehat{h}') &= (i' \circ \widehat{h}) \circ \widehat{h}' = i' = i'_*(\mathrm{id}_K)
\end{aligned}$$

だが，核の普遍性より $i_*,\, i'_*$ は単射なので

$$\begin{aligned}
\widehat{h}' \circ \widehat{h} &= \mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\, f} \\
\widehat{h} \circ \widehat{h}' &= \mathrm{id}_K
\end{aligned}$$

が従う．i.e. $\widehat{h}$ は同型写像である．

■

同様の議論は余核に対しても成り立つ：

別の左 R 加群 C と準同型写像 $p'\colon M' \longrightarrow C$ が余核の普遍性を充していて，次のような可換図式を書ける場合を考える．

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \arrow[r, "p'"] \arrow[dr, "g"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists! h'"] \\
& & \forall N
\end{tikzcd}$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{h}\colon \mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\cong} K$ が**一意的に**存在する：

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[rr, bend left, "p'"] & \mathrm{Coker}\, f \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \arrow[r, "\exists! \widehat{h}"] & C \arrow[dl, dashed, bend left, "\exists! h'"] \\
& & \forall N &
\end{tikzcd}$$

<u>**証明**</u> 実際，$N = \mathrm{Coker}\, f$ とすると R 加群の準同型 $\widehat{h}'\colon C \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ であって $\widehat{h}' \circ p' = p$ を充たすものが一意に存在することがわかり，$N = C$ とすると R 加群の準同型 $\widehat{h}\colon \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow C$ であって $\widehat{h} \circ p = p'$ を充たすものが一意に存在することがわかる．このとき

$$p^*(\widehat{h}' \circ \widehat{h}) = \widehat{h}' \circ (\widehat{h} \circ p) = p = p^*(\mathrm{id}_{\mathrm{Coker}\, f})$$
$$p'^*(\widehat{h} \circ \widehat{h}') = \widehat{h} \circ (\widehat{h}' \circ p') = p' = p'^*(\mathrm{id}_C)$$

だが，余核の普遍性より p^*, p'^* は単射なので

$$\widehat{h}' \circ \widehat{h} = \mathrm{id}_{\mathrm{Coker}\, f}$$
$$\widehat{h} \circ \widehat{h}' = \mathrm{id}_C$$

が従う．i.e. $\widehat{h}$ は同型写像である． ■

【例 A.3.1】商加群の普遍性

R 加群 M と，その任意の部分加群 $N \subset M$ を与える．包含準同型 $i\colon N \longrightarrow M,\ x \longmapsto x$ の余核の普遍性の図式は

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Coker}\, i = M/N \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{f}"] \\
& & \forall N
\end{tikzcd}$$

のようになる．すなわち，任意の左 R 加群 N と，$f \circ i = 0$ を充たす任意の準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ に対して，ある $\overline{f}\colon M/N \longrightarrow N$ が一意的に存在して可換図式

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \\
M/N \arrow[ur, dashed, "\exists ! \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

を充たすということである．$f \circ i = 0$ は $N \subset \operatorname{Ker} f$ と同値なので，商加群の普遍性が示されたことになる．

A.3.2　直和・直積

R を環，Λ を任意の添字集合とする．$\forall \lambda \in \Lambda$ に対応して R 加群 M_λ が与えられているとする．R 加群の族 $\bigl\{(M_\lambda,\, +,\, \cdot\,)\bigr\}_{\lambda\in\Lambda}$ の集合としての直積は

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \left\{\, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \;\middle|\; \forall\lambda \in \Lambda,\ x_\lambda \in M_\lambda \,\right\}$$

と書かれるのだった．

定義 A.7: 加群の直積・直和

Λ, $\bigl\{(M_\lambda,\, +,\, \cdot\,)\bigr\}_{\lambda\in\Lambda}$ を上述の通りにとる．

(1) 集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の上の加法 $+$ およびスカラー乗法 $\cdot$ を次のように定めると，組 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\, +,\, \cdot\right)$ は左 R 加群になる．これを加群の族 $\bigl\{(M_\lambda,\, +,\, \cdot\,)\bigr\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積** (direct product) と呼ぶ：

$$+\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \times \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ \bigl((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},\, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\bigr) \mapsto (x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$$\cdot : R \times \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ \bigl(a,\, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\bigr) \mapsto (a\cdot x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

添字集合 Λ が有限集合 $\{1,\, \dots,\, n\}$ であるときは

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$$

とも書く．

(2) 加群の直積 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\, +,\, \cdot\right)$ を与えると，次のように定義される部分集合 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は部分 R 加群をなす．これを加群の族 $\bigl\{(M_\lambda,\, +,\, \cdot\,)\bigr\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和** (direct sum) と呼ぶ：

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \left\{ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{有限個の添字 } i_1, \dots, i_n \in \Lambda \text{ を除いた} \\ \text{全ての添字 } \lambda\in\Lambda \text{ について } x_\lambda = 0\end{array} \right\}$$

添字集合 Λ が有限集合 $\{1,\, \dots,\, n\}$ であるときは

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

とも書く．

添字集合 Λ が有限のときは R 加群として $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ である．Λ が無限集合の時は，包含写像 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \hookrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ によって準同型であるが，同型とは限らない．

定義 A.8: 標準射影，標準包含

加群の族 $\{(M_\lambda, +, \cdot)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．

(1) 各添字 $\mu \in \Lambda$ に対して，次のように定義される写像 $\pi_\mu\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M_\mu$ のことを**標準射影** (canonical projection) と呼ぶ：

$$\pi_\mu\big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big) \coloneqq x_\mu$$

(2) 各添字 $\mu \in \Lambda$ に対して，次のように定義される写像 $\iota_\mu\colon M_\mu \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ のことを**標準包含** (canonical inclusion) と呼ぶ：

$$\iota_\mu(x) \coloneqq (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \quad {}^{\mathrm{w}}\!/ \quad y_\lambda \coloneqq \begin{cases} x, & : \lambda = \mu \\ 0. & : \text{otherwise} \end{cases}$$

加群の族をいちいち $\{(M_\lambda, +, \cdot)\}_{\lambda\in\Lambda}$ と書くと煩雑なので，以降では省略して $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と書くことにする．

命題 A.4: 直積・直和の普遍性

任意の添字集合 Λ，および加群の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．添字 $\mu \in \Lambda$ に対する標準射影，標準包含をそれぞれ π_μ, ι_μ と書く．

(直積の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R\Big(N, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\Big) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(N, M_\lambda) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & \{\pi_\lambda \circ f\}_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

は全単射である．i.e. 任意の左 R 加群 N，および任意の左 R 加群の準同型写像の族 $\{f_\lambda\colon N \to M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\forall \lambda \in \Lambda,\ \pi_\mu \circ f = f_\lambda$ を充たす準同型写像 $f\colon N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ が一意的に存在する（図式 A.7a）．

(直和の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N\Big) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, N) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & \{f \circ \iota_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

は全単射である．i.e. 任意の左 R 加群 N，および任意の左 R 加群の準同型写像の族

$\{ f_\lambda \colon M_\lambda \to N \}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\forall \lambda \in \Lambda,\ f \circ \iota_\lambda = f_\lambda$ を充たす準同型写像 $f\colon \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N$ が一意的に存在する（図式 A.7b）.

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"] \\
 & M_\lambda
\end{tikzcd}
$$

(a) 直積の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
M_\lambda \arrow[r, "\iota_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\
 & N
\end{tikzcd}
$$

(b) 直和の普遍性

<u>証明</u>　(1) **存在**　左 R 加群の準同型写像の族 $\{ f_\lambda \colon N \to M_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，写像 f を

$$f\colon N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ x \mapsto \bigl(f_\lambda(x)\bigr)_{\lambda\in\Lambda}$$

と定義する．このとき $\forall \mu \in \Lambda, \forall x \in N$ に対して

$$(\pi_\mu \circ f)(x) = f_\mu(x)$$

なので図 A.7a は可換図式になる．

一意性　図 A.7a を可換図式にする別の準同型写像 $g\colon N \to \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ が存在したとする．このとき $\forall x \in N, \forall \lambda \in \Lambda$ に対して

$$\pi_\lambda\bigl(g(x)\bigr) = f_\lambda(x) = \pi_\lambda\bigl(f(x)\bigr)$$

なので $f(x) = g(x)$ となる．i.e. f は一意である．

(2) **存在**　左 R 加群の準同型写像の族 $\{ f_\lambda \colon M_\lambda \to N \}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，写像 f を

$$f\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N,\ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$$

と定義する．右辺は有限和なので意味を持つ．
このとき $\forall \mu \in \Lambda, \forall x \in M_\mu$ に対して

$$f\bigl(\iota_\mu(x)\bigr) = f_\mu(x_\mu) + \sum_{\lambda\neq\mu} f_\lambda(0) = f_\mu(x_\mu)$$

なので図 A.7b は可換図式になる．

一意性　図 A.7b を可換図式にする別の準同型写像 $g\colon \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N$ が存在したとする．このとき $\forall (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}$ に対して

$$g\bigl((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\bigr) = g\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \iota_\lambda(x_\lambda)\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g\bigl(\iota_\lambda(x_\lambda)\bigr) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda) = f\bigl((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\bigr)$$

なので $f = g$ となる．i.e. f は一意である．

■

別の左 R 加群 P と準同型写像の族 $\left\{\pi'_\lambda\colon P \to M_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ が直積の普遍性を充していて，次のような可換図式を書ける場合を考える：

$$
\begin{tikzcd}
\forall N \arrow[r, dashed, "\exists! f'"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & P \arrow[d, "\pi'_\lambda"] \\
& M_\lambda
\end{tikzcd}
$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{f}\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow P$ が**一意に**存在する：

$$
\begin{tikzcd}
& & P \arrow[dl, bend left, "\pi'_\lambda"] \\
\forall N \arrow[urr, dashed, bend left, "\exists! f'"] \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ur, "\exists! \widehat{f}"] \arrow[d, "\pi_\lambda"] & \\
& M_\lambda &
\end{tikzcd}
$$

直和の普遍性に関しても同様である：別の左 R 加群 S と準同型写像の族 $\left\{\iota'_\lambda\colon M_\lambda \to S\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ が直和の普遍性を充していて，次のような可換図式を書ける場合を考える：

$$
\begin{tikzcd}
M_\lambda \arrow[r, "\iota'_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & S \arrow[d, dashed, "\exists! f'"] \\
& \forall N
\end{tikzcd}
$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{f}\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow S$ が**一意に**存在する：

$$
\begin{tikzcd}
& & S \arrow[dl, dashed, bend left, "\exists! f'"] \\
M_\lambda \arrow[urr, bend left, "\iota'_\lambda"] \arrow[r, "\iota_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ur, "\exists! \widehat{f}"] \arrow[d, dashed, "\exists! f'"] & \\
& \forall N &
\end{tikzcd}
$$

A.3.3 テンソル積

M を左 R 加群，Λ を任意の添字集合として，M の部分集合 $S \coloneqq \{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset M$ を考える．このとき S の生成する部分加群とは

$$\left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda m_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \in R,\, m_\lambda \in S,\, \substack{\text{有限個の添字 } i_1,\,\dots,\,i_n \text{ を除いた} \\ \text{全ての添字 } \lambda\in\Lambda \text{ について } a_\lambda=0} \right\}$$

のことである．

定義 A.9: テンソル積

右 $\boldsymbol{R}$ 加群 M および**左 $\boldsymbol{R}$ 加群** N を与える．M と N の R 上の**テンソル積** (tensor product) $\boldsymbol{M \otimes_R N}$ とは，次のようにして定義される**剰余加群**のことである：

(1) まず $\mathbb{Z}$ 加群

$$F(M,\,N) \coloneqq \mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)}$$

を定める[a]．

(2) $\forall (m,\,n) \in M\times N$ に対して，第 $(m,\,n)$ 成分からの標準的包含

$$\begin{aligned} &\iota_{(m,\,n)} \colon \mathbb{Z} \hookrightarrow F(M,\,N),\; x \longmapsto (y_\lambda)_{\lambda\in M\times N} \\ &\text{w/}\quad y_\lambda = \begin{cases} x, & \lambda = (m,\,n) \\ 0, & \lambda \neq (m,\,n) \end{cases} \end{aligned}$$

による 1 の像を $[m,\,n]$ と書く．i.e.

$$[m,\,n] \coloneqq \iota_{(m,\,n)}(1)$$

(3) 部分加群 $G(M,\,N) \subset F(M,\,N)$ を

$$\begin{aligned} &[m_1+m_2,\,n] - [m_1,\,n] - [m_2,\,n] \\ &[m,\,n_1+n_2] - [m,\,n_1] - [m,\,n_2] \\ &[ma,\,n] - [m,\,an] \end{aligned}$$

の形をした $F(M,\,N)$ の元全体の集合によって生成される部分加群として定める．

(4) $F(M,\,N)$ の $G(M,\,N)$ による剰余加群をとる：

$$M\otimes_R N \coloneqq F(M,\,N)/G(M,\,N)$$

また，$[m,\,n]$ の $M\otimes_R N$ における剰余類を $m\otimes n$ と書く．

[a] つまり，$F(M,\,N)$ は $M\times N$ を**添字集合とする** $\mathbb{Z}$ 加群の族 $\{\mathbb{Z}\}_{(m,\,n)\in M\times N}$ の直和である．

補題 A.2: テンソル積の性質

右 R 加群 M，左 R 加群 N を与える．このとき $\forall m,\, m_1,\, m_2 \in M,\ \forall n,\, n_1,\, n_2 \in N,\ \forall a \in R$ に対して以下が成り立つ：

(1)

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \otimes n &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n, \\ n \otimes (n_1 + n_2) &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2, \\ (ma) \otimes n &= m \otimes (an)\end{aligned}$$

(2)

$$0_{M \otimes_R N} = 0_M \otimes n = m \otimes 0_N$$

<u>**証明**</u> 混乱を避けるため，この証明では剰余加群が持つ加法を赤字で $+$ と書くことにする．

(1) テンソル積の定義より

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \otimes n &= [m_1 + m_2,\, n] + G(M,\, N) \\ &= \bigl([m_1,\, n] + [m_2,\, n]\bigr) + G(M,\, N) \\ &= \bigl([m_1,\, n] + G(M,\, N)\bigr) + \bigl([m_2,\, n] + G(M,\, N)\bigr) \\ &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n\end{aligned}$$

が成り立つ[*4]．ただし，2 番目の等号において

$$\begin{aligned}[m_1 + m_2,\, n] &= \bigl([m_1,\, n] + [m_2,\, n]\bigr) + \bigl([m_1 + m_2,\, n] - [m_1,\, n] - [m_2,\, n]\bigr) \\ &\in \bigl([m_1,\, n] + [m_2,\, n]\bigr) + G(M,\, N)\end{aligned}$$

を用いた．同様にして他の 2 つも示される：

$$\begin{aligned}m \otimes (n_1 + n_2) &= [m,\, n_1 + n_2] + G(M,\, N) \\ &= \bigl([m,\, n_1] + [m,\, n_2]\bigr) + G(M,\, N) \\ &= \bigl([m,\, n_1] + G(M,\, N)\bigr) + \bigl([m,\, n_2] + G(M,\, N)\bigr) \\ &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2, \\ ma \otimes n &= [ma,\, n] + G(M,\, N) \\ &= [m,\, an] + G(M,\, N) \\ &= m \otimes an\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}0_M \otimes n = (0_M + 0_M) \otimes n = 0_M \otimes n + 0_M \otimes n \\ m \otimes 0_N = m \otimes (0_N + 0_N) = m \otimes 0_N + m \otimes 0_N\end{aligned}$$

なので

$$0_M \otimes n = m \otimes 0_N = 0_{M \otimes_R N}$$

[*4] 少しややこしいが，剰余加群 $F(M,\, N)/G(M,\, N)$ の元は $x \in F(M,\, N)$ を用いて $x + G(M,\, N)$ と書かれる．

とわかる．

■

$F(M,\, N)$ の勝手な元は有限の添字集合 I に対する集合族 $\{m'_i\}_{i\in I} \subset M,\ \{n_i\}_{i\in I} \subset N$ によって

$$\sum_{i\in I} (\pm[m'_i,\, n_i])$$

の形で書けるが，補題 A.2 から

$$0_{M\otimes_R N} = 0_M \otimes n_i = (m'_i - m'_i) \otimes n_i = m'_i \otimes n_i + (-m'_i) \otimes n_i$$

なので

$$-(m'_i \otimes n_i) = (-m'_i) \otimes n_i$$

とわかる．従って[*5]

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i\in I} (\pm[m'_i,\, n_i])\right) + G(M,\, N) &= \sum_{i\in I} \big((\pm[m'_i,\, n_i]) + G(M,\, N)\big) \\ &= \sum_{i\in I} \pm\big([m'_i,\, n_i] + G(M,\, N)\big) \\ &= \sum_{i\in I} \pm(m'_i \otimes n_i) \\ &= \sum_{i\in I} (\pm m'_i) \otimes n_i\end{aligned}$$

とわかる．i.e. $M \otimes_R N$ の勝手な元は

$$\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i$$

の形で書ける．しかし，この表示は一意**ではない**．

定義 A.10: R-バランス写像

右 R 加群 M，左 R 加群 N，$\mathbb{Z}$ 加群 L を与える．
このとき写像 $f\colon M \times N \longrightarrow L$ が ***R* バランス写像** (R-balanced map) であるとは，

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2,\, n) &= f(m_1,\, n) + f(m_2,\, n) \\ f(m,\, n_1 + n_2) &= f(m,\, n_1) + f(m,\, n_2) \\ f(ma,\, n) &= f(m,\, an) \end{aligned}$$

を充たすことを言う．

補題 A.2 から，写像

$$\Phi\colon M \times N \longrightarrow M \otimes_R N,\ (m,\, n) \longmapsto m \otimes n$$

[*5] 剰余加群において定義される加法を赤字で $\sum_{i\in I}$ と書いた．

は R バランス写像となる．

命題 A.5: テンソル積の普遍性

右 R 加群 M，左 R 加群 N を与える．このとき，以下が成り立つ：

(テンソル積の普遍性) 任意の $\mathbb{Z}$ **加群** L と任意の R バランス写像 $f\colon M\times N \longrightarrow L$ に対して，$\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $g\colon M\otimes_R N \longrightarrow L$ であって $g\circ\Phi = f$ を充たすものが**一意的に**存在する．

$$
\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi"'] & L \\
M\otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\exists! g"'] &
\end{tikzcd}
$$

図 A.8: テンソル積の普遍性

__証明__ 集合 $M\times N$ で添字付けられた $\mathbb{Z}$ 加群の準同型の族 $\left\{g_{(m,\,n)}\colon \mathbb{Z}\to L\right\}_{(m,\,n)\in M\times N}$ を，$g_{(m,\,n)}(x) \coloneqq xf(m,\,n)$ として定める．すると直和の普遍性から，$\forall(m,\,n)\in M\times N$ に対して次のような可換図式が書ける：

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\iota_{(m,\,n)}"] \arrow[dr, "g_{(m,\,n)}"'] & F(M,\,N) = \mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)} \arrow[d, "\exists!\tilde{g}"] \\
& L
\end{tikzcd}
$$

i.e. $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $\tilde{g}\colon F(M,\,N) \longrightarrow L$ はただ一つ存在し，

$$
\tilde{g}([m,\,n]) = (\tilde{g}\circ\iota_{(m,\,n)})(1) = f(m,\,n)
$$

を充たす．このときバランス写像の定義から

$$
\begin{aligned}
&\tilde{g}([m_1+m_2,\,n]-[m_1,\,n]-[m_2,\,n]) = f(m_1+m_2,\,n)-f(m_1,\,n)-f(m_2,\,n) = 0,\\
&\tilde{g}([m,\,n_1+n_2]-[m,\,n_1]-[m,\,n_1]) = f(m,\,n_1+n_2)-f(m,\,n_1)-f(m,\,n_2) = 0,\\
&\tilde{g}([ma,\,n]-[m,\,an]) = f(ma,\,n)-f(m,\,an) = 0,
\end{aligned}
$$

が成り立つから，標準的包含 $i\colon G(M,\,N) \hookrightarrow F(M,\,N)$ について

$$
(\tilde{g}\circ i)\bigl(G(M,\,N)\bigr) = 0
$$

が成り立つ．故に余核の普遍性から次の可換図式が書ける：

$$
\begin{tikzcd}
G(M,\,N) \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "0"'] & F(M,\,N) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\tilde{g}"'] & \operatorname{Coker} i = M\otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\
& & L
\end{tikzcd}
$$

このように構成された $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $g\colon M \otimes_R N \longrightarrow L$ は一意に定まり，$\forall (m,\, n) \in M \times N$ に対して

$$(g \circ \Phi)(m,\, n) = g(m \otimes n) = (g \circ p)([m,\, n]) = \tilde{g}([m,\, n]) = f(m,\, n)$$

を充たす．i.e. $g \circ \Phi = f$. ■

> **!** 図式 A.8 で $M,\, N,\, L$ を固定したとき，R バランス写像 $f\colon M \times N \longrightarrow L$ 全体のなす集合のことを**テンソル空間**と呼ぶことが多いような気がする．

別の $\mathbb{Z}$ 加群 T と R バランス写像 $\varphi\colon M \times N \longrightarrow T$ がテンソル積の普遍性を充たしていて，次のような可換図式を書ける場合を考える：

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \forall L \\
T \arrow[ur, dashed, "\exists! g'"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{g}\colon M \otimes_R N \xrightarrow{\cong} T$ が**一意に定まる**：

$$\begin{tikzcd}
 & M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi"'] & \forall L \\
 & M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\exists! g"'] \arrow[dl, "\exists! \widehat{g}"'] & \\
T \arrow[uurr, dashed, bend right, "\exists! g'"'] & &
\end{tikzcd}$$

系 A.4: テンソル積の準同型

右 R 加群の準同型写像 $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ と，左 R 加群の準同型写像 $g\colon N_1 \longrightarrow N_2$ を与える．このとき，以下が成り立つ：

(1) $\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像

$$f \otimes g\colon M_1 \otimes_R N_1 \longrightarrow M_2 \otimes_R N_2$$

であって，$\forall m \in M_1,\, \forall n \in N_1$ に対して

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$$

を充たすものが**一意的に**存在する．

(2) 別の右 R 加群の準同型写像 $f'\colon M_1 \longrightarrow M_2$ と，左 R 加群の準同型写像 $g'\colon N_1 \longrightarrow N_2$ を与えると

$$(f + f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g,$$
$$f \otimes (g + g') = f \otimes g + f \otimes g'$$

が成り立つ．

(3) さらに右 R 加群の準同型写像 $f''\colon M_2 \longrightarrow M_3$ と，左 R 加群の準同型写像 $g''\colon N_2 \longrightarrow N_3$ を与えると

$$(f'' \otimes g'') \circ (f \otimes g) = (f'' \circ f) \otimes (g'' \circ g)$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u>　(1) 補題 A.2 より，写像

$$\varphi\colon M_1 \times N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2,\ (m,\, n) \longmapsto f(m) \otimes g(n)$$

は R バランス写像になる．従ってテンソル積の普遍性から，題意を充たす準同型写像 $f \otimes g$ が一意に存在する：

$$\begin{tikzcd} M_1 \times N_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi"'] & M_2 \otimes N_2 \\ M_1 \otimes N_1 \arrow[ur, dashed, red, "\exists ! f\otimes g"'] & \end{tikzcd}$$

一意性は $M_1 \times N_1$ が $m \otimes n$ の形の元によって生成されることから従う．

(2) 補題 A.2 より，$\forall (m,\, n) \in M_1 \times N_1$ に対して

$$\begin{aligned} \big((f + f') \otimes g\big)(m \otimes n) &= \big(f(m) + f'(m)\big) \otimes g(n) = f(m) \otimes g(n) + f'(m) \otimes g(n), \\ \big(f \otimes g + f' \otimes g\big)(m \otimes n) &= (f \otimes g)(m \otimes n) + (f' \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n) + f'(m) \otimes g(n) \end{aligned}$$

だから $(f + f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g$．もう一方も同様．

(3)

$$\begin{aligned} \big((f'' \otimes g'') \otimes (f \otimes g)\big)(m \otimes n) &= (f'' \otimes g'')\big(f(m) \otimes g(n)\big) = f''\big(f(m)\big) \otimes g''\big(g(n)\big), \\ \big((f'' \circ f) \otimes (g'' \circ g)\big)(m \otimes n) &== f''\big(f(m)\big) \otimes g''\big(g(n)\big) \end{aligned}$$

だから $(f'' \otimes g'') \otimes (f \otimes g) = (f'' \circ f) \otimes (g'' \circ g)$．

■

系 A.5: R 加群としてのテンソル積

$R,\ S$ を環とする．

(1) M を $(\boldsymbol{S},\ \boldsymbol{R})$ 両側加群，N を左 R 加群とする．このとき $M \otimes_R N$ の S による**左乗法**であって，$\forall s \in S$ に対して

$$s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$$

を充たすものが一意的に定まり，この左乗法によって $M \otimes_R N$ は左 S 加群となる．

(2) M を右 R 加群，N を $(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{S})$ 両側加群とする．このとき $M \otimes_R N$ の S による**右乗法**であって，$\forall s \in S$ に対して

$$(m \otimes n)s = m \otimes (ns)$$

を充たすものが一意的に定まり，この右乗法によって $M \otimes_R N$ は右 S 加群となる．

(3) R が**可換環**で $M,\ N$ が R 加群のとき，$S = R$ として (1), (2) の方法を適用することで $M \otimes_R N$ は自然に R 加群になり，かつそれら 2 つは等しい．

証明 (1) $\forall s \in S$ を一つとる．このとき写像 $L_s \colon M \longrightarrow M,\ m \longmapsto sm$ は右 R 加群の準同型写像であるから，系 A.4-(1) より準同型写像

$$L_s \otimes \mathrm{id}_N \colon M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$$

であって $(L_s \otimes \mathrm{id}_N)(m \otimes n) = L_s(m) \otimes n = (sm) \otimes n$ を充たすものが一意的に存在する．これを $s \in S$ による左乗法と定義すればよい．

(2) 写像 $R_s \colon N \longrightarrow N,\ n \longmapsto ns$ は左 R 加群の準同型写像なので系 A.4-(1) から準同型写像

$$\mathrm{id}_M \otimes R_s \colon M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$$

であって $(\mathrm{id}_M \otimes R_s)(m \otimes n) = m \otimes (ns)$ を充たすものが一意的に存在する．これを $s \in S$ による右乗法と定義すればよい．

(3) R が可換環のとき，(1) による R 加群の構造は $r(m \otimes n) = (rm) \otimes n$，(2) による R 加群の構造は $r(m \otimes n) = m \otimes (rn)$ となるが，補題 A.2 よりこれらは等しい．

■

A.3.4 帰納極限と射影極限

まず，圏 R-**Mod** の一般の（フィルタードとは限らない）図式をもとにして帰納極限，射影極限を具体的に構成する．つまり，左 R 加群の圏における任意の図式には帰納極限，射影極限が存在する．

有向グラフまたは圏 $\mathcal{I} = \left(I,\ \left\{J(i,\ j)\right\}_{(i,\ j) \in I \times I}\right)$ を与え，$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M} = \left(\left\{M_i\right\}_{i \in I},\ \left\{\left\{f_\varphi \colon M_i \to M_j\right\}_{\varphi \in J(i,\ j)}\right\}_{(i,\ j) \in I \times I}\right)$$

を考える．勝手な 2 頂点 $i,\ j \in I$ を固定し，i から j に向かう辺 $\varphi \in J(i,\ j)$ を一つとる．φ を引数にして**始**

点と終点を返す写像は

$$\mathrm{s}\colon J(i,\, j) \longrightarrow I,\ \varphi \longmapsto \mathrm{s}(\varphi) \coloneqq i$$
$$\mathrm{t}\colon J(i,\, j) \longrightarrow I,\ \varphi \longmapsto \mathrm{t}(\varphi) \coloneqq j$$

のように定義される．また，$\mathcal{I}$ の辺全体の集合を

$$E \coloneqq \coprod_{(i,\, j) \in I \times I} J(i,\, j)$$

とおく．

ここで次の二つの加群の直和を考える：

$$X \coloneqq \bigoplus_{\varphi \in E} M_{\mathrm{s}(\varphi)}, \quad Y \coloneqq \bigoplus_{i \in I} M_i$$

いわば，X は「図式の矢印の始点となる全ての M_i を直和したもの」となっている．直和における標準的包含を

$$\iota'_{\varphi}\colon M_{\mathrm{s}(\varphi)} \hookrightarrow X, \quad \iota''_i\colon M_i \hookrightarrow Y$$

と書く．X の添字集合は E なので標準的包含も辺 $\varphi \in E$ を成分の添字にもつ．直和の普遍性から $\forall \varphi \in E$ に対して次のような可換図式が書ける：

$$\begin{tikzcd} M_{\mathrm{s}(\varphi)} \arrow[r, "\iota'_{\varphi}"] \arrow[dr, "\iota''_{\mathrm{s}(\varphi)}"'] & X \arrow[d, "\exists! f_{\mathrm{s}}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(a) f_{s} の定義

$$\begin{tikzcd} M_{s(\varphi)} \arrow[r, "\iota'_{\varphi}"] \arrow[dr, "\iota''_{\mathrm{t}(\varphi)} \circ f_{\varphi}"'] & X \arrow[d, "\exists! f_{\mathrm{t}}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(b) f_{t} の定義

一意に定まる準同型 $f_{\mathrm{s}},\, f_{\mathrm{t}}\colon X \longrightarrow Y$ は $\forall \big(x_{\varphi}\big)_{\varphi \in E} \in X$ に次のように作用する：

$$f_{\mathrm{s}}\big((x_{\varphi})_{\varphi \in E}\big) = \sum_{\varphi \in E} \iota''_{\mathrm{s}(\varphi)}(x_{\varphi}), \quad f_{\mathrm{t}}\big((x_{\varphi})_{\varphi \in E}\big) = \sum_{\varphi \in E} \iota''_{\mathrm{t}(\varphi)}\big(f_{\varphi}(x_{\varphi})\big)$$

定義 A.11: R-Mod における帰納極限

左 R 加群の図式 $\mathcal{M}$ の**帰納極限** (inductive limit) を次のように定義する：

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \coloneqq \mathrm{Coker}(f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})$$

順極限と呼ぶこともある．また，$\forall i \in I$ に対して写像

$$\iota_i\colon M_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_i,\ x \longmapsto (p \circ \iota''_i)(x)$$

を**標準的包含**と呼ぶ[a]．

[a] $p\colon Y \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_i$ は標準的射影である．なお，ι_i はその名前に反して**単射とは限らない**．

$\forall i,\, j \in I$ をとり，$\forall x \in M_i$, $\forall \varphi \in J(i,\, j)$ を考える．このとき図式 A.9a, A.9b を参照すると，$\mathrm{s}(\varphi) = i$, $\mathrm{t}(\varphi) = j$ に注意して

$$\iota''_j\bigl(f_\varphi(x)\bigr) = f_{\mathrm{t}}\bigl(\iota'_\varphi(x)\bigr) = f_{\mathrm{s}}\bigl(\iota'_\varphi(x)\bigr) + (f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})\bigl(\iota'_\varphi(x)\bigr) = \iota''_i(x) + (f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})\bigl(\iota'_\varphi(x)\bigr)$$

とわかる．両辺に標準射影 $p\colon Y \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} M_i = \mathrm{Coker}(f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})$ を作用させることで

$$\iota_j\bigl(f_\varphi(x)\bigr) = (p \circ \iota''_j)\bigl(f_\varphi(x)\bigr) = (p \circ \iota''_i)\bigl(x\bigr) = \iota_i(x)$$

i.e. $\iota_j \circ f_\varphi = \iota_i$ が成り立つ．

同様にして図式 $\mathcal{M}$ の射影極限が定義される．今度は**反対圏** $\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} = \Bigl(\bigl\{M_i\bigr\}_{i\in I},\ \Bigl\{\bigl\{f_\varphi\colon M_j \to M_i\bigr\}_{\varphi\in J(i,\, j)}\Bigr\}_{(i,\, j)\in I\times I}\Bigr)$$

を考える．

次の二つの加群の直積を考える：

$$X \coloneqq \prod_{i\in I} M_i, \quad Y \coloneqq \prod_{\varphi\in E} M_{\mathrm{s}(\varphi)}$$

X と Y で先程と添字集合が逆になっていることに注意．いわば，Y は「図式の矢印の始点となる全ての M_i を直積したもの」となっている．直積における標準的射影を

$$p'_i\colon X \longrightarrow M_i, \quad p''_\varphi\colon Y \longrightarrow M_{\mathrm{s}(\varphi)}$$

と書く．直積の普遍性から $\forall \varphi \in E$ に対して次のような可換図式が書ける：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\exists! f_{\mathrm{s}}"] \arrow[dr, "p'_{\mathrm{s}(\varphi)}"'] & Y \arrow[d, "p''_\varphi"] \\ & M_{\mathrm{s}(\varphi)} \end{tikzcd}$$

(a) f_{s} の定義

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\exists! f_{\mathrm{t}}"] \arrow[dr, "f_\varphi \circ p'_{\mathrm{t}(\varphi)}"'] & Y \arrow[d, "p''_\varphi"] \\ & M_{\mathrm{s}(\varphi)} \end{tikzcd}$$

(b) f_{t} の定義

一意に定まる準同型 $f_{\mathrm{s}},\, f_{\mathrm{t}}\colon X \longrightarrow Y$ は $\forall \bigl(x_i\bigr)_{i\in I} \in X$ に次のように作用する：

$$f_{\mathrm{s}}\bigl((x_i)_{i\in I}\bigr) = \bigl(x_{\mathrm{s}(\varphi)}\bigr)_{\varphi\in E}, \quad f_{\mathrm{t}}\bigl((x_i)_{i\in I}\bigr) = \bigl(f_\varphi\bigl(x_{\mathrm{t}(\varphi)}\bigr)\bigr)_{\varphi\in E}$$

定義 A.12: R-Mod における射影極限

左 R 加群の図式 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ の**射影極限** (projective limit) を次のように定義する：

$$\varprojlim_{i\in I} M_i \coloneqq \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})$$

逆極限と呼ぶこともある．また，$\forall i \in I$ に対して写像

$$p_i\colon \varprojlim_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i,\ x \longmapsto (p'_i \circ \iota)(x)$$

を**標準的射影**と呼ぶ[a]．

[a] $\iota\colon \varprojlim_{i\in I} M_i \longrightarrow X$ は標準的包含である．なお，p_i はその名前に反して**全射とは限らない**．

命題 A.6: 帰納極限・射影極限の普遍性

(帰納極限の普遍性) 記号は定義 A.11 の通りとする．任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim_{i\in I} M_i,\, N\right) & \longrightarrow & \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i,\, N) \;\middle|\; \substack{\forall i,\, j\in I,\, \forall \varphi\in J(i,\, j), \\ g_j\circ f_\varphi = g_i} \right\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
g & \longmapsto & \{\, g\circ \iota_i \,\}_{i\in I}
\end{array}
\tag{A.3.1}
$$

は well-defined な全単射である．i.e.

- 任意の左 R 加群 N
- 任意の左 R 加群の準同型写像の族 $\{\, g_i\colon M_i \to N \,\}_{i\in I}$ であって，任意の 2 頂点 $i,\, j \in I$ と i から j へ向かう任意の辺 $\varphi \in J(i,\, j)$ に対して $g_j \circ f_\varphi = g_i$ を充たすもの

が与えられたとき，準同型写像 $g\colon \varinjlim_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ が**一意的に**存在して

$$\forall i \in I,\ g\circ \iota_i = g_i$$

を充たす（図式 A.11a）．

(射影極限の普遍性) 記号は定義 A.12 の通りとする．任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R\left(N,\, \varprojlim_{i\in I} M_i\right) & \longrightarrow & \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_i) \;\middle|\; \substack{\forall i,\, j\in I,\, \forall \varphi\in J(i,\, j), \\ f_\varphi\circ g_j = g_i} \right\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
g & \longmapsto & \{\, p_i\circ g \,\}_{i\in I}
\end{array}
$$

は well-defined な全単射である．i.e.

- 任意の左 R 加群 N
- 任意の左 R 加群の準同型写像の族 $\{\, g_i\colon N \longrightarrow M_i \,\}_{i\in I}$ であって，任意の 2 頂点 $i,\, j \in I$ と i から j へ向かう任意の辺 $\varphi \in J(i,\, j)$ に対して $f_\varphi \circ g_j = g_i$ を充たすもの

が与えられたとき，準同型写像 $g\colon N \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} M_i$ であって

$$\forall i \in I,\ p_i\circ g = g_i$$

を充たすものが**一意的に**存在する（図式 A.11b）．

$$
\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "f_\varphi"] \arrow[dr, "\iota_i"'] \arrow[ddr, bend right, "g_i"'] & & M_j \arrow[dl, "\iota_j"] \arrow[ddl, bend left, "g_j"] \\
& \varinjlim_{i\in I} M_i \arrow[d, dashed, "\exists!g"] & \\
& \forall N &
\end{tikzcd}
$$

(a) 帰納極限の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
& \forall N \arrow[d, dashed, "\exists!g"] \arrow[ddl, bend right, "g_i"'] \arrow[ddr, bend left, "g_j"] & \\
& \varprojlim_{i\in I} M_i \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
M_i & & M_j \arrow[ll, "f_\varphi"]
\end{tikzcd}
$$

(b) 射影極限の普遍性

<u>**証明**</u> (1) 図式 A.9a, A.9b より

$$\iota''_{\mathrm{s}(\varphi)} = f_{\mathrm{s}} \circ \iota'_\varphi, \quad \iota''_{\mathrm{t}(\varphi)} = f_{\mathrm{t}} \circ \iota'_\varphi \tag{A.3.2}$$

が成り立つ．

余核の普遍性から次のような可換図式が書ける：

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f_{\mathrm{t}}-f_{\mathrm{s}}"] \arrow[r, shift right, "0"'] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[rd, "g"'] & \varinjlim_{i\in I} M_i \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\
& & \forall N
\end{tikzcd}
$$

i.e. 写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim_{i\in I} M_i,\ N\right) &\longrightarrow \left\{\, g\in \mathrm{Hom}_R\left(Y,\ N\right) \;\middle|\; g\circ f_{\mathrm{t}} = g\circ f_{\mathrm{s}} \,\right\} \\
h &\longmapsto g\circ p
\end{aligned}
$$

は全単射である．さらに直和の普遍性より，

$$
\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "\iota''_i"] \arrow[rd, "g_i"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\
& \forall N
\end{tikzcd}
$$

もわかる．このとき式 (A.3.2) より

$$
\begin{aligned}
g\circ f_{\mathrm{t}} = g\circ f_{\mathrm{s}} \quad &\iff \quad \forall \varphi\in E,\ g\circ f_{\mathrm{t}}\circ \iota'_{\varphi} = g\circ f_{\mathrm{s}}\circ \iota'_{\varphi} \\
&\iff \quad \forall \varphi\in E,\ g_{\mathrm{s}(\varphi)} = g\circ \iota\iota''_{\mathrm{s}(\varphi)} = \left(g\circ \iota''_{\mathrm{t}(\varphi)}\right)\circ f_{\varphi}
\end{aligned}
$$

が成り立つことから，写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim_{i\in I} M_i,\ N\right) &\longrightarrow \left\{\, \left(g_i\right)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R\left(M_i,\ N\right) \;\middle|\; \forall \varphi\in E,\ g_{\mathrm{s}(\varphi)} = g_{\mathrm{t}(\varphi)}\circ f_{\varphi} \,\right\} \\
h &\longmapsto \left\{\, h\circ p\circ \iota_i \,\right\}_{i\in I}
\end{aligned}
$$

が全単射であることがわかる．

(2) 図式 A.10a, A.10b より

$$
p''_{\varphi}\circ f_{\mathrm{s}} = p'_{\mathrm{s}(\varphi)},\quad p''_{\varphi}\circ f_{\mathrm{t}} = p'_{\mathrm{t}(\varphi)}
$$

が成り立つ．核の普遍性および直積の普遍性より，写像

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R\left(N,\ \varprojlim_{i\in I} M_i\right) & \longrightarrow & \left\{\, \left(g_i\right)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R\left(N,\ M_i\right) \;\middle|\; \forall \varphi\in E,\ f_{\varphi}\circ g_{\mathrm{t}(\varphi)} = g_{\mathrm{s}(\varphi)} \,\right\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
h & \longmapsto & \left\{\, p'_i\circ \iota\circ h \,\right\}_{i\in I}
\end{array}
$$

は全単射である．

■

図式がフィルタードな圏 $\mathcal{I}$ 上のものである場合，帰納極限は別の表示を持つ：

命題 A.7: フィルタードな圏上の帰納極限

$\mathcal{I} = \bigl(I, \{J(i, j)\}_{(i, j)\in I\times I}\bigr)$ をフィルタードな圏,

$$\mathcal{M} = \Bigl(\{M_i\}_{i\in I}, \Bigl\{\{f_\varphi \colon M_i \to M_j\}_{\varphi\in J(i, j)}\Bigr\}_{(i, j)\in I\times I}\Bigr)$$

を $\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式とする.

(1) disjoint union $\coprod_{i\in I} M_i$ において

$$\sim := \left\{ (x, x') \in \coprod_{i\in I} M_i \times \coprod_{i\in I} M_i \,\middle|\, x \in M_i,\ x' \in M_{i'} \ \Rightarrow \ \substack{\exists j\in I,\, \exists\varphi\in J(i, j),\, \exists\varphi'\in J(i', j),\\ f_\varphi(x) = f_{\varphi'}(x')} \right\}$$

と定義した二項関係 $\sim$ は同値関係である[a].

(2) 商集合

$$\coprod_{i\in I} M_i \Big/ \sim$$

における $x \in \coprod_{i\in I} M_i$ の同値類を $[x]$ と書くことにする. $x \in M_i$, $x' \in M_{i'}$ ならば, 頂点 $j \in I$ であって $J(i, j) \neq \emptyset$, $J(i', j) \neq \emptyset$ を充たすものをとり[b], 辺 $\varphi \in J(i, j)$, $\varphi' \in J(i', j)$ をとってくる.

上述の準備の後, 商集合 $\coprod_{i\in I} M_i \Big/ \sim$ 上の加法と左乗法を次のように定義すると, これらは well-defined な写像になる:

$$\begin{aligned} [x] + [x'] &:= [f_\varphi(x) + f_{\varphi'}(x')] \\ a[x] &:= [ax] \end{aligned}$$

さらに, 組

$$\left(\coprod_{i\in I} M_i \Big/ \sim, +, \cdot\right)$$

は左 R 加群となる. **特に**

$$\boldsymbol{\varinjlim_{i\in I} M_i \cong \coprod_{i\in I} M_i \Big/ \sim}$$

である.

---

[a] 標語的に言うと,「図式を追跡して十分遠方で一致する元を同一視する」ということ

[b] フィルタードな圏の定義より, このような j は少なくとも一つ存在する.

<u>**証明**</u> (1) 反射律と対称律は自明なので, 推移律のみ示す. $x \in M_i$, $x' \in M_{i'}$, $x'' \in M_{i''}$, $x \sim x'$ かつ $x' \sim x''$ とすると

$$\begin{aligned} &\exists j \in I, \exists\varphi \in J(i, j), \exists\varphi' \in J(i', j),\ f_\varphi(x) = f_{\varphi'}(x'), \\ &\exists j' \in I, \exists\psi \in J(i', j'), \exists\psi' \in J(i'', j'),\ f_{\varphi'}(x) = f_{\varphi''}(x'') \end{aligned}$$

が成り立つ. 圏 $\mathcal{I}$ がフィルタードであることから, ある頂点 $k \in I$ が存在して $\exists\mu \in J(j, k)$, $\exists\mu' \in$

$J(j',k)$ を充たす．さらに，フィルタードの定義-(3) より辺 $\mu\circ\varphi'$, $\mu'\circ\psi'\in J(i',j)$ に対して $\exists k'\in I, \exists\nu\in J(k,k')$, $\nu\circ(\mu\circ\varphi')=\nu\circ(\mu'\circ\psi')$ が成立するから，$k=k'$, $\mu=\nu\circ\mu$, $\mu'=\nu\circ\mu'$ と取り替えることができる．このとき

$$
\begin{aligned}
f_{\mu\circ\varphi}(x) &= f_\mu\circ f_\varphi(x) = f_\mu\circ f_{\varphi'}(x') = f_{\mu\circ\varphi'}(x') = f_{\mu'\circ\psi'}(x') \\
&= f_{\mu'\circ\psi'}(x') = f_{\mu'\circ\psi''}(x'') = f_{\mu'\circ\psi''}(x'')
\end{aligned}
$$

i.e. $x\sim x''$ である．

(2) **well-definedness**　スカラー乗法の well-definedness は明らかである．和の well-definedness を示す．

　同値関係 $\sim$ の定義より，同値類 $[x]$ の勝手な元 $y\in M_k$ に対してある頂点 $l\in I$ および辺 $\mu\in J(i,l)$, $\mu'\in J(k,l)$ が存在して $f_\mu(x)=f_{\mu'}(y)$ を充たす．同値類 $[x']$ の勝手な元 $y'\in M_{k'}$ に対しても同様にある頂点 $l'\in I$ および辺 $\nu\in J(i',l')$, $\nu'\in J(k',l')$ が存在して $f_\nu(x')=f_{\nu'}(y')$ を充たす．圏 $\mathcal{I}$ はフィルタードなので，頂点 $j'\in I$ であって $\exists\varphi\in J(k,j')$, $\exists\varphi'\in J(k',j')$ を充たすものが取れる．

　ここで圏 $\mathcal{I}$ がフィルタードであることから頂点 i', j, l' に関して次のような $\mathcal{I}$ 上の図式が存在して

$$
\alpha\circ(\lambda\circ\varphi')=\alpha\circ(\lambda'\circ\nu)
$$

を充たす：

$$
\begin{tikzcd}
 & i' \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
j \arrow[dr, "\lambda"] & & l' \arrow[dl, "\lambda'"] \\
 & m \arrow[d, "\alpha"] & \\
 & n &
\end{tikzcd}
$$

ただし赤色をつけた辺はフィルタードの定義-(2) を，青色をつけた辺はフィルタードの定義-(3) を使った．この図式に関手 $\mathcal{M}$ を作用させて

$$
f_{\alpha\circ\lambda\circ\varphi'}(x')=f_{\alpha\circ\lambda'\circ\nu}(x')
$$

を得るが，仮定より $y'\sim x'$ なので $f_\nu(x')=f_{\nu'}(y')$ が成り立ち，

$$
f_{\alpha\circ\lambda}\big(f_{\varphi'}(x')\big)=f_{\alpha\circ\lambda'\circ\nu'}(y') \tag{A.3.3}
$$

がわかる．同様に圏 $\mathcal{I}$ がフィルタードであることから頂点 j', k, l に関して次のような $\mathcal{I}$ 上の図式が存在して

$$
\alpha'\circ(\rho\circ\mu')=\alpha'\circ(\rho'\circ\psi)
$$

を充たす：

$$
\begin{tikzcd}
 & k \arrow[dl, "\mu'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
l \arrow[dr, "\rho"] & & j' \arrow[dl, "\rho'"] \\
 & m' \arrow[d, "\alpha'"] & \\
 & n' &
\end{tikzcd}
$$

この図式から関係式

$$
f_{\alpha'\circ\rho'}\bigl(f_{\psi}(y)\bigr) = f_{\alpha'\circ\rho\circ\mu}(x) \tag{A.3.4}
$$

が得られる．さらに，上記の 2 つの図式により得られた頂点 n, n' に対してフィルタードの定義-(2), (3) を使うと，次のような図式が存在する：

$$
\begin{tikzcd}
n \arrow[dr, "\beta"] & & n' \arrow[dl, "\beta'"] \\
 & p \arrow[d, "\delta"] & \\
 & q \arrow[d, "\delta"] & \\
 & r &
\end{tikzcd}
$$

ただし，辺 $p \xrightarrow{\gamma} q$ は $i \longrightarrow p$ の 2 通りの経路

$$
\begin{tikzcd}
 & l \arrow[r, "\rho"] & m' \arrow[r, "\alpha'"] & n' \arrow[dr, "\beta'"] & \\
i \arrow[ur, "\mu"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & & & p \\
 & j \arrow[r, "\lambda"] & m \arrow[r, "\alpha"] & n \arrow[ur, "\beta"] &
\end{tikzcd}
$$

に対してフィルタードの定義-(3) を使うことで得られるものであり，関係式

$$
\gamma\circ(\beta\circ\alpha\circ\lambda\circ\varphi) = \gamma\circ(\beta'\circ\alpha'\circ\rho\circ\mu) \tag{A.3.5}
$$

が成り立つ．また，辺 $q \xrightarrow{\delta} r$ は $k' \longrightarrow q$ の 2 通りの経路

$$\begin{tikzcd}
 & j' \arrow[r, "\rho'"] & m' \arrow[r, "\alpha'"] & n' \arrow[r, "\beta'"] & p \arrow[dr, "\gamma"] & \\
k' \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[dr, "\nu'"'] & & & & & q \\
 & l' \arrow[r, "\lambda'"] & m \arrow[r, "\alpha"] & n \arrow[r, "\beta"] & p \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

に対してフィルタードの定義-(3) を使うことで得られるものであり，関係式

$$\delta \circ (\gamma \circ \beta \circ \alpha \circ \lambda' \circ \nu') = \delta \circ (\gamma \circ \beta' \circ \alpha' \circ \rho' \circ \psi') \tag{A.3.6}$$

が成り立つ．従って関係式 (A.3.4), (A.3.5) および (A.3.3), (A.3.6) からそれぞれ

$$\begin{aligned} f_{\gamma\circ(\beta\circ\alpha\circ\lambda)}\big(f_\varphi(x)\big) = f_{\gamma\circ(\beta'\circ\alpha'\circ\rho\circ\mu)}(x) = f_{\gamma\circ\beta'\circ\alpha'\circ\rho'}\big(f_\psi(y)\big) \\ f_{\delta\circ(\gamma\circ\beta'\circ\alpha'\circ\rho')}\big(f_{\psi'}(y')\big) = f_{\delta\circ(\gamma\circ\beta\circ\alpha\circ\lambda'\circ\nu')}(y') = f_{\delta\circ\gamma\circ\beta\circ\alpha\circ\lambda}\big(f_{\varphi'}(x')\big) \end{aligned}$$

が従い，

$$f_{\delta\circ\gamma\circ\beta\circ\alpha\circ\lambda}\big(f_\varphi(x) + f_{\varphi'}(x')\big) = f_{\delta\circ\gamma\circ\beta'\circ\alpha'\circ\rho'}\big(f_\psi(y) + f_{\psi'}(y')\big)$$

i.e. $f_\psi(y) + f_{\psi'}(y') \sim f_\varphi(x) + f_{\varphi'}(x')$ が言えた．

同型であること　R-**Mod** 上の帰納極限の定義から，$\bigoplus_{i\in I} M_i$ の部分加群 $N := \mathrm{Im}(f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})$ は集合[*6]

$$\big\{\iota_{\mathrm{t}(\varphi)}\big(f_\varphi(x)\big) - \iota_{\mathrm{s}(\varphi)}(x)\big\}_{\varphi\in E,\, x\in M_{\mathrm{s}(\varphi)}} \subset \bigoplus_{i\in I} M_i$$

により生成される．よって

$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \Big/ N \cong \coprod_{i\in I} M_i \Big/ \sim$$

を示せば良い．

$\forall x \in \coprod_{i\in I} M_i$ に対して $\exists! i \in I,\ x \in M_i$ である．よって $|x| := i$ とおくと写像

$$\coprod_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i,\ x \longmapsto \iota_{|x|}(x)$$

は well-defined な写像であり，これと商写像の合成

$$g\colon \coprod_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \twoheadrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \Big/ N,\ x \longmapsto \iota_{|x|}(x) + N$$

を考える．$x \in M_i,\ x' \in M_{i'}$ が $x \sim x'$ のとき，ある頂点 $j \in I$ および辺 $\varphi \in J(i,\, j),\ \varphi' \in J(i',\, j)$ が存在して $f_\varphi(x) = f_{\varphi'}(x')$ を充たす．このとき

$$\begin{aligned} \iota_{|x'|}(x') - \iota_{|x|}(x) &= \iota_j\big(f_{\varphi'}(x')\big) - \iota_j\big(f_\varphi(x)\big) - \Big(\iota_j\big(f_{\varphi'}(x')\big) - \iota_{i'}(x')\Big) + \Big(\iota_j\big(f_\varphi(x)\big) - \iota_i(x)\Big) \\ &= 0 - \Big(\iota_{\mathrm{t}(\varphi')}\big(f_{\varphi'}(x')\big) - \iota_{\mathrm{s}(\varphi')}(x')\Big) + \Big(\iota_{\mathrm{t}(\varphi)}\big(f_\varphi(x)\big) - \iota_{\mathrm{s}(\varphi)}(x)\Big) \in N \end{aligned}$$

[*6] $\iota_i\colon M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ は標準的包含

が成り立つので，g が誘導する写像

$$\bar{g}\colon \coprod_{i\in I} M_i \Big/ \sim \longrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \Big/ N,\ [x] \longmapsto g(x)$$

は well-defined である．そして (2) の記号を使うと

$$\begin{aligned}
\bar{g}([x]+[x']) &= \bar{g}\big([f_\varphi(x)+f_{\varphi'}(x')]\big) = \iota_j\big(f_\varphi(x)+f_{\varphi'}(x')\big)+N \\
&= \Big(\iota_j\big(f_\varphi(x)\big)+\iota_j\big(f_{\varphi'}(x')\big)\Big)+N \\
&= \Big(\iota_j\big(f_\varphi(x)\big)+N\Big)+\Big(\iota_j\big(f_{\varphi'}(x')\big)+N\Big) \\
&= \big(\iota_i(x)+N\big)+\big(\iota_{i'}(x')+N\big) = \bar{g}([x])+\bar{g}([x']), \\
\bar{g}(a[x]) &= \bar{g}([ax]) = \iota_i(ax)+N = a\big(\iota_i(ax)+N\big) = a\bar{g}([x])
\end{aligned}$$

が成り立つので $\bar{g}$ は左 R 加群の準同型である．

ところで，写像

$$h\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i \Big/ \sim,\ (x_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I}[x_i]$$

は，$\forall (x_i)_{i\in I}, (x'_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, $\forall a\in R$ に対して

$$\begin{aligned}
h\big((x_i)_{i\in I}+(x'_i)_{i\in I}\big) &= h\big((x_i+x'_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I}[x_i+x'_i] = \sum_{i\in I}([x_i]+[x'_i]) \\
&= \sum_{i\in I}[x_i]+\sum_{i\in I}[x'_i] \\
&= h\big((x_i)_{i\in I}\big)+h\big((x'_i)_{i\in I}\big), \\
h\big(a(x_i)_{i\in I}\big) &= h\big((ax_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I}[ax_i] = \sum_{i\in I}a[x_i] \\
&= a\left(\sum_{i\in I}[x_i]\right) \\
&= ah\big((x_i)_{i\in I}\big)
\end{aligned}$$

が成り立つので h は左 R 加群の準同型である．また，$\forall\varphi\in E$, $\forall x\in M_{\mathrm{s}(\varphi)}$ に対して

$$h\Big(\iota_{\mathrm{t}(\varphi)}\big(f_\varphi(x)\big)-\iota_{\mathrm{s}(\varphi)}(x)\Big) = [f_\varphi(x)]-[x] = 0$$

が成り立つ[*7]ので h が誘導する写像

$$\bar{h}\colon \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \Big/ N \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i \Big/ \sim,\ (x_i)_{i\in I}+N \longmapsto \sum_i [x_i]$$

は well-defined な準同型である．そして $\bar{h}\circ\bar{g}=1$, $\bar{g}\circ\bar{h}=1$ が成り立つので $\bar{g}, \bar{h}$ は同型写像であり，

$$\varinjlim_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i \Big/ N \cong \coprod_{i\in I} M_i \Big/ \sim$$

が示された．

■

*7 明らかに $f_\varphi(x)\sim x$ である．

A.4　帰納極限と射影極限の性質

帰納極限・射影極限は，様々な部分加群を内包する概念である．

【例 A.4.1】直和と直積

有向グラフ

$$\mathcal{I} := \boxed{\overset{1}{\bullet} \qquad\qquad \overset{2}{\bullet}}$$

を考える．$\mathcal{I}$ 上の左 $\mathbb{R}$ 加群の図式 $M\colon \mathcal{I} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ の上に帰納極限の普遍性の図式を書くと

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & M_2 \arrow[dl, "\iota_2"'] \arrow[ddl, bend left, "g_2"] \\
& \varinjlim_{i\in\{1,2\}} M_i \arrow[d, dashed, "\exists! g"] & \\
& \forall N &
\end{tikzcd}$$

となる[a]．これは直和の普遍性の図式であり，

$$\varinjlim_{i\in\{1,2\}} M_i \cong M_1 \oplus M_2$$

がわかる．

同じ $M\colon \mathcal{I} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ の上に射影極限の普遍性の図式を書くと

$$\begin{tikzcd}
M_1 & & M_2 \\
& \varprojlim_{i\in\{1,2\}} M_i \arrow[ul, "\iota_1"'] \arrow[ur, "\iota_2"] & \\
& \forall N \arrow[uul, bend left, "g_1"] \arrow[uur, bend right, "g_2"'] \arrow[u, dashed, "\exists! g"] &
\end{tikzcd}$$

となる．これは直積の普遍性の図式であり，

$$\varprojlim_{i\in\{1,2\}} M_i \cong M_1 \times M_2$$

がわかる．

以上の構成は，有向グラフの頂点集合が任意であっても成り立つ．

[a] 関手 M の作用は $M_i := M(i)$ とおいた．

【例 A.4.2】核と余核

有向グラフ

$$\mathcal{I} := \boxed{\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \overset{2}{\bullet} \end{tikzcd}}$$

を考える．$\mathcal{I}$ 上の左 $\mathbb{R}$ 加群の図式 $M\colon \mathcal{I} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ の上に帰納極限の普遍性の図式を書くと，可換図式

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rr, shift left, "M(f)"] \arrow[rr, shift right, "M(g)"'] \arrow[dr, "\iota_1"'] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & M_2 \arrow[dl, "\iota_2"] \arrow[ddl, bend left, "g_2"] \\
& \varinjlim_{i\in\{1,2\}} M_i \arrow[d, dashed, "\exists! g"] & \\
& \forall N &
\end{tikzcd}$$

が得られる．図式の可換性から

$$\iota_2 \circ M(f) = \iota_2 \circ M(g) = \iota_1 \tag{A.4.1}$$

が成り立つので，冗長な ι_1 や g_1 を省略して

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, shift left, "M(f)"] \arrow[r, shift right, "M(g)"'] & M_2 \arrow[r, bend left, "g_2"] \arrow[dr, "\iota_2"'] & \forall N \\
& & \varinjlim_{i\in\{1,2\}} M_i \arrow[u, dashed, "\exists! g"]
\end{tikzcd}$$

を得る．$M(f), M(g)$ は左 R 加群の準同型なので (A.4.1) から $\iota_2 \circ \bigl(M(f) - M(g)\bigr) = 0$ であり，これは余核の普遍性と等しい．i.e.

$$\varinjlim_{i\in\{1,2\}} M \cong \mathrm{Coker}\bigl(M(f) - M(g)\bigr)$$

がわかった．

同じ $M\colon \mathcal{I} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ の上に射影極限の普遍性の図式を書くと可換図式

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rr, shift left, "M(f)"] \arrow[rr, shift right, "M(g)"'] & & M_2 \\
& \varprojlim_{i\in\{1,2\}} \arrow[ul, "\iota_1"] \arrow[ur, "\iota_2"'] & \\
& \forall N \arrow[u, dashed, "\exists! g"] \arrow[uul, bend left, "g_1"] \arrow[uur, bend right, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

となる．可換性から

$$M(f) \circ \iota_1 = M(g) \circ \iota_1 = \iota_2 \tag{A.4.2}$$

がわかるので，冗長な ι_2 を無視すると

$$\begin{tikzcd} \forall N \arrow[rr, bend left, "g_1"] \arrow[d, dashed, "\exists! g"] & & M_1 \arrow[r, shift left, "M(f)"] \arrow[r, shift right, "M(g)"'] & M_2 \\ \varprojlim_{i\in\{1,\,2\}} M_i \arrow[urr, "\iota_1"] & & & \end{tikzcd}$$

が得られる．(A.4.2) は $\bigl(M(f) - M(g)\bigr) \circ \iota_1 = 0$ と同値なので，これは核の普遍性の図式であり，

$$\varprojlim_{i\in\{1,\,2\}} M \cong \mathrm{Ker}\bigl(M(f) - M(g)\bigr)$$

がわかった．

命題 A.6 を観察すると，次の重大な結果が得られる：

N を左 R 加群とする．有向グラフまたは圏 $\mathcal{I} = \bigl(I,\ \{J(i,\,j)\}_{(i,\,j)\in I\times I}\bigr)$ を与え，$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M} = \Bigl(\{M_i\}_{i\in I},\ \Bigl\{\{f_\varphi\colon M_i \to M_j\}_{\varphi\in J(i,\,j)}\Bigr\}_{(i,\,j)\in I\times I}\Bigr)$$

に対応して $\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ 上の $\mathbb{Z}$ 加群の図式

$$\Bigl(\{\mathrm{Hom}_R(M_i,\,N)\}_{i\in I},\ \Bigl\{\{f_\varphi^*\}_{\varphi\in J(i,\,j)}\Bigr\}_{(i,\,j)\in I\times I}\Bigr)$$

を考えよう．ただし，$\varphi \in J(i,\,j)$ に対して

$$f_\varphi^*\colon \mathrm{Hom}_R(M_j,\,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_i,\,N),\ h \longmapsto h \circ f_\varphi$$

とする．このとき式 (A.3.1) の右辺を少し書き換えると

$$\left\{\ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i,\,N)\ \middle|\ \forall\varphi \in E,\ f_\varphi^*\bigl(g_{\mathrm{t}(\varphi)}\bigr) = g_{\mathrm{s}(\varphi)}\ \right\}$$

となるが，図式 A.10a, A.10b に照らし合わせるとこれは $\mathrm{Ker}({f^*}_{\mathrm{t}} - {f^*}_{\mathrm{s}})$ に等しいことがわかる．

同様に $\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} = \Bigl(\{M_i\}_{i\in I},\ \Bigl\{\{f_\varphi\colon M_j \to M_i\}_{\varphi\in J(i,\,j)}\Bigr\}_{(i,\,j)\in I\times I}\Bigr)$$

に対応して $\mathcal{I}$ 上の $\mathbb{Z}$ 加群の図式

$$\Bigl(\{\mathrm{Hom}_R(N,\,M_i)\}_{i\in I},\ \Bigl\{\{f_\varphi^*\}_{\varphi\in J(i,\,j)}\Bigr\}_{(i,\,j)\in I\times I}\Bigr)$$

を考える．ただし，$\varphi \in J(i,\,j)$ に対して

$$f_{\varphi *}\colon \mathrm{Hom}_R(N,\,M_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\,M_j),\ h \longmapsto f_\varphi \circ h$$

とする．このとき式 (A.3.1) の右辺を少し書き換えると

$$\left\{ \left(g_i\right)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_i\right) \;\middle|\; \forall\varphi\in E,\; f_{\varphi *}\left(g_{\mathrm{t}(\varphi)}\right) = g_{\mathrm{s}(\varphi)} \right\}$$

となるが，図式 A.9a, A.9b に照らし合わせるとこれは $\mathrm{Ker}(f_{*\mathrm{t}} - f_{*\mathrm{s}})$ に等しいことがわかる．
　以上の考察と命題 A.6 の主張から次のことがわかった：

命題 A.8: Hom と帰納・射影極限の交換

自然な $\mathbb{Z}$ 加群の同型

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim_{i\in I} M_i,\, N\right) &\cong \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_R\left(M_i,\, N\right)\\ \mathrm{Hom}_R\left(N,\, \varprojlim_{i\in I} M_i\right) &\cong \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_i\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．

　命題 A.8 から即座に Hom_R の左右の完全性が従う：

系 A.6: Hom_R の右・左完全性（再掲）

(1) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群[a]の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_1\right) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_2\right) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_3\right)$$

が成り立つ．

(2) $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(M_3,\, N\right) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R\left(M_2,\, N\right) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R\left(M_3,\, N\right)$$

が成り立つ．

(3) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**分裂する**左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$\begin{aligned}&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_1\right) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_2\right) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_3\right) \longrightarrow 0\\ &0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(M_3,\, N\right) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R\left(M_2,\, N\right) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R\left(M_1,\, N\right) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

が成り立つ．

[a] i.e. 和について可換群

__証明__　(1) 命題 A.1 より $M_1 \cong \mathrm{Ker}\, g$ である．命題 A.8 および Ker が射影極限であることから

$$\mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_1\right) \cong \mathrm{Hom}_R\left(N,\, \mathrm{Ker}\, g\right) \cong \mathrm{Ker}\, g_*$$

が従うので，命題 A.1 より $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_1\right) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_2\right) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_3\right)$ は完全列である．

(2) 命題 A.1 より $M_3 \cong \operatorname{Coker} f$ である．命題 A.8 および Coker が帰納極限であることから

$$\operatorname{Hom}_R(M_3,\, N) \cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Coker} f,\, N) \cong \operatorname{Ker} f^*$$

が従うので，命題 A.1 より $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_R(M_3,\, N)$ は完全列である．

(3) (1), (2) より従う．以前にも示したので略．

■

帰納極限とテンソル積も可換である．この事実からテンソル積の左完全性が従う．

命題 A.9: 帰納極限とテンソル積の交換

R を環，$\mathcal{I} = \bigl(I,\, \{J(i,\, j)\}_{(i,\, j) \in I \times I}\bigr)$ を有向グラフまたは圏とする．$\mathcal{I}$ 上の**右** R 加群の図式

$$\mathcal{M} = \Bigl(\{M_i\}_{i \in I},\, \Bigl\{\{f_\varphi \colon M_i \to M_j\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\Bigr\}_{(i,\, j) \in I \times I}\Bigr)$$

および**左** R 加群 N に対して，自然な $\mathbb{Z}$ 加群の同型

$$\varinjlim_{i \in I} \bigl(M_i \otimes_R N\bigr) \cong \bigl(\varinjlim_{i \in I} M_i\bigr) \otimes_R N$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> 帰納極限の標準的包含 $\iota_i \colon M_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_i$ に対して

$$\iota_i \otimes 1_N \colon M_i \otimes_R \longrightarrow \bigl(\varinjlim_{i \in I} M_i\bigr) \otimes_R N$$

は $i \in I$ で添字付けられた $\mathbb{Z}$ 加群の準同型の族であり，かつ $\forall i,\, j \in I,\, \forall \varphi \in J(i,\, j)$ に対して

$$(\iota_j \otimes_R 1_N) \circ (f_\varphi \otimes_R 1_N) = \iota_i \otimes_R 1_N$$

を充たす．故に帰納極限の普遍性により

$$\Phi \colon \varinjlim_{i \in I} \bigl(M_i \otimes_R N\bigr) \longrightarrow \bigl(\varinjlim_{i \in I} M_i\bigr) \otimes_R N$$

であって $\forall i \in I,\, \forall m \in M_i,\, \forall n \in N$ に対して

$$\Phi\bigl((\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n)\bigr) = \iota_i(m) \otimes n$$

を充たすものが一意的に存在する．

一方，写像

$$\phi \colon \bigl(\varinjlim_{i \in I} M_i\bigr) \times N \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} \bigl(M_i \otimes_R N\bigr),\ \bigl(\iota_i(m),\, n\bigr) \longmapsto (\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n)$$

はバランス写像になる．故にテンソル積の普遍性からこれは

$$\Psi \colon \bigl(\varinjlim_{i \in I} M_i\bigr) \otimes_R N \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} \bigl(M_i \otimes_R N\bigr)$$

であって，$\forall i \in I, \forall m \in M_i, \forall n \in N$ に対して

$$\Psi\bigl(\iota_i(m) \otimes n\bigr) = (\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n)$$

を充たすものが一意に定まる．従って

$$\Psi\bigl(\Phi((\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n))\bigr) = (\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n),$$
$$\Phi\bigl(\Psi(\iota_i(m) \otimes n)\bigr) = \iota_i(m) \otimes n,$$

が成り立つが，テンソル積の定義から $(\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n)$ の形の元は $\varinjlim_{i \in I}\bigl(M_i \otimes_R N\bigr)$ を，$\iota_i(m) \otimes n$ の形の元は $\bigl(\varinjlim_{i \in I} M_i\bigr) \otimes_R N$ を生成するので

$$\Psi \circ \Phi = 1, \quad \Phi \circ \Psi = 1$$

i.e. Ψ, Φ が同型写像であることがわかった． ■

系 A.7: テンソル積の右完全性

(1) 任意の**右** R 加群の完全列

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

および任意の**左** R 加群 N を与える．このとき図式

$$M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

は完全列である．

(2) 分裂する任意の**右** R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

および任意の**左** R 加群 N を与える．このとき図式

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

は完全列である．

証明 (1) 命題 A.1 から $M_3 \cong \operatorname{Coker} f$ である．Coker が帰納極限であることと命題 A.9 より

$$M_3 \otimes_R N \cong (\operatorname{Coker} f) \otimes_R N \cong \operatorname{Coker}\bigl(f \otimes 1_N\bigr)$$

が言え，命題 A.1 から題意が示された．

(2) 仮定より，準同型写像 $t\colon M_2 \longrightarrow M_1$ であって $t \circ f = 1_{M_1}$ を充たすものが取れる．このとき

$$(t \otimes 1_N) \circ (f \otimes 1_N) = 1_{M_1 \otimes_R N}$$

だから $f \otimes 1_N$ は単射である．$f \otimes 1_N$ の単射性以外は (1) から従う．

■

付録 B

アーベル圏

アーベル圏は，ホモロジー代数を適用できるという意味で R-**Mod** の一般化と言える．

定義 B.1: 始対象・終対象・零対象

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**始対象** (initial object) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I,\, A)$ が一元集合となること．
- $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**終対象** (final object) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, I)$ が一元集合となること．
- 始対象かつ終対象であるような対象が存在するとき，それを**零対象** (zero object) と呼んで 0 と書く．
- 零対象が存在するとき, $\forall A,\, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\exists! p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, 0)$ かつ $\exists! i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,\, B)$ である．このとき，一意に定まる射 $i \circ p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ のことを**零射** (zero morphimsm) と呼んで 0 と書く．

B.1　イコライザ

定義 B.2: イコライザ

圏 $\mathcal{C}$ と 2 つの射 $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ $(i = 1,\, 2)$ を与える．
射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, A)$ が $f_1,\, f_2$ の**イコライザ** (equalizer) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して集合の写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, C) &\longrightarrow \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, A) \;\middle|\; f_1 \circ \varphi = f_2 \circ \varphi \right\}, \\
\psi &\longmapsto g \circ \psi
\end{aligned}
$$

が well-defined な全単射となること（可換図式 B.1）．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] & A \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & B \\
\forall X \arrow[u, dashed, "\exists! \psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

図 B.1: イコライザ

定義 B.3: コイコライザ

圏 $\mathcal{C}$ と 2 つの射 $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ $(i = 1, 2)$ を与える．
射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ が f_1, f_2 の**コイコライザ** (coequalizer) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して集合の写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X) &\longrightarrow \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \,\middle|\, \varphi \circ f_1 = \varphi \circ f_2 \right\}, \\
\psi &\longmapsto \psi \circ g
\end{aligned}$$

が well-defined な全単射となること（可換図式 B.2）．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\varphi"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists! \psi"] \\
& & \forall X
\end{tikzcd}$$

図 B.2: コイコライザ

命題 B.1:

- イコライザは存在すれば単射[a]．
- コイコライザは存在すれば全射[b]．

[a] 故に部分対象
[b] 故に商対象

証明 イコライザ $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ の定義から集合の写像

$$g_* \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A), \ \psi \longmapsto g \circ \psi$$

は単射．よって g は単射 (mono 射) である．
コイコライザ $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ の定義から，集合の写像

$$h^* \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X), \ \psi \longmapsto \psi \circ h$$

は単射．よって g は全射 (epi 射) である． ■

R-**Mod** における核・余核，像・余像は，次のように一般化される：

定義 B.4: 核・余核

零対象を持つ圏 $\mathcal{C}$ を与え，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ をとる．

- f と零射とのイコライザを f の**核** (kernel) と呼び，$\ker f \colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow A$ と書く．
- f と零射とのコイコライザを f の**余核** (cokernel) と呼び，$\mathrm{coker}\, f \colon B \to \mathrm{Coker}\, f$ と書く．

定義 B.5: 像・余像

零対象を持ち，任意の射の核・余核が存在する圏 $\mathcal{C}$ を与え，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ をとる．

- A の部分対象 $(\mathrm{Im}\, f,\, \mathrm{im}\, f) := \bigl(\mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, f),\, \ker(\mathrm{coker}\, f)\bigr)$ のことを f の**像** (image) と呼ぶ.
- B の商対象 $(\mathrm{Coim}\, f,\, \mathrm{coim}\, f) := \bigl(\mathrm{Coker}(\ker f),\, \mathrm{coker}(\ker f)\bigr)$ のことを f の**余像** (coimage) と呼ぶ.

!

- 命題 B.1 から，$\mathrm{im}\, f$ は単射．また，コイコライザの定義から $\mathrm{coker}\, f \circ f = 0$ が成り立つ[a]から，イコライザの定義により $\ker(\mathrm{coker}\, f) \circ q = \mathrm{im}\, f \circ q = f$ を充たす射 $q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, \mathrm{Im}\, f)$ が一意的に存在する．
- 命題 B.1 から，$\mathrm{coim}\, f$ は全射．また，イコライザの定義から $f \circ \ker f = 0$ が成り立つ[b]から，コイコライザの定義により $i \circ \mathrm{coker}(\ker f) = i \circ \mathrm{coim}\, f = f$ を充たす射 $i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Coim}\, f,\, B)$ が一意的に存在する．

[a] $X = C$ とおいて $\mathrm{id}_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, C)$ の行き先を考えると $\mathrm{coker}\, f$ になるが，余核は零射とのコイコライザである．
[b] $X = C$ とおいて $\mathrm{id}_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, C)$ の行き先を考えると $\ker f$ になる．

B.2　アーベル圏に関わる諸定義

定義 B.6: アーベル圏

圏 $\mathcal{A}$ が**アーベル圏** (Abelian category) であるとは，以下を充たすことをいう：

(Ab1) 零対象 $0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.
(Ab2) $\forall A_1,\, A_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して積 $A_1 \times A_2$ と和 $A_1 \amalg A_2$ が存在する．
(Ab3) $\mathcal{A}$ における任意の射は核，余核を持つ．
(Ab4) $\mathcal{A}$ における任意の単射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,\, B)$ に対して $(A,\, f) \simeq \bigl(\mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, f),\, \ker(\mathrm{coker}\, f)\bigr)$ が[a]，任意の全射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A},\, \mathcal{B}}$ に対して $(B,\, f) \simeq \bigl(\mathrm{Coker}(\ker f),\, \mathrm{coker}(\ker f)\bigr)$ が成り立つ[b].

[a] 部分対象として同値
[b] 商対象として同値

定義 B.7: アーベル圏における完全列

- アーベル圏 $\mathcal{A}$ における図式

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が**完全** (exact) であるとは，B の部分対象として $(\mathrm{Ker}\, g,\ \ker g) \simeq (\mathrm{Im}\, f,\ \mathrm{im}\, f)$ であることを言う．

- $\mathcal{A}$ における図式

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

が**完全**であるとは，$\forall i$ に対して図式 $A_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2}$ が完全であること．

定義 B.8: アーベル圏の間の関手

$\mathcal{A},\ \mathcal{B}$ をアーベル圏，F を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への関手とする．

- F が**加法的** (additive) であるとは，$\forall A,\ B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して $F_{A,\,B} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,\ B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(A),\ F(B))$ が可換群の準同型写像となることを言う．
- F が**左完全** (left exact) であるとは，$\mathcal{A}$ における

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

の形をした任意の完全列に対して

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

が $\mathcal{B}$ における完全列となることを言う．

- F が**右完全** (right exact) であるとは，$\mathcal{A}$ における

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

の形をした任意の完全列に対して

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

が $\mathcal{B}$ における完全列となることを言う．

- F が**完全** (exact) であるとは，任意の $\mathcal{A}$ における完全列

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

に対して

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

が $\mathcal{B}$ における完全列となることを言う．

B.3　埋め込み定理

証明を省いて Mitchell の埋め込み定理を紹介する．

定理 B.1: Mitchell の埋め込み定理

$\mathcal{A}$ を小さなアーベル圏とするとき，ある環 R とある完全忠実充満関手 $\mathcal{A} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ が存在する．

付録 C

位相群

C.1 定義と基本的な性質

定義 C.1: 位相群

群 G が**位相群** (topological group) であるとは，集合としての G がHausdorff 空間であって，かつ積 $G \times G \longrightarrow G,\ (g,\,h) \longmapsto gh$ と逆元をとる写像 $G \longrightarrow G,\ g \longmapsto g^{-1}$ の両方が連続写像であることを言う．

- $\forall g \in G$ に対して定まる同相写像[*1]

$$L_g \colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gx$$

  のことを**左移動** (left translation) と言う．写像 $L \colon G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(G),\ g \longmapsto L_g$ は群準同型になる[*2]．
- $\forall g \in G$ に対して定まる同相写像

$$R_g \colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto xg$$

  のことを**右移動** (right translation) と言う．群 G と同じ台集合を持つが積演算の順序が逆であるような位相群を G^{op} と書くとき，写像 $R \colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Homeo}(G),\ g \longmapsto R_g$ は群準同型になる．[*3]．

部分集合[*4] $A,\,B \subset G$ に対して

$$\begin{aligned} AB &\coloneqq \left\{\, ab \;\middle|\; a \in A,\, b \in B \,\right\}, \\ A^{-1} &\coloneqq \left\{\, a^{-1} \;\middle|\; a \in A \,\right\}, \\ A^n &\coloneqq \left\{\, a_1 a_2 \cdots a_n \;\middle|\; a_i \in A \in B \,\right\} \end{aligned}$$

[*1] 逆写像は $(L_g)^{-1}(x) = g^{-1}x$ である．$L_g,\,(L_g)^{-1}$ の連続性は位相群の定義より明らか．

[*2] 位相空間 G の同相群 $\mathrm{Homeo}(G)$ の群演算は写像の合成で，逆元は逆写像である．$\forall x \in G$ に対して，群 G の結合律から $L(gh)(x) = L_{gh}(x) = ghx = L_g\bigl(L_h(x)\bigr) = \bigl(L(g) \circ L(h)\bigr)(x)$ が，L_g が逆写像 $x \longmapsto g^{-1}x$ を持つことから $L(g^{-1})(x) = g^{-1}x = (L_g)^{-1}(x) = \bigl(L(g)\bigr)^{-1}(x)$ が従う．

[*3] 混乱を避けるために群 G^{op} の積を $*$ と書くことにする．$\forall x \in G$ に対して，群 G の積の結合律から $R(g*h)(x) = R_{g*h}(x) = R_{hg}(x) = xhg = R_g\bigl(R_h(x)\bigr) = \bigl(R(g) \circ R(h)\bigr)(x)$ が，R_g が逆写像 $x \longmapsto xg^{-1}$ を持つことから $R(g^{-1})(x) = xg^{-1} = (R_g)^{-1}(x) = \bigl(R(g)\bigr)^{-1}(x)$ が従う．

[*4] 部分群でなくてもよい

と書くことにする．

補題 C.1:

G を位相群とする．このとき $\forall g \in G$ に対して以下が成り立つ：

(1) $U \subset G$ が点 $1_G \in G$ の近傍 $\iff$ $gU \subset G$ が点 $g \in G$ の近傍

(2) $U \subset G$ が点 $1_G \in G$ の近傍 $\implies$ U^{-1}, $U \cap U^{-1}$ も点 $1_G \in G$ の近傍

(3) $U \subset G$ が点 $1_G \in G$ の近傍 $\implies$ 点 1_G の近傍 V であって $V = V^{-1}$ を充たすもの[a]が存在し，$V \subset U$ を充たす．
i.e. 1_G の近傍のうち対称であるものの全体は 1_G の基本近傍系を成す．

(4) $U \subset G$ が点 $g \in G$ の近傍 $\implies$ 点 $1_G \in G$ の近傍 $V \subset G$ であって $VgV \subset U$ を充たすものが存在する．

(5) $U \subset G$ が点 $1_G \in G$ の近傍で，かつ n が自然数 $\implies$ 点 $1_G \in G$ の近傍 $V \subset G$ であって $V^n \subset U$ を充たすものが存在する．

[a] このような近傍は**対称** (symmetric) であると言われる．

証明 $\forall g \in G$ を 1 つとって固定する．左移動 L_g は同相写像なので 2 つの写像 L_g, $L_{g^{-1}}$ はどちらも連続である．

(1) **($\implies$)** 近傍の定義より，ある G の開集合 V が存在して $1_G \in V \subset U$ を充たす．このとき $g \in gV \subset gU$ が成り立つが，$L_{g^{-1}}$ が連続写像なので集合 $gV = (L_{g^{-1}})^{-1}(V)$ は開集合である．i.e. gU は点 g の近傍である．

($\impliedby$) 近傍の定義より，ある G の開集合 V が存在して $g \in V \subset gU$ を充たす．このとき $1_G \in g^{-1}V \subset U$ が成り立つが，L_g が連続写像なので集合 $g^{-1}V = (L_g)^{-1}(V)$ は開集合である．i.e. U は点 1_G の近傍である．

(2) 近傍の定義より，ある G の開集合 V が存在して $1_G \in V \subset U$ を充たす．このとき $1_G \in V^{-1} \subset U^{-1}$ が成り立つが，位相群の定義より逆元をとる写像 $\pi \colon x \longmapsto x^{-1}$ は連続であるから $V^{-1} = \pi^{-1}(V)$ は開集合である．i.e. U^{-1} は点 1_G の近傍である．
また，$1_G \in V \cap V^{-1} \subset U \cap U^{-1}$ も成り立つが，位相空間の公理により $V \cap V^{-1}$ も開集合である．i.e. $U \cap U^{-1}$ は点 1_G の近傍である．

(3) 近傍の定義より，ある G の開集合 W が存在して $1_G \in W \subset U$ を充たす．$V := W \cap W^{-1}$ とおくと $V \subset U$ であり，かつ W 自身も近傍なので (2) が使えて V は 1_G の近傍であるとわかる．また，$v \in V \iff v \in W$ かつ $v \in W^{-1} \iff v^{-1} \in W^{-1}$ かつ $v^{-1} \in W \iff v^{-1} \in V^{-1}$ が成り立つので $V = V^{-1}$ である．

(4) 近傍の定義より，ある G の開集合 W が存在して $g \in W \subset U$ を充たす．位相群の定義より写像 $\mu \colon G \times G \times G \longrightarrow G,\ (g, h, k) \longmapsto ghk$ は連続だから $\mu^{-1}(W)$ は開集合で，$(1_G, g, 1_G) \in \mu^{-1}(W)$ を充たす．従って[*5] 1_G の近傍 W_1, W_2 であって $W_1 \times \{g\} \times W_2 \subset \mu^{-1}(V)$ を充たすものが存在する．ここで $V := W_1 \cap W_2$ とおくと V は 1_G の近傍で，かつ $\mu(V \times \{g\} \times V) = VgV \subset U$ が成り立つ．

[*5] 位相空間 X の部分集合 $U \subset X$ が開集合である必要十分条件は，$\forall x \in U$ に対して U に含まれる X の近傍が存在すること．

(5) n 個の積をとる写像 $\mu\colon G\times\cdots\times G\longrightarrow G,\ (g_1,\,\dots,\,g_n)\longmapsto g_1\cdots g_n$ は連続だから，(4) と同様にして証明できる．

■

命題 C.1:

位相群 G の任意の部分群 $H\subset G$ に対して，閉包 $\overline{H}$ もまた部分群である．特に $H\triangleleft G$ [a]ならば $\overline{H}\triangleleft G$ である．

[a] H は G の正規部分群

証明 位相群の定義より写像 $\mu\colon G\times G\longrightarrow G,\ (g,\,h)\longmapsto gh^{-1}$ は連続である．このとき

$$\mu(\overline{H}\times\overline{H})=\mu(\overline{H\times H})\subset\overline{\mu(H\times H)}=\overline{H}$$

が成り立つので $\overline{H}$ は部分群である*6．

$H\triangleleft G$ とすると，$\forall g\in G$ に対して写像 $L_g\circ R_{g^{-1}}\colon G\longrightarrow G,\ h\longmapsto ghg^{-1}$ が同相写像であること*7により

$$g\overline{H}g^{-1}=L_g\circ R_{g^{-1}}(\overline{H})=\overline{L_g\circ R_{g^{-1}}(H)}=\overline{H}\quad(\forall g\in G)$$

が言える．i.e. $\overline{H}\triangleleft G$ である．■

命題 C.2: 位相群の剰余類による商集合は Hausdorff

H を位相群 G の閉部分群とする．左剰余類 gH による商集合 G/H に，商写像 $\varpi\colon G\longrightarrow G/H$ によって誘導される商位相を入れて位相空間にしたものを考える．このとき G/H は Hausdorff 空間であり，かつ ϖ は連続な開写像[a]である．

[a] 開集合を開集合に移す写像．

証明 **ϖ は連続な開写像**

商位相の定義より ϖ は連続である．G の任意の開集合 $U\subset G$ をとる．このとき

$$\varpi(U)=UH=\bigcup_{h\in H}Uh=\bigcup_{h\in H}R_h(U)$$

が成り立つが，$\forall h\in H$ に対して右移動 R_h は同相写像なので $R_h(U)$ は開集合であり，位相空間の公理から $\varpi(U)$ が開集合であることがわかった．

G/H は Hausdorff 空間

異なる 2 点 $g_1H,\,g_2H\in G/H$ を任意にとる．このとき $g_1H\neq g_2H\iff g_1^{-1}g_2\notin H\iff g_1^{-1}g_2\in H^c$ が成り立つ．

*6 部分集合 $A\subset G$ について $\mu(A)\subset A$ が成り立つならば $1_G\in A$ かつ A は群演算（乗法および逆元）について閉じていることが言える．

*7 ここで使っているのは連続性と単射性である．集合の写像 $f\colon A\longrightarrow B$ が単射であるならば任意の部分集合 $U_1\,U_2\subset A$ に対して $f(U_1\cap U_2)=f(U_1)\cap f(U_2)$ が成り立つ．

ところで，仮定より H は閉集合であるから補集合 H^c は開集合である．故に H^c は点 $g_1^{-1}g_2 \in G$ の開近傍であるから補題 C.1-(4) が使えて，点 1_G の近傍 $U \subset G$ であって $U(g_1^{-1}g_2)U \subset H^c \iff U(g_1^{-1}g_2)U \cap H = \emptyset$ を充たすものが存在することがわかる．補題 C.1-(3) より U として $U = U^{-1}$ を充たすものを取ることができるから，$(g_1^{-1}g_2)H \cap UH = \emptyset$ が言える．故に $g_2U \cap g_1UH = \emptyset$ である．さらに $H^2 = H$ なので $g_2UH \cap g_1UH = \emptyset$ がわかる．

ところで ϖ は開写像だから $g_iUH = \varpi(g_iU)$ は G/H の開集合である．$g_iH \in g_iUH$ であるから G/H が Hausdorff 空間であることが示された．

■

命題 C.3: 位相群の剰余群は位相群

命題 C.2 と同様の設定を考える．このとき H が位相群 G の閉正規部分群ならば，剰余群[a] G/H は位相群である．

[a] 一般に位相群とは限らない．

証明 H が正規部分群であることから写像

$$
\begin{aligned}
&\psi \coloneqq \varpi \times \varpi \colon G \times G \longrightarrow (G/H) \times (G/H),\ (g_1,\, g_2) \longmapsto (g_1H,\, g_2H) \\
&\eta \colon G \times G \longrightarrow G,\ (g_1,\, g_2) \longmapsto g_1^{-1}g_2 \\
&\mu \colon (G/H) \times (G/H) \longrightarrow G/H,\ (g_1H,\, g_2H) \longmapsto (g_1^{-1}g_2)H
\end{aligned}
$$

は well-defined である．このとき以下の可換図式が成り立つ：

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\psi"] & G \arrow[d, "\varpi"] \\
(G/H) \times (G/H) \arrow[r, "\mu"] & G/H
\end{tikzcd}
$$

μ が連続であることを示せばよい．実際，G が位相群なので η は連続であり，命題 C.2 より ϖ, ψ は連続だから μ は連続である． ■

付録 D

コンパクト生成空間の圏

位相空間，特にコンパクト空間について基本的な事柄をまとめるところから始めよう．

- 位相空間 $(X,\, \mathscr{O})$ の位相の部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathscr{O}$ が**開基** (open base) であるとは，$\forall U \in \mathscr{O}$ に対してある部分集合族 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ が存在して
$$U = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$$
が成り立つこと．
- 位相空間 $(X,\, \mathscr{O})$ の位相の部分集合 $\mathcal{SB} \subset \mathscr{O}$ が**準基** (subbase) であるとは，
$$\left\{\, S_1 \cap \cdots \cap S_n \;\middle|\; \{S_i\}_{i=1,\,\cdots,\,n} \subset \mathcal{SB},\ n = 0,\, 1,\, \ldots \right\}$$
が開基になることをいう[*1]．
- 位相空間 X の部分集合 $V \subset X$ が点 $x \in X$ の**近傍** (neighborhood) であるとは，X の開集合 U が存在して $x \in U \subset V$ を充たすことを言う．
- 位相空間 X の点 $x \in X$ の近傍全体の集合を $\mathcal{N}(x)$ と書く．部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}(x)$ が x の**基本近傍系** (neighborhood basis) であるとは，$\forall V \in \mathcal{N}(x)$ に対してある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $B \subset V$ を充たすことを言う．

補題 D.1: 写像の連続性

$(X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y),\, (Z,\, \mathscr{O}_Z)$ を位相空間，$\mathcal{SB}_Y \subset \mathscr{O}_Y$ を Y の準基，$\mathcal{B}_Y \subset \mathscr{O}_Y$ を Y の開基とする．直積集合 $X \times Y$ には積位相を入れる．i.e. 部分集合族
$$\mathcal{B}_{X\times Y} \coloneqq \left\{\, U \times V \subset X \times Y \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_X,\ V \in \mathscr{O}_Y \,\right\}$$
が $X \times Y$ の開基である．

(1) 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が連続 $\iff$ $\forall S \in \mathcal{SB}_Y$ に対して $f^{-1}(S) \in \mathscr{O}_X$

(2) 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が連続 $\iff$ $\forall B \in \mathcal{B}_Y$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathscr{O}_X$

[*1] $n = 0$ のときは X である．

(3) $\forall x_0 \in X,\ \forall y_0 \in Y$ について，標準的包含

$$i_{1y_0} \colon X \longrightarrow X \times Y,\ x \longmapsto (x,\ y_0)$$
$$i_{2x_0} \colon Y \longrightarrow X \times Y,\ y \longmapsto (x_0,\ y)$$

は連続である．

(4) 標準的射影

$$p_1 \colon X \times Y \longrightarrow X,\ (x,\ y) \longmapsto x$$
$$p_2 \colon X \times Y \longrightarrow Y,\ (x,\ y) \longmapsto y$$

は連続である．

(5) 写像 $f \colon X \times Y \longrightarrow Z$ が連続ならば，$\forall x_0 \in X,\ \forall y_0 \in Y$ に対して制限 $f|_{\{x_0\} \times Y}$，$f|_{X \times \{y_0\}}$ も連続である．

(6) 写像 $f \colon Z \longrightarrow X \times Y,\ z \longmapsto \bigl(f_1(z),\ f_2(z)\bigr)$ が連続ならば写像 $f_1 \colon Z \longrightarrow X,\ f_2 \colon Z \longrightarrow Y$ も連続である．

証明　(1) **(⟹)** $\forall S \in \mathcal{SB}_Y$ は Y の開集合なので明らか．

(⟸) $\forall U \in \mathscr{O}_Y$ を 1 つとって固定する．準基の定義より集合

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{ S_1 \cap \cdots \cap S_n \;\middle|\; \{S_i\}_{i=1,\,\cdots,\,n} \subset \mathcal{SB},\ n = 0,\,1,\,\ldots \right\}$$

は Y の開基だから，ある部分集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{B}$ が存在して $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ が成り立つ．示すべきは $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ だが,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

なので $\forall \lambda \in \Lambda$ について $f^{-1}(B_\lambda) \in \mathscr{O}_X$ を示せば十分．ところで $B_\lambda \in \mathscr{B}$ なので，ある $S_1,\,\ldots,\,S_n \in \mathcal{SB}_Y$ が存在して $B_\lambda = \bigcap_{i=1}^n S_i$ と書ける．このとき仮定より

$$f^{-1}(B_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n S_i\right) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(S_i) \in \mathscr{O}_X$$

が言える．

(2) 開基は準基でもあるので (1) より従う．

(3) 議論は全く同様なので i_{1y_0} についてのみ示す．$X \times Y$ の開基 $\mathcal{B}_{X \times Y}$ の任意の元はある $U \in \mathscr{O}_X,\ V \in \mathscr{O}_Y$ を用いて $U \times V$ と書ける．このとき $(i_{1y_0})^{-1}(U \times V) = U \in \mathscr{O}_X$ が成り立つから，(2) より i_{1y_0} は連続である．

(4) 議論は全く同様なので p_1 についてのみ示す．$\forall U \in \mathscr{O}_X$ を 1 つとる．$p_1^{-1}(U) = U \times Y$ だが，$Y \in \mathscr{O}_Y$ なので右辺は $\mathcal{B}_{X \times Y}$ に属する．i.e. $X \times Y$ の開集合である．

(5) $f|_{\{x_0\} \times Y} = f \circ i_{1x_0},\ f|_{X \times \{y_0\}} = f \circ i_{2x_0}$ である．(3) と仮定よりこれは連続写像の合成なので連続である．

(6) $f_1 = p_1 \circ f,\ f_2 = p_2 \circ f$ である．(4) と仮定よりこれは連続写像の合成なので連続である．

■

定義 D.1: 被覆

- 集合族 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が集合 X の**被覆** (cover) であるとは,
$$X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$
が成り立つこと.
- 位相空間 X の被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**開** (open) であるとは, $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して U_λ が X の開集合であること.
- 位相空間 X の被覆 $\mathcal{V} := \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が, 別の X の被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**細分** (refinement) であるとは, $\forall V_\alpha \in \mathcal{V}$ に対してある $U_\lambda \in \mathcal{U}$ が存在して $V_\alpha \subset U_\lambda$ が成り立つこと.
- 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**局所有限** (locally finite) であるとは, $\forall x \in X$ に対して以下の条件が成り立つこと:

  (locally finiteness) x のある近傍 $V \subset X$ が存在して集合
  $$\{\,\lambda \in \Lambda \mid U_\lambda \cap V \neq \emptyset\,\}$$
  が有限集合になる.

定義 D.2: パラコンパクト

位相空間 X が**パラコンパクト** (paracompact) であるとは, 任意の開被覆が局所有限かつ開な細分を持つこと.

定義 D.3: コンパクト

位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ は, 以下の条件を充たすとき**コンパクト** (compact) であると言われる:

(Heine-Boral の性質) A の任意の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{U}$ が A の開被覆となる[a].

[a] このことを「任意の開被覆は有限部分被覆を持つ」と表現する.

定義 D.4: 局所コンパクト

位相空間 X が**局所コンパクト** (locally compact) であるとは, $\forall x \in X$ が少なくとも 1 つのコンパクトな近傍を持つこと.

補題 D.2: コンパクト空間の閉集合

位相空間 X がコンパクトならば, X の任意の閉集合はコンパクトである.

証明 X の任意の閉集合 $F \subset X$ と，F の X における任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．このとき

$$X = F \cup F^c = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \cup F^c$$

が成り立つが，F^c は X の開集合なので部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{F^c\}$ は X の開被覆である．仮定より X はコンパクトだから，$\exists\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して $X = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}\right) \cup F^c$ を充たす．このとき集合族 $\{U_{\lambda_i}\}_{1\le i\le n}$ が F の有限開被覆となる． ■

補題 D.3: Hausdorff 空間のコンパクト部分空間

X を Hausdorff 空間とする．

(1) X のコンパクト部分集合は閉集合である．
(2) X がコンパクトならば X の閉部分集合はコンパクトである．
(3) 位相空間 Y がコンパクトならば，任意の連続写像 $f\colon Y \longrightarrow X$ は閉写像である．
(4) (3) において f が全単射ならば同相である．

証明 (1) X のコンパクト部分集合 $K \subset X$ をとる．補集合 K^c が開集合であることを示す．
$\forall x \in K^c$ を 1 つとって固定する．X は Hausdorff 空間だから，$\forall k \in K$ に対してある x の開近傍 U_k と k の開近傍 V_k が存在して $U_k \cap V_k = \emptyset$ を充たす．このとき集合族 $\{V_k\}_{k\in K}$ は K の開被覆だから，<u>K のコンパクト性より</u> $\exists k_1, \ldots, k_n \in K,\ K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{k_i}$ が成り立つ．ここで $\bigcap_{i=1}^n U_{k_i} \subset \left(\bigcup_{i=1}^n V_{k_i}\right)^c \subset K^c$ が成り立つが，位相空間の公理により $\bigcap_{i=1}^n U_{k_i}$ は開集合であり，点 x の開近傍となる．以上の議論から K^c の任意の点は K^c に含まれる近傍を少なくとも 1 つ持つので K^c は開集合である．

(2) X の閉部分集合 A をとり，A の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．A は閉集合なので A^c は開集合であり，$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して $U_\lambda \cup A^c$ は開集合．従って集合族 $\{U_\lambda \cup A^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆である．故に X のコンパクト性から $\exists\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda,\ \bigcup_{i=1}^n (U_\lambda \cup A^c) = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}\right) \cup A^c = X$ が成り立つ．このとき $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分集合 $\{U_{\lambda_i}\}_{1\le i\le n}$ は A の開被覆である．i.e. A はコンパクトである．

(3) 補題 D.2 より Y の任意の閉集合 F はコンパクトであるから，$f(F)$ は X のコンパクト集合である．従って (1) より $f(F)$ は X の閉集合である．

(4) (3) より従う．

■

次の補題は，Hausdorff 空間のコンパクト集合が分離性の意味で点と同じように扱えることを示唆する：

補題 D.4: Hausdorff 空間のコンパクト集合の分離性

X を Hausdorff 空間とする．

(1) X のコンパクト部分集合 $C, D \subset X$ が $C \cap D = \emptyset$ を充しているとする．
このとき，X の開集合 $U, V \subset X$ であって

$$C \subset U \text{ かつ } D \subset V \text{ かつ } U \cap V = \emptyset$$

を充たすものが存在する．

(2) X がコンパクトであるとする．
このとき，X の任意の閉集合 $F \subset X$ と開集合 $U \subset X$ であって $F \subset U$ を充たすものに対して，X の開集合 $V \subset X$ であって $F \subset V$ かつ $\overline{V} \subset U$ を充たすものが存在する[a]．

(3) X がコンパクトであるとする．
このとき，X の任意の有限開被覆 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ に対してある X の有限開被覆 $\{V_1, \ldots, V_n\}$ が存在して $\overline{V_i} \subset U_i$ $(1 \leq \forall i \leq n)$ を充たす[b]．

[a] 実は，この主張は X が正規空間であることと同値である．
[b] 一般に，この主張は X が正規空間のときに成り立つ．

証明 (1) まず $C = \{x\}$（1 点集合）の場合に示す．X は Hausdorff 空間だから，$\forall y \in D$ に対して X の開集合 $U_y, V_y \subset X$ が存在して $x \in U_y$ かつ $y \in V_y$ かつ $U_x \cap V_y = \emptyset$ を充たす．このとき $D \subset \bigcup_{y \in D} V_y$ だが，仮定より D はコンパクトなので $\exists y_1, \ldots, y_n \in D$, $D \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ が成り立つ．ここで $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, $V := \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ とおけば $U, V \subset X$ は X の開集合で，$C \subset U$ かつ $D \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たす．

次に C が任意のコンパクト集合の場合に示す．前半の議論より $\forall x \in C$ に対して X の開集合 $U_x, V_x \subset X$ が存在して $\{x\} \subset U_x$ かつ $D \subset V_x$ かつ $U_x \cap V_x = \emptyset$ を充たす．このとき $C \subset \bigcup_{x \in C} U_x$ だが，仮定より C はコンパクトなので $\exists x_1, \ldots, x_m \in C$, $C \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$ が成り立つ．ここで $U := \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$, $V := \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}$ とおけば $U, V \subset X$ は X の開集合で，$C \subset U$ かつ $D \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たす．

(2) U^c は X の閉集合であり $F \cap U^c = \emptyset$ を充たす．かつ補題 D.3-(2) より F, U^c はコンパクトである．従って (1) から，X の開集合 $V, W \subset X$ であって $F \subset V$ かつ $U^c \subset W$ かつ $V \cap W = \emptyset$ を充たすものが存在する．このとき $V \subset W^c \subset U$ が成り立つが，W^c は X の閉集合なので $\overline{V} \subset W^c \subset U$ が言える[*2]．

(3) 勝手な X の有限開被覆 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ を 1 つとる．$F_1 := X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n)$ とおくと $F_1 \subset X$ は X の閉集合であり，$F_1 \subset U_1$ を充たす．従って (2) から X の開集合 $V_1 \subset X$ であって $F_1 \subset V_1$ かつ $\overline{V_1} \subset U_1$ を充たすものが存在する．このとき $X = F_1 \cup (\bigcup_{i=2}^{n} U_i) \subset V_1 \cup (\bigcup_{i=2}^{n} U_i)$ なので $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ は X の開被覆である．以上の操作を n 回繰り返すことにより X の開被覆 $\{V_1, \ldots, V_n\}$ であって $\overline{V_i} \subset U_i$ $(1 \leq \forall i \leq n)$ を充たすものが構成される．

■

[*2] V の閉包 $\overline{V}$ とは，V を含む最小の閉集合のことであった．

補題 D.5: tube lemma

X, Y を位相空間，C, D をそれぞれ X, Y のコンパクト集合とする．
積空間 $X \times Y$ の開集合 W であって $C \times D \subset W$ を充たすものが存在するならば，X の開集合 U および Y の開集合 V であって

$$C \subset U \quad \text{かつ} \quad D \subset V \quad \text{かつ} \quad U \times V \subset W$$

を充たすものが存在する．

証明 ■

D.1 コンパクト生成空間

この節の内容は，[8] による．

定義 D.5: コンパクト生成空間

位相空間 X は以下の 2 条件を満たすとき，**コンパクト生成空間** (compactly generated space) と呼ばれる：

(CG-1) X は Hausdorff 空間[a]

(CG-2) 部分集合 $A \subset X$ が閉集合 $\iff$ 任意のコンパクト集合 $C \subset X$ に対して $A \cap C$ が閉集合

[a] この要請は補題 D.3 に由来する

コンパクト生成空間の圏 CG を次のように定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ を全てのコンパクト生成空間の集まりとする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(X, Y)$ をコンパクト生成空間 X と Y の間の連続写像全体とする．
- 射の合成を通常の写像の合成とする．

CG は **Top** の充満部分圏である．特に **CG** は

(1) 全ての局所コンパクトな Hausdorff 空間
(2) 全ての第一可算公理を充たす Hausdorff 空間．特に全ての距離空間．
(3) CW-複体であって，各次元において有限個のセルを持つもの全体

などを含む便利な圏になっている．

D.1.1 等化写像

商位相は次の等化写像によって定義されるのだった：

定義 D.6: 等化写像

位相空間 $(X,\ \mathscr{O}_X)$, $(Y,\ \mathscr{O}_Y)$ の間の連続写像 $q\colon X \longrightarrow Y$ が**等化写像** (identification map)[a] であるとは，以下の条件を充たすこと：

(Quo-1) q は全射.
(Quo-2) $U \in \mathscr{O}_Y \iff q^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$

[a] **商写像** (quotient map) とか **proclusion** と呼ぶ場合もある.

同値関係 $\sim$ による商空間 $X/\sim$ を作る際の標準的射影 $\pi\colon X \longrightarrow X/\sim,\ x \longrightarrow [x]$ は等化写像である. しかし，積における第 i 成分のことも標準的射影と呼ぶので，この章では等化写像かつ標準的射影であるような π のことを**商写像** (quotient map) と呼ぶことにする.

命題 D.1: 等化写像の普遍性

全射連続写像 $q\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下は同値：

(1) q が等化写像.
(2) $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ および任意の写像 $f\colon Y \longrightarrow Z$ を与える. このとき f が連続であることと $f \circ q$ が連続であることは同値である. i.e. $\mathbf{Top}$ の図式 D.1a は可換である.
(3) X の同値関係を

$$\sim\ \coloneqq \left\{\, (x,\ y) \in X \times X \;\middle|\; q(x) = q(y) \,\right\}$$

と定義する. このとき q の誘導する写像 $\overline{q}\colon X/\sim\ \longrightarrow Y,\ [x] \longmapsto q(x)$ は well-defined な同相写像である（可換図式 D.1b).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f\circ q"] & \\
Y \arrow[r, "f"'] & \forall Z
\end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/\sim \arrow[ur, "\overline{q}"'] &
\end{tikzcd}$$

(b)

図 D.1: 等化写像の普遍性

__証明__ 商位相の定義より商写像 $\pi\colon X \longrightarrow X/\sim,\ x \longrightarrow [x]$ は等化写像である.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Z の任意の開集合 $U \subset X$ をとる.
$f \circ q$ が連続ならば $(f \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}\bigl(f^{-1}(U)\bigr)$ が X の開集合であり，等化写像の条件 **(Quo-2)** より $f^{-1}(U)$ は Y の開集合である. i.e. f は連続写像である. 逆に f が連続ならば $f \circ q$ は連続写像の合成なので連続である.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\forall y \in [x]$ に対して $q(y) = q(x)$ なので写像 $\overline{q}$ は well-defined である．逆写像は

$$\overline{q}^{-1} \colon Y \longrightarrow X/\sim,\ y \longmapsto [x] \quad ^{\mathrm{w}/} \quad x \in q^{-1}(\{y\})$$

で与えられる．

まず $\overline{q}$ が連続であることを示す．Y の任意の開集合 $U \subset Y$ をとる．q は連続なので $\pi^{-1}\bigl(\overline{q}^{-1}(U)\bigr) = (\overline{q} \circ \pi)^{-1}(U) = q^{-1}(U)$ は X の開集合だが，π は等化写像だから等化写像の条件 **(Quo-2)** より $\overline{q}^{-1}(U)$ は $X/\sim$ の開集合である．

次に $\overline{q}^{-1}$ が連続であることを示す．$\forall x \in X$ に対して $\overline{q}^{-1} \circ q(x) = [x]$ が成り立つ，i.e. $\overline{q}^{-1} \circ q = \pi$ だから (2) より $\overline{q}^{-1}$ は連続である．

以上の議論より $\overline{q}$ は同相写像である．

(3) $\Longrightarrow$ (1) 任意の部分集合 $U \subset Y$ をとる．U が Y の開集合だとすると，q は連続だから $q^{-1}(U)$ は X の開集合である．

逆に　$q^{-1}(U)$ が X の開集合だとする．このとき $\pi^{-1}\bigl(\overline{q}^{-1}(U)\bigr) = q^{-1}(U)$ は X の開集合で，かつ π は等化写像だから $\overline{q}^{-1}(U)$ は $X/\sim$ の開集合である．仮定より $\overline{q}$ は同相写像だから $U = \overline{q}\bigl(\overline{q}^{-1}(U)\bigr)$ は Y の開集合である．

■

系 D.1: 商空間の普遍性

$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の上の同値関係 $\sim \subset X \times X$ および商写像 $\pi \colon X \longrightarrow X/\sim,\ x \longmapsto [x]$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(商空間の普遍性) $\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ および連続写像 $f \colon X \longrightarrow Y$ であって $\forall x, y \in X,\quad x \sim y \Longrightarrow g(x) = g(y)$ を充たすものを任意に与える．このとき連続写像 $\overline{f} \colon X/\sim \longrightarrow Y$ が一意的に存在して $\mathbf{Top}$ の可換図式 D.2 が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \forall Y \\
X/\sim \arrow[ur, dashed, "\exists ! \overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

図 D.2: 商空間の普遍性

<u>**証明**</u> f に関する仮定より写像 $\overline{f} \colon X/\sim \longrightarrow Y,\ [x] \longmapsto f(x)$ は well-defined であり，$f = \overline{f} \circ \pi$ が成り立つ．商位相の定義から π は等化写像なので，命題 D.1-(2) より $\overline{f}$ は連続である．

連続写像 $g \colon X/\sim \longrightarrow Y$ が可換図式 D.2 を充たすとする．このとき $\forall [x] \in X/\sim$ に対して $g([x]) = g \circ \pi(x) = f(x)$ が成り立つので $g = \overline{f}$ である．i.e. $\overline{f}$ は一意． ■

命題 D.2: 等化写像によるコンパクト生成空間の構成

$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$，$Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とする．このとき，等化写像 $q \colon X \longrightarrow Y$ が存在すれば $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ である．

証明 部分集合 $B \subset Y$ であって，Y の任意のコンパクト集合 $C \subset Y$ に対して $B \cap C$ が Y の閉集合となるようなものをとる．このとき B が Y の閉集合であることを示せば良い．

X のコンパクト集合 $K \subset X$ を任意にとる．q は連続だから $q(K)$ もコンパクトであり，B の選び方から $B \cap q(K)$ は Y の閉集合である．すると q は連続なので $q^{-1}\bigl(B \cap q(K)\bigr)$ は X の閉集合で，従って $q^{-1}\bigl(B \cap q(K)\bigr) \cap K = q^{-1}(B) \cap K$ は[*3] X の閉集合である．

仮定より X はコンパクト生成空間であり，コンパクト集合 $K \subset X$ は任意だったので，以上の議論から $q^{-1}(B)$ が X の閉集合であるとわかった．従って等化写像の条件 **(Quo-2)** より B は Y の閉集合である． ■

D.1.2 Hausdorff 空間の圏からの関手

Hausdorff 空間（T_2-空間）の圏 $\mathcal{T}_2$ とは，

- 対象は Hausdorff 空間
- 射は Hausdorff 空間の間の連続写像
- 合成は連続写像の合成

として定義される **Top** の充満部分圏である．$\mathcal{T}_2$ の任意の対象は次の方法でコンパクト生成空間にすることができる．混乱を避けるために，しばらくの間は位相空間の位相を明示する．すなわち，位相空間 $(X, \mathscr{O})$ と言ったとき X は集合で，$\mathscr{O}$ は X の上の位相を表す．

定義 D.7:

$(X, \mathscr{O}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とする．このとき集合 X の上に以下のようにして定まる新しい位相 $\mathscr{K}$ を入れてできる位相空間 $(X, \mathscr{K})$ を $\boldsymbol{k(X)}$ と書く：
部分集合 $A \subset X$ が $k(X)$ の閉集合 $\iff$ $(X, \mathscr{O})$ の任意のコンパクト集合 $C \subset X$ に対して，集合 $A \cap C$ が $(X, \mathscr{O})$ の閉集合

命題 D.3: $k(X)$ の基本性質

定義 D.7 の $k(X)$ に対して以下が成り立つ：

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_X \colon k(X) \longrightarrow X$ は連続
(2) $k(X)$ は Hausdorff 空間
(3) $k(X)$ と $(X, \mathscr{O})$ は同じコンパクト集合を持つ
(4) $k(X)$ はコンパクト生成空間
(5) $(X, \mathscr{O}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}) \implies k(X) = (X, \mathscr{O})$

証明 (1) $A \subset X$ が $(X, \mathscr{O})$ において閉集合かつ $C \subset X$ が $(X, \mathscr{O})$ においてコンパクトであるとする．補題 D.3-(1) より C は $(X, \mathscr{O})$ の閉集合であり，従って $A \cap C$ も $(X, \mathscr{O})$ の閉集合である．故に A は $k(X)$ の閉集合でもある．

(2) (1) より従う．

[*3] $K \subset q^{-1}\bigl(q(K)\bigr)$ である．

(3) $A \subset X$ が $k(X)$ においてコンパクトならば，(1) より A は $(X, \mathscr{O})$ においてもコンパクトである．
逆に $A \subset X$ が $(X, \mathscr{O})$ においてコンパクトであるとする．A に $(X, \mathscr{O})$ からの相対位相を入れてできる位相空間を $(A, \mathscr{O}_A)$ と書き，$k(X)$ からの相対位相を入れてできる位相空間を $k(A)$ と書く．すると (1) より恒等写像 $\mathrm{id}_A \colon k(A) \longrightarrow A$ は連続である．逆写像（恒等写像）の連続性を示す．$k(A)$ の任意の閉集合 $B \subset A$ をとる．コンパクト生成空間の定義から $B \cap A = B$ は $(A, \mathscr{O}_A)$ の閉集合であるから，恒等写像 $\mathrm{id}_A \colon A \longrightarrow k(A)$ は連続写像である．以上の議論から $(A, \mathscr{O}_A) \approx k(A)$ であり，A は $k(X)$ においてもコンパクトである．

(4) コンパクト生成空間の定義の **(CG1)** は (2) から，**(CG2)** は (3) から従う．

(5) (4) より従う．

■

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ の間の任意の写像 $f \colon X \longrightarrow Y$ に対して，集合の写像としては同一な $\mathbf{CG}$ の写像 $k(f) \colon k(X) \longrightarrow k(Y),\ x \longmapsto f(x)$ を対応づける．

補題 D.6:

$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}),\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とする．
写像 $f \colon X \longrightarrow Y$ は，X の任意のコンパクト集合 $C \subset X$ に対して C への制限 $f|_C \colon C \longrightarrow Y$ が連続ならば，連続である．

証明 $A \subset Y$ を任意の閉集合，$C \subset X$ を任意のコンパクト集合とする．$f|_C$ が連続なので $f(C) \subset Y$ もコンパクト．さらに仮定より Y が Hausdorff 空間なので補題 D.3 より $f(C)$ は閉集合である．従って $A \cap f(C)$ も閉集合であり，故に $f|_C$ の連続性から

$$(f|_C)^{-1}\bigl(A \cap f(C)\bigr) = (f|_C)^{-1}(A) \cap (f|_C)^{-1}\bigl(f(C)\bigr) = f^{-1}(A) \cap C$$

も閉集合である．仮定より X はコンパクト生成空間だから $f^{-1}(A)$ は閉集合であることがわかった．i.e. f は連続である． ■

命題 D.4: $k(f)$ の基本性質

$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ を与える．

(1) 写像 $f \colon X \longrightarrow Y$ が X の任意のコンパクト集合の上で連続ならば $k(f)$ は連続である．
(2) 恒等写像 $k(X) \longrightarrow X$ はホモトピー群，特異ホモロジー・コホモロジーの同型を誘導する．

証明 (1) 補題 D.6 より $k(f)$ が $k(X)$ の任意のコンパクト集合の上で連続であることを示せば良い．$C' \subset k(X)$ を $k(X)$ のコンパクト集合とする．命題 D.3-(3), (1) より C' は X のコンパクト集合でもあり，恒等写像 $C' \longrightarrow C$ が同相写像となる．$f|_C$ が連続であるという仮定から $f(C) \subset Y$ は Y のコンパクト集合であり，故に $f(C') \subset k(Y)$ は $k(Y)$ のコンパクト集合である．故に $k(f)|_{C'} \colon C' \longrightarrow f(C')$ は連続写像の合成

$$C' \xrightarrow{\mathrm{id}} C \xrightarrow{f} f(C) \xrightarrow{\mathrm{id}} f(C')$$

と等しく，連続である．

(2) (1) より従う．

■

命題 D.3, D.4 により，対応

$$k\colon \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathbf{CG}$$

は関手になる．

D.1.3 圏 CG の積

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ に対して，通常の積空間（これは圏 **Top** の積である）$X \times Y$ は必ずしも **CG** の対象ではない．しかし，次のように定義したものは圏 **CG** の積になる．

定義 D.8: 圏 CG の積

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ に対して**積**を次のように定義する：

$$X \times_{\mathbf{CG}} Y \coloneqq k(X \times Y)$$

ただし右辺の $\times$ は通常の積空間をとることを意味する．

命題 D.5:

定義 D.8 の $\times_{\mathbf{CG}}$ は圏 **CG** における積の普遍性を充たす．i.e. 圏 **CG** は常に積を持つ．

<u>**証明**</u> $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ をとる．命題 D.3-(1) より恒等写像 $\mathrm{id}\colon X \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow X \times Y$ は連続である．補題 D.1-(4) より射影 $p_1\colon X \times Y \longrightarrow X,\ p_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$ はどちらも連続だから，合成 $p_i \circ \mathrm{id}$ は連続である．i.e. $p_i \circ \mathrm{id}$ は **CG** の射である．

ここで $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ および任意の **CG** の射 $f_1\colon W \longrightarrow X,\ f_2\colon W \longrightarrow Y$ を与える．積空間 $\times$ は **Top** における積だから，積の普遍性により射 $g\colon W \longrightarrow X \times Y$ が一意的に存在して $f_i = p_i \circ g$ を充たす．関手 k を作用させて命題 D.3-(5) を使うことで，所望の可換図式

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed, "\exists! k(g)"] \arrow[dr, "f_i"'] & X \times_{\mathbf{CG}} Y \arrow[d, "p_i \circ \mathrm{id}"] \\
& X_i
\end{tikzcd}$$

を得る．ただし $X_1 \coloneqq X,\ X_2 \coloneqq Y$ とおいた． ■

補題 D.7:

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ に対して

$$k(X \times Y) = k(X) \times_{\mathbf{CG}} k(Y)$$

が成り立つ．

証明 集合としての等式が成り立つことは明らかなので，両辺の位相が等しいことを示す．

命題 D.3-(1) より恒等写像 $k(X) \longrightarrow X,\ k(Y) \longrightarrow Y$ は連続だから，恒等写像 $g\colon k(X)\times k(Y) \longrightarrow X\times Y$ も連続である．従って，$k(X)\times k(Y)$ のコンパクト集合は $X\times Y$ のコンパクト集合でもある．

逆に任意のコンパクト集合 $A \subset X\times Y$ をとる．補題 D.1-(4) より第 i 成分への射影 $p_i\colon X\times Y \longrightarrow X_i\ (i=1,\,2)$ は連続なので $p_i(A)\subset X_i$ はどちらも X_i のコンパクト集合であり，故に命題 D.3-(3) より $k(X_i)$ のコンパクト集合でもある．従って $p_1(A)\times p_2(A)$ は $k(X)\times k(Y)$ のコンパクト集合であり，制限 $g|_{p_1(A)\times p_2(A)}\colon p_1(A)\times p_2(A) \longrightarrow p_1(A)\times p_2(A)$ はコンパクト集合から Hausdorff 空間への連続な全単射なので同相写像である（補題 D.3-(4)）．$A\subset p_1(A)\times p_2(A)$ であるから A は $k(X)\times k(Y)$ のコンパクト集合でもある．

以上の議論より $k(X)\times k(Y)$ と $X\times Y$ が同じコンパクト集合を持つことがわかった．従って k の定義より，$k(X)\times_{\mathbf{CG}} k(Y) = k\bigl(k(X)\times k(Y)\bigr)$ と $k(X\times Y)$ の位相は等しい． ■

命題 D.6: 圏 CG における等化写像の直積

$X_i,\,Y_i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})\ (i=1,\,2)$ および $\mathbf{CG}$ の射としての等化写像 $q_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$ を与える．このとき

$$q_1\times q_2\colon X_1 \times_{\mathbf{CG}} X_2 \longrightarrow Y_1\times_{\mathbf{CG}} Y_2$$

は $\mathbf{CG}$ の射として等化写像である．

D.1.4 圏 CG の関数空間

圏 $\mathbf{Top}$ において集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\,Y)$ を位相空間にしたい場合，よく**コンパクト開位相**を入れる．

定義 D.9: コンパクト開位相

$(X,\,\mathscr{O}_X),\,(Y,\,\mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，X のコンパクト集合全体の集合を $\mathscr{C}_X \subset 2^X$ とおく[a]．$C\in\mathscr{C}_X,\ U\in\mathscr{O}_Y$ に対して

$$W(C,\,U) \coloneqq \bigl\{\,\varphi\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\,Y)\bigm| \varphi(C)\subset U\,\bigr\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\,Y)$$

とおく．

集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\,Y)$ の**コンパクト開位相** (compact-open topology) とは，部分集合の族

$$\bigl\{W(C,\,U)\bigr\}_{C\in\mathscr{C}_X,\ U\in\mathscr{O}_Y}$$

を準基とする[b]位相のこと．

[a] 2^X は X の冪集合（部分集合全体の集合）

[b] 開基であるとは限らない．

集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\,Y)$ にコンパクト開位相を入れてできる位相空間のことを $\boldsymbol{C(X,\,Y)}$ と書くことにする．

補題 D.8:

位相空間 X, Y を与える．Y が Hausdorff 空間ならば，位相空間 $C(X, Y)$ も Hausdorff 空間である．

証明 互いに異なる任意の 2 点 $f, g \in C(X, Y)$ をとる．このときある $x_0 \in X$ に関して $f(x_0) \neq g(x_0)$ が成り立つ．仮定より Y は Hausdorff 空間なので，ある Y の開集合 $U, V \subset Y$ が存在して $f(x_0) \in U$ かつ $g(x_0) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たす．

ここで一点集合 $\{x_0\}$ はコンパクトなので，コンパクト開位相の定義より $C(X, Y)$ の部分集合 $W(\{x_0\}, U)$, $W(\{x_0\}, V)$ は開集合．さらに U, V の選び方から $f \in W(\{x_0\}, U)$ かつ $g \in W(\{x_0\}, V)$ かつ $W(\{x_0\}, U) \cap W(\{x_0\}, V) = \emptyset$ が成り立つ．■

つまり，対応 $C\colon (X, Y) \longrightarrow C(X, Y)$ は圏 $\mathcal{T}_2$ において閉じている．しかし，$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ であっても $C(X, Y)$ がコンパクト生成空間になるとは限らない．

定義 D.10:

$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とする．このとき $C(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ に関手 k を作用させて得られるコンパクト生成空間を

$$\mathbf{Map}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \coloneqq k\bigl(C(X, Y)\bigr)$$

と書く．

補題 D.9: evaluation の連続性

- $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ に対して，写像

$$\varepsilon\colon C(X, Y) \times X \longrightarrow Y,\ (f, x) \longmapsto f(x)$$

は，X の任意のコンパクト集合の上で連続である．

- $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ に対して写像

$$k(\varepsilon)\colon \mathrm{Map}(X, Y) \times_{\mathbf{CG}} X \longrightarrow Y,\ (f, x) \longmapsto f(x)$$

は連続である．i.e. ε は $\mathbf{CG}$ の射である．

証明 • 任意のコンパクト集合 $C \subset X$ および任意の開集合 $U \subset Y$ をとる．そして点 $\forall (f, x) \in (\varepsilon|_{C(X, Y) \times C})^{-1}(U)$ を一つ固定する．i.e. $x \in C$ かつ $f(x) \in U$ が成り立つ．

$f|_C$ は連続だから $(f|_C)^{-1}(U) \subset C$ は C の開集合，i.e. 点 x の開近傍である．そして C はコンパクト Hausdorff 空間だから[*4]x のコンパクトな近傍 M が存在して $x \in M \subset (f|_C)^{-1}(U) \subset C$ を充たす．このときコンパクト開位相の定義より部分集合 $W(M, U) \subset C(X, Y)$ は開集合であり，従って $W(M, U) \times M \subset (\varepsilon|_{C(X, Y) \times C})^{-1}(U)$ は点 $(f, x) \in (\varepsilon|_{C(X, Y) \times C})^{-1}(U)$ の近傍である．(f, x) は任意だったので $(\varepsilon|_{C(X, Y) \times C})^{-1}(U)$ が開集合であることが示された．i.e. ε の制限 $\varepsilon|_{C(X, Y) \times C}$ は連続

[*4] コンパクト Hausdorff 空間は局所コンパクトである．そして局所コンパクト Hausdorff 空間の各点において，コンパクト閉近傍全体の集合は基本近傍系を成す．

である．

- 命題 D.4-(1) より，前半の ε に k を使った写像 $k(\varepsilon)\colon k\bigl(C(X,\,Y)\times Y\bigr)\longrightarrow k(Y)$ は連続である．$k(\varepsilon)$ の定義域および値域に関しては，命題 D.3-(5) と補題 D.7 より $k\bigl(C(X,\,Y)\times Y\bigr)=k\bigl(C(X,\,Y)\bigr)\times_{\mathbf{CG}} k(Y)=\mathrm{Map}(X,\,Y)\times_{\mathbf{CG}} Y,\ k(Y)=Y$ がわかるので証明が完了する．

■

補題 D.10:

$X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}),\ Y\in\mathcal{T}_2$ ならば

$$\mathrm{Map}(X,\,k(Y))=\mathrm{Map}(X,\,Y)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$$

定理 D.2:

$X,\,Y,\,Z\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ ならば

$$\mathrm{Map}(X,\,Y\times_{\mathbf{CG}} Z)=\mathrm{Map}(X,\,Y)\times_{\mathbf{CG}}\mathrm{Map}(X,\,Z)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> 圏 **CG** における積の普遍性より，写像

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(X,\,Y\times_{\mathbf{CG}} Z)&\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(X,\,Y)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(X,\,Z)\\ f&\longmapsto (p_1\circ f,\,p_2\circ f)\end{aligned}$$

は well-defined な全単射である[*5]．

次に，左辺と右辺の位相が等しいことを示す．そのためにまず

$$C(X,\,Y\times Z)=C(X,\,Y)\times C(X,\,Z) \tag{D.1.1}$$

を示そう．積空間 $C(X,\,Y)\times C(X,\,Z)$ の準基の任意の元は，定義 D.9 の記号を使って $W(C,\,U)\times W(D,\,V)$ と書かれる．ただし $C,\,D$ は X のコンパクト集合で，$U,\,V$ はそれぞれ $Y,\,Z$ の開集合である．このとき写像 φ による逆像は

$$\varphi^{-1}\bigl(W(C,\,D)\times W(D,\,V)\bigr)=W(C,\,U\times Z)\cap W(D,\,Y\times V)$$

なので $C(X,\,Y\times Z)$ の開集合である．従って補題 D.1-(1) より φ が連続である．

逆に $C(X,\,Y\times Z)$ の準基の任意の元は $W(C,\,U\times V)$ の形をしている．このとき写像 φ^{-1} による逆像は

$$(\varphi^{-1})^{-1}\bigl(W(C,\,U\times V)\bigr)=W(C,\,U)\times W(C,\,V)$$

なので $C(X,\,Y)\times C(X,\,Z)$ の開集合である．従って補題 D.1-(1) より φ^{-1} も連続であり，φ が同相写像であることが示された．

式 (D.1.1) に k を使うと，補題 D.7, D.10 より

$$\begin{aligned}k\bigl(C(X,\,Y\times Z)\bigr)&=\mathrm{Map}(X,\,k(Y\times Z))=\mathrm{Map}(X,\,Y\times_{\mathbf{CG}} Z)\\ &=k\bigl(C(X,\,Y)\times C(X,\,Z)\bigr)=\mathrm{Map}(X,\,Y)\times_{\mathbf{CG}}\mathrm{Map}(X,\,Z)\end{aligned}$$

[*5] 補題 D.1-(4) より $p_i\circ f$ は連続写像なので φ は well-defined．なお，φ の定義域と値域は**ただの集合**であって，この時点ではまだコンパクト開位相を入れていない．

が従う． ■

定理 D.3: 随伴定理

$X,\ Y,\ Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ ならば

$$\mathrm{Map}(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) = \mathrm{Map}(X,\ \mathrm{Map}(Y,\ Z))$$

が成り立つ．

<u>証明</u> まず，$\mathcal{T}_2$ における写像

$$\mu\colon C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) \longrightarrow C\bigl(X,\ C(Y,\ Z)\bigr),\ f \longmapsto \bigl(x \longmapsto (y \longmapsto f(x,\ y))\bigr) \tag{D.1.2}$$

が well-defined であることを示す．$\forall f \in C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z)$ を 1 つ固定する．補題 D.1-(5) より $\forall x \in X$ に対して写像 $\mu(f)(x) = f|_{\{x\}\times Y}$ は連続なので $\mu(f)(x) \in C(Y,\ Z)$ がわかる．よって示すべきは $\mu(f) \in C\bigl(X,\ C(Y,\ Z)\bigr)$ である．

補題 D.11:

写像 $\mu(f)\colon X \longrightarrow C(Y,\ Z)$ は連続である．

<u>証明</u> 位相空間 $C(Y,\ Z)$ の準基に属する開集合 $W(C,\ U)$ を任意にとる．コンパクト開位相の定義より C は Y のコンパクト集合で U は Z の開集合である．補題 D.1-(1) より $V \coloneqq \mu(f)^{-1}\bigl(W(C,\ U)\bigr)$ が X の開集合であることを示せば良い．

$\forall x_0 \in V$ を 1 つとる．このとき $\mu(f)(x_0) = f|_{\{x_0\}\times Y} \in W(C,\ U)$ だから $\mu(f)(x_0)(C) = f(\{x_0\}\times C) \subset U$ である．i.e. $\{x_0\} \times C \subset f^{-1}(U)$ が成り立つ．f は連続だから $f^{-1}(U)$ は $X \times Y$ の開集合である．すると補題 D.5 が使えて，$x_0 \in U'$ かつ $C \subset V'$ かつ $U' \times V' \subset f^{-1}(U)$ を充たす X の開集合 U' と Y の開集合 V' の存在が言える．このとき $\mu(f)(U')(C) = f(U' \times C) \subset f(U' \times V') \subset U$ が成り立つので $U' \subset V$ である．i.e. U' は x_0 の開近傍でかつ $U' \subset V$ を充たす．x_0 は任意だったので V は開集合である． ■

次に μ が連続であることを示す．補題 D.9 より evaluation

$$\varepsilon\colon C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) \times_{\mathbf{CG}} X \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow Z$$

は連続である[*6]．よって補題 D.11 を使うと

$$\mu \circ \varepsilon\colon C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) \times_{\mathbf{CG}} X \longrightarrow C(Y,\ Z)$$

も連続．再度補題 D.11 を使うことで

$$\mu \circ \mu \circ \varepsilon\colon C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) \longrightarrow C\bigl(X,\ C(Y,\ Z)\bigr)$$

が連続であるとわかる．その上 $\mu \circ \mu \circ \varepsilon = \mu$ であるから μ が連続であることが示された．

[*6] $X \times_{\mathbf{CG}} Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ なので．

次に μ が連続な逆写像を持つことを示す．

$$\begin{aligned}\varepsilon' &\colon C\bigl(X,\, C(Y,\, Z)\bigr) \times_{\mathbf{CG}} X \longrightarrow Z, \\ \varepsilon'' &\colon C(Y,\, Z) \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow Z\end{aligned}$$

をどちらも evaluation とすると，補題 D.9 よりこれらは連続である．よって合成

$$\varepsilon'' \circ (\varepsilon' \times \mathrm{id}_Y) \colon C\bigl(X,\, C(Y,\, Z)\bigr) \times_{\mathbf{CG}} X \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow Z$$

は連続である．補題 D.11 を使うことで

$$\mu \circ \bigl(\varepsilon'' \circ (\varepsilon' \times \mathrm{id}_Y)\bigr) \colon C\bigl(X,\, C(Y,\, Z)\bigr) \longrightarrow C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\, Z)$$

も連続であるとわかる．その上 $\mu \circ \bigl(\varepsilon'' \circ (\varepsilon' \times \mathrm{id}_Y)\bigr) = \mu^{-1}$ である．以上で式 (D.1.2) の μ が $\mathcal{T}_2$ の同相写像であることが示された．

最後に式 (D.1.2) に k を作用させて右辺に補題 D.10 を使うことで

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\, Z) &= k\Bigl(C\bigl(X,\, C(Y,\, Z)\bigr)\Bigr) \\ &= k\Bigl(C\bigl(X,\, k(C(Y,\, Z))\bigr)\Bigr) \\ &= \mathrm{Map}(X,\, \mathrm{Map}(Y,\, Z))\end{aligned}$$

がわかり，証明が完了する．

■

D.2 基点付きコンパクト生成空間

D.2.1 基点付き空間

空間対 (topological pair) とは，位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の組 $(X,\, A)$ のことを言う．空間対の圏 **Pair** を[*7]次のように定義する：

- 対象を空間対とする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pair}}\bigl((X,\, A),\, (Y,\, B)\bigr)$ を，連続写像 $f \colon X \longrightarrow Y$ であって $f(A) \subset B$ を充たすもの全体の集合とする．
- 合成を写像の合成とする．

空間の 3 対 (topological triad) とは，位相空間 X とその部分空間 $A_1,\, A_2 \subset X$ の 3 つ組 $(X,\, A_1,\, A_2)$ のことを言う．空間の 3 対の圏 **Tri** を[*8]次のように定義する：

- 対象を空間の 3 対とする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Tri}}\bigl((X,\, A_1,\, A_2),\, (Y,\, B_1,\, B_2)\bigr)$ を，連続写像 $f \colon X \longrightarrow Y$ であって $f(A_1) \subset B_1$ かつ $f(A_2) \subset B_2$ を充たすもの全体の集合とする．

[*7] この記号は一般的でないかもしれない．
[*8] この記号は一般的でないかもしれない．

- 合成を写像の合成とする．

3 対 $(X,\, A_1,\, A_2) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Tri})$ に対して $A_2 = \emptyset$ とすれば空間対になる．

定義 D.11: 基点付き空間

基点付き空間 (based space) とは，空間対 $(X,\, \{x_0\}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pair})$ のことを言い，$\boldsymbol{(X,\, x_0)}$ と略記される．

基点付きコンパクト生成空間の圏 $\mathbf{CG}_0$ を次のように定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ を基点付き空間 $(X,\, x_0)$ であって，かつ X がコンパクト生成空間であるもの集まりとする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\big((X,\, x_0),\, (Y,\, y_0)\big)$ は基点を保つ連続写像全体の集合とする．
- 合成を写像の合成とする．

$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ に対して $X^+ := X \amalg \{\mathrm{pt}\}$ とおいて基点を付け，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(X,\, Y)$ に対して $f^+ \colon X^+ \longrightarrow Y^+$ を $f^+(x, 1) := \big(f(x),\, 1\big)$，$f^+(\mathrm{pt}, 2) := (\mathrm{pt},\, 2)$ で定義すると $X^+ \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$，$f^+ \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}(X^+,\, Y^+)$ が成り立つ．この対応 $^+ \colon \mathbf{CG} \longrightarrow \mathbf{CG}_0$ は忠実な関手だから $\mathbf{CG}$ を $\mathbf{CG}_0$ の部分圏と見做すことができる．

D.2.2 圏 CG_0 の積と和

命題 D.7: 圏 $\mathbf{CG}_0$ の積

$(X,\, x_0),\, (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ に対して，

$$\big(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\, (x_0,\, y_0)\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$$

は積の普遍性を充たす．i.e. 圏 $\mathbf{CG}_0$ は常に積を持つ．

<u>証明</u> $\forall (W,\, w_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ および任意の $\mathbf{CG}_0$ の射 $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\big((W,\, w_0),\, (X,\, x_0)\big)$，$f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\big((W,\, w_0),\, (Y,\, y_0)\big)$ を与える．命題 D.5 より圏 $\mathbf{CG}$ における積の普遍性の可換図式

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, red, "\exists! g"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X & X \times_{\mathbf{CG}} Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

が成り立つ．あとは $p_1,\, p_2,\, g$ が基点を保つことを示せば良い．

実際 $p_1(x_0,\, y_0) = x_0$，$p_2(x_0,\, y_0) = y_0$ なので $p_i\ (i = 1,\, 2)$ は圏 $\mathbf{CG}_0$ の射である．また，図式の可換性から $p_1 \circ g(w_0) = f_1(w_0) = x_0$ かつ $p_2 \circ g(w_0) = f_2(w_0) = y_0$ が成り立つ．故に $g(w_0) \in p_1^{-1}(\{x_0\}) \cap p_2^{-1}(\{y_0\}) = \{(x_0,\, y_0)\}$ が言える．i.e. g も $\mathbf{CG}_0$ の射である． ■

ところが，$\mathbf{CG}_0$ の和は disjoint union<u>ではない</u>．と言うのも，$(X,\, x_0),\, (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ に対して，$X \amalg Y$ の「基点」と呼ぶべきものは標準的包含の像 $\iota_1(\{x_0\}) \cup \iota_2(\{y_0\}) = \{(x_0,\, 1),\, (y_0,\, 2)\}$ であり，1 点で

はなくなってしまう．解決策は，x_0 と y_0 を同一視することである．このような操作はウェッジ和と呼ばれるのだった：

命題 D.8: 圏 $\mathbf{CG}_0$ の和

$(X,\, x_0),\ (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ に対して，$\sim\, \subset (X \amalg Y) \times (X \amalg Y)$ を $(x_0,\, 1) \sim (y_0,\, 2)$ を充たす最小の同値関係とする[a]．同値関係 $\sim$ による商空間を $X \vee Y$，商写像を $q\colon X \amalg Y \longrightarrow X \vee Y,\ x \longmapsto [x]$ と書くとき，

$$\bigl(X \vee Y,\, [(x_0,\, 1)]\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$$

は和の普遍性を充たす．i.e. $\mathbf{CG}_0$ は常に和を持つ．

[a] つまり同値関係を部分集合と見做したとき，$(x_0,\, 1) \sim (y_0,\, 2)$ を充たす同値類全体の共通部分のこと．

<u>**証明**</u> $\forall (W,\, w_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ および任意の $\mathbf{CG}_0$ の射 $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\bigl((X,\, x_0),\, (W,\, w_0)\bigr)$，$f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\bigl((Y,\, y_0),\, (W,\, w_0)\bigr)$ を与える．$X \amalg Y$ は圏 $\mathbf{CG}$ における和だから，和の普遍性の可換図式

$$\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\iota_1"'] & X \amalg Y \arrow[u, dashed, "\exists ! g"'] & Y \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

が成り立つ．ただし $\iota_i\colon X_i \longrightarrow X \amalg Y,\ x \longmapsto (x,\, i)\ (i = 1,\, 2)$ は標準的包含である．また，商空間の普遍性から $\mathbf{CG}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \amalg Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & W \\ X \vee Y \arrow[ur, dashed, "\exists ! h"] & \end{tikzcd}$$

が成り立つ．あとは $\tilde{\iota}_i \coloneqq q \circ \iota_i$ とおいて，$\tilde{\iota}_1,\, \tilde{\iota}_2,\, h$ が基点を保つことを示せば良い．

実際 $\tilde{\iota}_1(x_0) = [(x_0,\, 1)] = [(y_0,\, 2)] = \tilde{\iota}_2(y_0)$ が成り立つので $\tilde{\iota}_i\ (i = 1,\, 2)$ は圏 $\mathbf{CG}_0$ の射である．また，図式の可換性から $h \circ \tilde{\iota}_1(x_0) = g \circ \iota_1(x_0) = f_1(x_0) = w_0$ かつ $h \circ \tilde{\iota}_2(y_0) = g \circ \iota_2(y_0) = f_2(y_0) = w_0$ が成り立つ．故に $h\bigl([(x_0,\, 1)]\bigr) = w_0$ であり，h は $\mathbf{CG}_0$ の射である．

以上の議論から，$\mathbf{CG}_0$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\tilde{\iota}_1"'] & X \vee Y \arrow[u, dashed, "\exists ! h"'] & Y \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\tilde{\iota}_2"] \end{tikzcd}$$

が成り立つ． ■

$\mathbf{CG}_0$ の和と積の関係は，次の可換図式によって特徴付けられる：

$$
\begin{tikzcd}
& X \vee Y \arrow[dd, hook, "j"] & \\
X \arrow[ur, "\tilde{\imath}_1"] & & Y \arrow[ul, "\tilde{\imath}_2"'] \\
& X \times_{\mathbf{CG}} Y \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

ここに基点を保つ連続写像 $j\colon X \vee Y \hookrightarrow X \times_{\mathbf{CG}} Y$ は

$$
j\bigl([(x,\, 1)]\bigr) := (x,\, y_0), \quad j\bigl([(y,\, 2)]\bigr) := (x_0,\, y)
$$

で定義される単射である．

$$
j(X \vee Y) = X \times_{\mathbf{CG}} \{y_0\} \cup \{x_0\} \times_{\mathbf{CG}} Y
$$

であり，よく $X \vee Y$ と同一視される．

D.2.3　圏 CG_0 の関数空間

定義 D.12: 基点付き関数空間

$X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とし，$(X,\, x_0),\, (Y,\, y_0)$ を基点付き空間とする．

- 基点を保つ連続写像全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\bigl((X,\, x_0),\, (Y,\, y_0)\bigr)$ にコンパクト開位相を入れてできる位相空間を

$$
\boldsymbol{C_0(X,\, Y)} := C\bigl((X,\, x_0),\, (Y,\, y_0)\bigr)
$$

  と書くことにする[a]．

- $C_0(X,\, Y)$ に関手 k を作用させて得られるコンパクト生成空間を

$$
\mathbf{Map_0(\boldsymbol{X},\, \boldsymbol{Y})} := k\bigl(C_0(X,\, Y)\bigr)
$$

  と書く．$\mathrm{Map}_0(X,\, Y)$ の基点は唯一の[b]定数写像 $\mathrm{const}_{y_0}\colon X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto y_0$ である．i.e. 組 $\bigl(\mathrm{Map}_0(X,\, Y),\, \mathrm{const}_{y_0}\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ である．

[a] 補題 D.6 より $C_0(X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ である．
[b] 基点を保たないといけないので．

$\mathrm{Map}_0(X,\, Y)$ に関する随伴定理を述べるためにいくつかの下準備をする．

空間対 $(X,\, A) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pair})$ を与える．X 上の同値関係を

$$
\sim := \bigl\{\, (x,\, y) \in X \times X \bigm| x = y \ \text{または}\ \{x,\, y\} \subset A \,\bigr\} \tag{D.2.1}
$$

と定義し，$\sim$ による商空間を $\boldsymbol{X/A} := X/\sim$，商写像を $q\colon X \longrightarrow X/A$ と書く．このような構成は **collapse *A* to a point** と呼ばれる．

X/A に基点を付けたい場合は，一点集合 $\boldsymbol{a_0} \coloneqq q(A)$ を基点に選ぶ．このとき等化写像 $q\colon X \longrightarrow X/A$ はそのまま **Pair** の射 $q\colon (X,\ A) \longrightarrow (X/A,\ a_0)$ と見做すことができる．X/A の重要な具体例としては，次のスマッシュ積がある：

定義 D.13: スマッシュ積（再掲）

$(X,\ x_0),\ (Y,\ y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ に対して，**スマッシュ積**を

$$\boldsymbol{X \wedge Y} \coloneqq \frac{X \times_{\mathbf{CG}} Y}{X \vee Y} = \frac{X \times_{\mathbf{CG}} Y}{X \times_{\mathbf{CG}} \{y_0\} \cup \{x_0\} \times_{\mathbf{CG}} Y}$$

と定義する．$q\colon X \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow X \wedge Y,\ (x,\ y) \longmapsto x \wedge y$ を商写像とするとき，$x_0 \wedge y = x_0 \wedge y_0 = x \wedge y_0\ (\forall x \in X,\ \forall y \in Y)$ が $X \wedge Y$ の基点となる．

X/A を作る際に A を X の閉集合とすることが多いが，これは次の補題による：

補題 D.12:

A が閉集合のとき，商写像の制限 $q|_{X \setminus A}\colon X \setminus A \longrightarrow q(X \setminus A)$ は同相写像である．

証明 同値関係の定義 (D.2.1) より $\forall x,\ y \in X \setminus A$ に対して $x \neq y \implies x \not\sim y \implies q(x) \neq q(y)$ が成り立つ．i.e. $q|_{X\setminus A}\colon X \setminus A \longrightarrow q(X \setminus A)$ は連続な全単射である．ところで A が X の閉集合なので $X \setminus A$ は X の開集合．故に $X \setminus A$ の任意の開集合 $U \subset X \setminus A$ は X においても開である．$q|_{X\setminus A}$ が全単射なので $(q|_{X\setminus A})^{-1}\big(q|_{X\setminus A}(U)\big) = q^{-1}\big(q(U)\big) = U$ が X の開集合ということになるが，q は等化写像だから $q|_{X\setminus A}(U)$ は X/A の開集合である．i.e. $q|_{X\setminus A}\colon X \setminus A \longrightarrow q(X \setminus A)$ は全単射な開写像であるから同相写像である．■

! 暫くの間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ とし，部分空間 $A \subset X$ を閉集合でかつ X/A が Hausdorff 空間となるようにとる．すると補題 D.2 より $X/A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ である．特に $(X/A,\ a_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ となる．

補題 D.13:

$(X,\ x_0),\ (Y,\ y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ とする．
このとき写像

$$q^*\colon C_0(X/A,\ Y) \longrightarrow C\big((X,\ A),\ (Y,\ y_0)\big),\ f \longmapsto f \circ q$$

は well-defined な全単射連続写像で，コンパクト集合の 1 対 1 対応を与える．
特に自然同値

$$\mathrm{Map}_0(X/A,\ Y) = \mathrm{Map}((X,\ A),\ (Y,\ y_0))$$

が成り立つ．

証明 q が全射連続写像なので q^* は well-defined かつ全単射な連続写像である．

コンパクト集合 $F \subset C\big((X,\ A),\ (Y,\ y_0)\big)$ を任意に取ったとき，逆写像 q^{*-1} が F の上で連続であることを示す．任意の 1 点 $g_0 \in F$ および $C_0(X/A,\ Y)$ の準基に属する開集合 $W(C,\ U) \subset C_0(X/A,\ Y)$ であって

$q^{*-1}(g_0) \in W(C, U)$ を充たすものをとる．このとき $g_0 \circ q(C) \subset U$ が成り立つ．

$a_0 \notin C$ ならば補題 D.12 より $q^{-1}(C) = (q|_{X \setminus A})^{-1}(C)$ は X のコンパクト集合である．よってコンパクト開位相の定義から $W\bigl(q^{-1}(C), U\bigr)$ は g_0 を含む $C\bigl((X, A), (Y, y_0)\bigr)$ の開集合で $q^{*-1}\bigl(W\bigl(q^{-1}(C), U\bigr)\bigr) \subset W(C, U)$ を充たす．

$a_0 \in C$ とする．F はコンパクトなので補題 D.9-(1) より evaluation $\varepsilon\colon F \times X \longrightarrow X$ は連続である．$e(F \times A) = y_0$ が成り立つ．また，命題 D.6 より **CG** における等化写像 $\mathrm{id}_F\colon F \longrightarrow F,\ q\colon X \longrightarrow X/A$ の直積 $\mathrm{id}_F \times q\colon F \times X \longrightarrow F \times (X/A)$ は等化写像なので，商空間の普遍性より **CG** の可換図式

$$\begin{tikzcd} F \times X \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\mathrm{id}_F \times q"'] & Y \\ F \times (X/A) \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{\varepsilon}"'] & \end{tikzcd}$$

が成り立つ．$\overline{\varepsilon}(g_0, a_0) \in U$ なので，g_0 の開近傍 $g_0 \in V \subset F$ および a_0 の開近傍 $a_0 \in N \subset X/A$ が存在して $\overline{\varepsilon}(V \times N) \subset U$ を充たす．ここで $C' \coloneqq C \setminus (C \cap N)$ とおくと C' はコンパクト空間 C の閉集合なので補題 D.2 よりコンパクト．かつ $a_0 \notin C'$ である．従って $V \cap W\bigl(h^{-1}(C'), U\bigr)$ は g_0 の F における開近傍である．$\forall g \in V \cap W\bigl(h^{-1}(C'), U\bigr)$ は $g\bigl(h^{-1}(C)\bigr) \subset U$ かつ $g\bigl(h^{-1}(C')\bigr) \subset U$ を充たす．$C \subset C' \cup N$ であるから $h^{*-1}(g) \in W(C, U)$ である．

以上の議論と命題 D.4-(1) より，$k(q^*)^{-1} = k(q^{*-1})\colon \mathrm{Map}((X, A), (Y, y_0)) \longrightarrow \mathrm{Map}_0(X/A, Y)$ は連続である．i.e. $k(q^*)\colon \mathrm{Map}_0(X/A, Y) \longrightarrow \mathrm{Map}((X, A), (Y, y_0))$ は同相写像である． ■

定理 D.4: 圏 $\mathbf{CG}_0$ における随伴定理

$(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ ならば

$$\mathrm{Map}_0(X \wedge Y, Z) = \mathrm{Map}_0\bigl(X, \mathrm{Map}_0(Y, Z)\bigr)$$

が成り立つ．

証明 $W \coloneqq X \times_{\mathbf{CG}} \{y_0\} \cup \{x_0\} \times_{\mathbf{CG}} Y$ とおくと，スマッシュ積の定義より $X \wedge Y = X \times_{\mathbf{CG}} Y/W$ である．補題 D.13 より

$$\mathrm{Map}_0(X \times_{\mathbf{CG}} Y/W, Z) = \mathrm{Map}((X \times_{\mathbf{CG}} Y, W), (Z, z_0))$$

が成り立つ．右辺は $\mathrm{Map}(X \times_{\mathbf{CG}} Y, Z)$ の部分空間である．

ところで，**CG** の随伴定理より $\mathrm{Map}(X \times_{\mathbf{CG}} Y, Z) = \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ が成り立つ．この同相によって

$$\mathrm{Map}((X \times_{\mathbf{CG}} Y, W), (Z, z_0)) = \mathrm{Map}_0\bigl(X, \mathrm{Map}_0(Y, Z)\bigr)$$

が言える． ■

D.3　非退化な基点を持つコンパクト生成空間

非退化な基点を持つコンパクト生成空間の圏 $\mathbf{CG}_*$ を次のように定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ は基点付きコンパクト生成空間 $(X,\, x_0)$ であって NDR 対でもあるもの全体とする[*9].
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}\big((X,\, x_0),\, (Y,\, y_0)\big)$ は基点を保つ連続写像全体の集合とする.
- 合成を写像の合成とする.

$\mathbf{CG}_*$ は $\mathbf{CG}_0$ の充満部分圏である.

補題 D.14:

$(X,\, A),\, (Y,\, B)$ を NDR 対とすると,

$$
\begin{array}{cccc}
 & & X \times B & \\
X \times Y & X \times B \cup A \times Y & & A \times B \\
 & & A \times Y &
\end{array}
$$

を組み合わせて得られる 9 個の全ての空間対は NDR 対である.

証明 ■

補題 D.14 より,積は $\mathbf{CG}_0$ と全く同様に構成できる.

命題 D.9: 圏 $\mathbf{CG}_*$ の積

$(X,\, x_0),\, (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して,

$$\big(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\, (x_0,\, y_0)\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$$

は積の普遍性を充たす.i.e. 圏 $\mathbf{CG}_*$ は常に積を持つ.

和も $\mathbf{CG}_*$ と同じである.

命題 D.10: 圏 $\mathbf{CG}_*$ の和

$(X,\, x_0),\, (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して,$\sim \subset (X \amalg Y) \times (X \amalg Y)$ を $(x_0,\, 1) \sim (y_0,\, 2)$ を充たす最小の同値関係とする[a].同値関係 $\sim$ による商空間を $X \vee Y$,商写像を $q\colon X \amalg Y \longrightarrow X \vee Y,\; x \longmapsto [x]$ と書くとき,

$$\big(X \vee Y,\, [(x_0,\, 1)]\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$$

は和の普遍性を充たす.i.e. $\mathbf{CG}_*$ は常に和を持つ.

[a] つまり同値関係を部分集合と見做したとき,$(x_0,\, 1) \sim (y_0,\, 2)$ を充たす同値類全体の共通部分のこと.

[*9] i.e. 包含写像 $\{x_0\} \hookrightarrow X$ はコファイブレーションである

参考文献

[1] Steve Awodey. *Category Theory.* Oxford University Press, second edition, 2010.

[2] Glen E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press, 1972.

[3] James F. Davis and Paul Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 1991.

[4] Brendan Fong and David I. Spivak. 活躍する圏論. 共立出版, 2023. 川辺治之 訳.

[5] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2001.

[6] John Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes.* Princton University Press, 1974.

[7] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology.* Springer New York, 1966.

[8] N. Steenrod. A convenient category of topological spaces. *Michigan Math*, Vol. 14, , 1967.

[9] George W. Whitehead. *Elements of homotopy theory.* Springer-Verlag, New York, 1978.

[10] 河澄響矢. トポロジーの基礎 上・下. 東京大学出版会, 2022.

[11] 志甫淳. 層とホモロジー代数. 共立出版, 2016.